Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Конягин, Двойная экспоненциальная нижняя оценка числа представлений единицы египетскими дробями, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 2, 312–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10417>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 13:31:39

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Двойная экспоненциальная нижняя оценка числа представлений единицы египетскими дробями

С. В. Конягин

Египетские дроби появились в Математическом папирусе Ахмеса (или папирусе Ринда) [1] – одной из древнейших математических рукописей, появившейся примерно в 1650 г. до н.э. Представление положительного рационального числа r в виде египетской дроби – это представление вида

$$r = \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}, \quad 1 \leq x_1 < \dots < x_n,$$

где $x_1, \dots, x_n$ – натуральные числа. Существование такого представления любого положительного рационального числа доказал Фибоначчи [2]; по-видимому, его доказательство было первым применением жадных алгоритмов. Многочисленные проблемы и результаты, связанные с египетскими дробями, представлены в недавнем обзоре [3].

Обозначим

$$\mathbf{X}_n = \left\{ \{x_1, \dots, x_n\} : \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} = 1, 1 \leq x_1 < \dots < x_n \right\}.$$

Легко видеть, что $\mathbf{X}_3$ содержит единственный набор $\{2, 3, 6\}$. Далее, набору $\{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbf{X}_n$ можно сопоставить набор $\{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n+1, x_n(x_n+1)\} \in \mathbf{X}_{n+1}$, причем получившееся отображение $\mathbf{X}_n \rightarrow \mathbf{X}_{n+1}$ является инъекцией. Следовательно,

$$|\mathbf{X}_n| \leq |\mathbf{X}_{n+1}|. \quad (1)$$

В частности, $|\mathbf{X}_n| \geq 1$ при $n \geq 3$.

Естественно возникает вопрос о поведении величины $|\mathbf{X}_n|$ при $n \rightarrow \infty$. Известно [4], что

$$\exp\left(\frac{c_1 n^3}{\ln n}\right) \leq |\mathbf{X}_n| \leq \exp((c_2 + o(1))2^n), \quad (2)$$

где c_1 и c_2 – некоторые положительные константы, причем $c_2 < 0.12$. Целью данной работы является существенное улучшение нижней оценки (2).

ТЕОРЕМА 1. При $n \rightarrow \infty$ имеет место неравенство

$$|\mathbf{X}_n| \geq \exp\left(\exp\left(\left(\frac{(\ln 2)(\ln 3)}{3} + o(1)\right)\frac{n}{\ln n}\right)\right).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00329) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-6003.2012.1).

DOI: 10.4213/mzm10417

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

ТЕОРЕМА А [5]. Для любого натурального d , не равного 1 и 6, найдется простой делитель $p(d)$ числа $2^d - 1$, не делящий $2^{d'} - 1$ ни при каком натуральном $d' < d$.

Через $\tau(m)$ и $\omega(m)$ обозначаются соответственно число натуральных и простых делителей натурального m .

ЛЕММА 1. Имеют место неравенства

$$\omega(2^m - 1) \geq \tau(m) - 2 \quad \text{и} \quad \omega(2^m + 1) \geq \tau(m) - 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Различным делителям d числа m , не равным 1 и 6, соответствуют различные простые делители $p(d)$ числа $2^m - 1$. Различным делителям d числа $2m$, не равным 6, соответствуют различные простые делители $p(2d)$ числа $2^m + 1$.

ТЕОРЕМА В. Для $X \geq 3$ найдется натуральное число $m < X$ такое, что

$$\tau(m) > \exp\left((\ln 2 + o(1)) \frac{\ln X}{\ln \ln X}\right)$$

при $X \rightarrow \infty$.

Фактически теорема доказана в [6].

Ключевым является следующее утверждение.

ЛЕММА 2. Для любых натуральных $k \geq 2$ и $m < 3^k$ имеет место неравенство

$$|\mathbf{X}_{3k+3}| \geq \frac{\tau((2^m + 1)^2) - 1}{2}.$$

Прежде чем доказывать лемму 2, покажем, как из нее выводится теорема 1. Ввиду (1) последнюю достаточно доказать при $n = 3k + 3$. В силу теоремы В подбираем такое $m < 3^k$, что при $k \rightarrow \infty$

$$\tau(m) > \exp\left((\ln 2)(\ln 3) + o(1)) \frac{k}{\ln k}\right). \quad (3)$$

Пусть $q_1, \dots, q_t$ — различные простые делители числа $2^m + 1$. Тогда все числа вида $q_1^{i_1} \dots q_t^{i_t}$, $0 \leq i_j \leq 2$, являются делителями $(2^m + 1)^2$, и в силу леммы 1

$$\tau((2^m + 1)^2) \geq 3^t \geq 3^{\tau(m)-1}.$$

Подставляя последнее неравенство в оценку из леммы 2 и учитывая (3), мы доказываем теорему 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 2. Для $X > 1$ мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{X^3 - X} &= \frac{1}{X^3} + \frac{1}{X^5 - X^3}, \\ \frac{1}{X^5 - X^3} &= \frac{1}{X^5 - X^3 + X} + \frac{1}{(X^4 - X^2 + 1)(X^5 - X^3)}, \\ \frac{1}{(X^4 - X^2 + 1)(X^5 - X^3)} &= \frac{1}{(X^4 + X^2 + 1)(X^5 - X^3)} \\ &\quad + \frac{2}{(X^4 - X^2 + 1)(X^4 + X^2 + 1)(X^3 - X)}, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} (X^4 + X^2 + 1)(X^5 - X^3) &= X^9 - X^3, \\ (X^4 - X^2 + 1)(X^4 + X^2 + 1) &= X^8 + X^4 + 1. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что

$$\frac{1}{X^3 - X} - \frac{1}{X^9 - X^3} = \frac{1}{X^3} + \frac{1}{X^5 - X^3 + X} + \frac{2}{(X^3 - X)(X^8 + X^4 + 1)}.$$

Применяя это равенство последовательно при $X = 2^{3^{l-1}}$, $l = 1, \dots, k-1$, и далее используя равенство

$$\frac{1}{2^{3^k} - 2^{3^{k-1}}} = \frac{1}{2^{3^k}} + \frac{1}{2^{3^k} + 2^{3^{k-m}}} + \frac{1}{2^{3^{k+m}} + 2^{3^k}},$$

мы получаем

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{l=1}^k \frac{1}{2^{3^l}} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{2^{5 \times 3^{l-1}} - 2^{3 \times 3^{l-1}} + 2^{3^{l-1}}} \\ &+ \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{(2^{3^l-1} - 2^{3^{l-1}-1})(2^{8 \times 3^{l-1}} + 2^{4 \times 3^{l-1}} + 1)} + \frac{1}{2^{3^k} + 2^{3^{k-m}}} + \frac{1}{2^{3^{k+m}} + 2^{3^k}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Замечая, что

$$\begin{aligned} 2^{5 \times 3^{l-1}-1} &< 2^{5 \times 3^{l-1}} - 2^{3 \times 3^{l-1}} + 2^{3^{l-1}} < 2^{5 \times 3^{l-1}}, \\ 2^{11 \times 3^{l-1}-2} &< (2^{3^l-1} - 2^{3^{l-1}-1})(2^{8 \times 3^{l-1}} + 2^{4 \times 3^{l-1}} + 1) < 2^{11 \times 3^{l-1}-1}, \\ 2^{3^k} &< 2^{3^k} + 2^{3^{k-m}} < 2^{3^k+1}, \end{aligned}$$

мы видим, что в правой части (4) все дроби, кроме последней, различны, а последняя дробь,

$$\frac{1}{A} := \frac{1}{2^{3^{k+m}} + 2^{3^k}},$$

меньше всех предыдущих, за исключением, может быть, дроби

$$\frac{1}{B} := \frac{1}{(2^{3^k-1} - 2^{3^{k-1}-1})(2^{8 \times 3^{k-1}} + 2^{4 \times 3^{k-1}} + 1)}.$$

Количество слагаемых в правой части равенства (4) равно $3k+2$. Мы можем получить из него

$$D := \frac{\tau((2^m+1)^2) - 1}{2}$$

представлений в виде суммы $3k+3$ дробей, заменив $1/A$ на

$$\frac{1}{2^{3^k}(2^m+1+d_1)} + \frac{1}{2^{3^k}(2^m+1+d_2)}, \quad (5)$$

где d_1 – произвольный делитель $(2^m+1)^2$, меньший 2^m+1 , а $d_2 = (2^m+1)^2/d_1 > d_1$. При этом мы получим представление в виде суммы различных дробей, так как обе дроби в (5) меньше всех других дробей, за исключением, может быть, дроби $1/B$, но они не могут быть равны $1/B$, ибо числа $2^{3^k}(2^m+1+d_i)$, $i = 1, 2$, делятся на 2^{3^k} , а B не делится. Лемма 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого положительного рационального числа r количество представлений r в виде египетской дроби с n слагаемыми при $n \rightarrow \infty$ не меньше

$$\exp\left(\exp\left(\left(\frac{(\ln 2)(\ln 3)}{3} + o(1)\right)\frac{n}{\ln n}\right)\right).$$

Доказательство. Используя [2], фиксируем представление

$$r = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_m}, \quad 1 \leq x_1 < \cdots < x_m, \quad (6)$$

Имея произвольное представление 1 в виде египетской дроби с $n - m + 1$ слагаемыми, мы делим это равенство на x_m и получаем представление $1/x_m$ с тем же числом слагаемых. Далее заменяя в (6) $1/x_m$ произвольной египетской дробью с $n - m + 1$ слагаемыми, мы представляем r в виде египетской дроби с n слагаемыми, причем количество таких представлений будет не меньше $|\mathbf{X}_{n-m+1}|$.

Укажем еще одно применение леммы 1. Обозначим

$$\mathcal{M}(x) = \{\tau(2^n - 1) : n \leq x\}.$$

В [7] установлено, что при больших x

$$|\mathcal{M}(x) \cap [1, x]| \leq \frac{x}{(\ln x)^{0.258}}.$$

Эту оценку можно усилить следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Для большого x имеет место неравенство

$$|\mathcal{M}(x) \cap [1, x]| \leq \frac{x}{\ln x} \exp((\ln 2)^{-1} (\ln \ln \ln x)^2).$$

Доказательство. Положим $[1, x] \cap \mathbb{N} = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2$, где

$$\mathcal{X}_1 = \{n \leq x : \omega(n) \leq (\ln 2)^{-1} \ln \ln \ln x + 2\},$$

$$\mathcal{X}_2 = \{n \leq x : \omega(n) > (\ln 2)^{-1} \ln \ln \ln x + 2\}.$$

В силу [8] и [9] при $x \rightarrow \infty$

$$|\mathcal{X}_1| = o\left(\frac{x}{\ln x} \exp((\ln 2)^{-1} (\ln \ln \ln x)^2)\right). \quad (7)$$

Пусть $n \in \mathcal{X}_2$. Тогда $\tau(n) \geq 2^{\omega(n)} \geq 4 \ln \ln x$. По лемме 1

$$\omega(2^n - 1) \geq 4 \ln \ln x - 2 > 3 \ln \ln x.$$

Пусть $p_1, \dots, p_r$ — простые делители $2^n - 1$, $r = \omega(2^n - 1)$, $2^n - 1 = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$. Известно, что

$$\tau(2^n - 1) = \prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1).$$

Следовательно, количество $\Omega(\tau(2^n - 1))$ простых делителей $\tau(2^n - 1)$ с учетом кратности не меньше $r > 3 \ln \ln x$. Далее мы используем оценку [10]

$$|\{m \leq x : \Omega(m) \geq 3 \ln \ln x\}| \ll x(\ln x)^{1-3 \ln 2} \leq x(\ln x)^{-1}.$$

Таким образом,

$$|\{\tau(2^n - 1) : n \leq x, n \in \mathcal{X}_2\} \cap [1, x]| \ll x(\ln x)^{-1}.$$

Отсюда и из (7) вытекает утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Robins, Ch. Shute, *The Rhind Mathematical Papyrus. An Ancient Egyptian Text*, British Museum Publ., London, 1987. [2] L. E. Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci*, A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation, Springer-Verlag, New York, 2003. [3] R. L. Graham, *Erdős Centennial*, On the occasion of Paul Erdős 100th anniversary of his birth, Bolyai Soc. Math. Stud., **25**, Springer, Berlin; János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2013, 289–309. [4] C. Sándor, *Period. Math. Hungar.*, **47**:1-2 (2003), 215–219. [5] A. S. Bang, *Zeuthen Tidsskr.* (5), **4** (1886), 70–80. [6] A. Wiman, *Arkiv f. Mat., Astr. och Fys.*, **3**:18 (1907), 9 pp. [7] F. Luca, I. E. Shparlinski, *Monatsh. Math.*, **154**:1 (2008), 59–69. [8] L. G. Sathe, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, **17** (1953), 63–82; **17** (1953), 83–141; **18** (1954), 27–42; **18** (1954), 43–81. [9] A. Selberg, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, **18** (1954), 83–87. [10] A. Hildebrand, G. Tenenbaum, *Duke Math. J.*, **56**:3 (1988), 471–501.

С. В. Конягин

Математический институт

им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: konyagin23@gmail.com

Поступило

14.08.2013