Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Маслей, Достаточные условия дискретности для подгрупп $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, порожденных инволюцией и непараболическим элементом, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 2, 317–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10418>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:12:48

Достаточные условия дискретности для подгрупп $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, порожденных инволюцией и непараболическим элементом

А. В. Маслей

Достаточные условия дискретности для подгрупп $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ с двумя непараболическими порождающими были установлены в [1], [2] (см. также [3]). В данной работе эти результаты улучшаются для случая, когда один из порождающих является инволюцией (см. теоремы 2 и 5).

1. Предварительные результаты. Пусть $\mathbb{H}^3$ – модель Пуанкаре гиперболического пространства и $\partial\mathbb{H}^3 = \overline{\mathbb{C}}$. Основные факты о группе $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ и ее действии на $\mathbb{H}^3$ и $\overline{\mathbb{C}}$ приведены в [4]. Эллиптический элемент f называется *инволюцией*, если $\mathrm{tr}(f) = 0$.

Пусть $f, g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ и $\langle f, g \rangle$ – группа, порожденная элементами f и g . *Параметрами* группы $\langle f, g \rangle$ называются три комплексных числа

$$\gamma = \mathrm{tr}(fgf^{-1}g^{-1}) - 2, \quad \beta = \mathrm{tr}^2(f) - 4, \quad \beta' = \mathrm{tr}^2(g) - 4.$$

Обозначим $\mathrm{par}(\langle f, g \rangle) = (\gamma, \beta, \beta')$. Если $\gamma \neq 0$, то упорядоченная тройка (γ, β, β') определяет группу $\langle f, g \rangle$ с точностью до сопряжения в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ (см. [5]). Если дискретная группа $\langle f, g_1 \rangle$ такова, что $\mathrm{par}(\langle f, g_1 \rangle) = (\gamma, \beta, \beta')$, где $\gamma \neq 0$ и $\gamma \neq \beta$, то существует дискретная группа $\langle f, g_2 \rangle$ такая, что $\mathrm{par}(\langle f, g_2 \rangle) = (\gamma, \beta, -4)$ (см. [6]). Хорошо известна (см. [2]) следующая

ЛЕММА 1. Пусть $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ – непараболический элемент, $\tau_g \in [0; +\infty)$ – величина сдвига этого элемента. Тогда

$$\mathrm{ch}(\tau_g) = \frac{|\beta(g) + 4| + |\beta(g)|}{4}.$$

Пусть $f, g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ – непараболические элементы. Обозначим через $\theta(f, g) \in [0, \pi/2]$ и $\delta(f, g) \in [0, +\infty)$ соответственно угол и расстояние между их осями. Следующее утверждение – следствие леммы 4.4 из [5].

ЛЕММА 2. Пусть $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ – непараболический элемент, $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ – инволюция, элементы f и g не имеют общих неподвижных точек в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда

$$\mathrm{ch}(2\delta(f, g)) = \frac{|\gamma - \beta| + |\gamma|}{|\beta|}, \quad \cos(2\theta(f, g)) = \frac{|\gamma - \beta| - |\gamma|}{|\beta|}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f, g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ такие, как в лемме 1. Тогда

- (1) неравенство $|\gamma| < |\gamma - \beta|$ эквивалентно неравенству $\theta(f, g) < \pi/4$;
- (2) равенство $|\gamma| = |\gamma - \beta|$ эквивалентно равенству $\theta(f, g) = \pi/4$;
- (3) неравенство $|\gamma| > |\gamma - \beta|$ эквивалентно неравенству $\theta(f, g) > \pi/4$.

Нетрудно видеть, что имеют место следующие утверждения.

ЛЕММА 3 [5]. Пусть $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ – непараболический элемент, $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ – инволюция и $h = gfg^{-1}$. Тогда $\delta(f, h) = 2\delta(f, g)$.

ЛЕММА 4. Пусть $f \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) \setminus \{\mathrm{Id}\}$ – непараболический элемент, $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ – инволюция и $h = gfg^{-1}$. Тогда если $\theta(f, g) \leq \pi/4$, то $\theta(f, h) = 2\theta(f, g)$; если же $\theta(f, g) \geq \pi/4$, то $\theta(f, h) = \pi - 2\theta(f, g)$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № -13-01-00513) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1414.2012.1).

DOI: 10.4213/mzm10418

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 4 аналогично доказательству леммы 3.

ЛЕММА 5. Пусть группа $G = \langle f, g \rangle < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ такова, что g – инволюция. Обозначим $h = gfg^{-1}$ и $H = \langle f, h \rangle$. Тогда

- (1) если H – неэлементарная группа, то G – неэлементарная группа;
- (2) если H – дискретная группа, то G – дискретная группа;
- (3) если $H = \langle f \rangle * \langle h \rangle$, то $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункты (1) и (2) очевидны. Пункт (3) – следствие леммы 2.7 из [6].

2. Группы, порожденные эллиптическим элементом и инволюцией. Следующая теорема была доказана в [1].

ТЕОРЕМА 1. Пусть группа $G = \langle f, g \rangle < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ такова, что f и g – эллиптические элементы порядков $m \geq 3$ и $n \geq 2$ соответственно. Предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$\text{ch } \delta(f, g) \geq \frac{\cos(\pi/m) \cos(\pi/n) \cos \theta(f, g) + 1}{\sin(\pi/m) \sin(\pi/n)}. \quad (1)$$

Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

Если порождающий g – инволюция, т.е. $n = 2$, то неравенство (1) приводится к виду $\text{sh } \delta(f, g) \geq \text{ctg}(\pi/m)$, который не зависит от угла $\theta(f, g)$. Теорема 2 улучшает эту оценку, учитывая значение угла $\theta(f, g)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть группа $G = \langle f, g \rangle < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ такова, что f – эллиптический элемент порядка $m \geq 3$ и g – инволюция. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- (1) $\theta(f, g) \leq \pi/4$ и $\text{sh } \delta(f, g) \geq \text{ctg}(\pi/m) \cos \theta(f, g)$;
- (2) $\theta(f, g) \geq \pi/4$ и $\text{sh } \delta(f, g) \geq \text{ctg}(\pi/m) \sin \theta(f, g)$.

Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $h = gfg^{-1}$ и $H = \langle f, h \rangle$. Пусть для группы G выполнено условие (1). Тогда из лемм 3 и 4 следует, что

$$\begin{aligned} \text{ch } \delta(f, h) &= \text{ch}(2\delta(f, g)) \geq 1 + 2 \text{ctg}^2\left(\frac{\pi}{m}\right) \cos^2 \theta(f, g) \\ &= \frac{1 + \cos^2(\pi/m) \cos(2\theta(f, g))}{\sin^2(\pi/m)} = \frac{1 + \cos^2(\pi/m) \cos \theta(f, h)}{\sin^2(\pi/m)}. \end{aligned}$$

По теореме 1 H – неэлементарная дискретная группа и $H = \langle f \rangle * \langle h \rangle$. В силу леммы 5 теорема доказана.

Доказательство теоремы в случае (2) проводится аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $G = \langle f, g \rangle < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ и $\text{par}(\langle f, g \rangle) = (\gamma, \beta, -4)$, где $\gamma \in \mathbb{C}$, $\beta = -4 \sin^2(k\pi/m)$, $m \geq 3$, $1 \leq k < m/2$ и $(k, m) = 1$. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- (1) $|\gamma| - |\gamma - \beta| \leq 0$ и $|\gamma| - \cos(2\pi/m)|\gamma - \beta| \geq |\beta|$;
- (2) $|\gamma - \beta| - |\gamma| \leq 0$ и $|\gamma - \beta| - \cos(2\pi/m)|\gamma| \geq |\beta|$.

Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

3. Группы, порожденные локсодромическим элементом и инволюцией. Следующие две теоремы были доказаны в [2] (см. также [3]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть группа $G = \langle f, g \rangle < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ такова, что f и g – локсодромические элементы с величинами сдвигов τ_f и τ_g . Обозначим

$$\alpha_f = \arcsin\left(\frac{1}{\text{ch}(\tau_f/2)}\right) \quad \text{и} \quad \alpha_g = \arcsin\left(\frac{1}{\text{ch}(\tau_g/2)}\right).$$

Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- (1) $\alpha_f + \alpha_g \leq \theta(f, g)$;
- (2) $\alpha_f + \alpha_g > \theta(f, g)$ и

$$\text{ch } \delta(f, g) \geq \frac{\text{ch}(\tau_f/2) \text{ch}(\tau_g/2) \cos \theta(f, g) + 1}{\text{sh}(\tau_f/2) \text{sh}(\tau_g/2)}.$$

Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть группа $G = \langle f, g \rangle < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ такова, что f – локсодромический элемент с величиной сдвига τ_f и g – эллиптический элемент порядка $n \geq 2$. Предположим, что выполнено следующее неравенство

$$\text{sh } \delta(f, g) \geq \frac{\text{ch}(\tau_f/2) \cos(\pi/n) \sin \theta(f, g) + 1}{\text{sh}(\tau_f/2) \sin(\pi/n)}. \quad (2)$$

Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

Если порождающий g – инволюция, то неравенство (2) приводится к виду $\text{ch } \delta(f, g) \geq \text{cth}(\tau_f/2)$, который не зависит от угла $\theta(f, g)$. Теорема 5 улучшает эту оценку, учитывая значение угла $\theta(f, g)$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть группа $G = \langle f, g \rangle < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ такова, что f – локсодромический элемент с величиной сдвига τ_f и g – инволюция. Обозначим $\alpha_f = \arcsin(1/\text{ch}(\tau_f/2))$. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- (1) $\theta(f, g) \leq \pi/4$ и $\alpha_f \leq \theta(f, g)$;
- (2) $\theta(f, g) \leq \pi/4$, $\alpha_f > \theta(f, g)$ и $\text{ch } \delta(f, g) \geq \text{cth}(\tau_f/2) \cos \theta(f, g)$;
- (3) $\theta(f, g) \geq \pi/4$ и $\alpha_f \leq \pi/2 - \theta(f, g)$;
- (4) $\theta(f, g) \geq \pi/4$, $\alpha_f > \pi/2 - \theta(f, g)$ и $\text{ch } \delta(f, g) \geq \text{cth}(\tau_f/2) \sin \theta(f, g)$.

Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $h = gfg^{-1}$ и $H = \langle f, h \rangle$.

Пусть для группы G выполнено условие (1). Тогда из леммы 4 следует, что $\alpha_f + \alpha_h \leq \theta(f, h)$.

Пусть для группы G выполнено условие (2). Тогда из леммы 4 следует, что $\alpha_f + \alpha_h > \theta(f, h)$. Из лемм 3 и 4 получаем, что

$$\begin{aligned} \text{ch } \delta(f, h) &= \text{ch}(2\delta(f, g)) \geq 2 \text{ch}^2\left(\frac{\tau_f}{2}\right) \cos^2 \theta(f, g) - 1 \\ &= \frac{1 + \text{ch}^2(\tau_f/2) \cos(2\theta(f, g))}{\text{sh}^2(\tau_f/2)} = \frac{1 + \text{ch}^2(\tau_f/2) \cos \theta(f, h)}{\text{sh}^2(\tau_f/2)}. \end{aligned}$$

По теореме 3 в каждом из этих двух случаев H – неэлементарная дискретная группа и $H = \langle f \rangle * \langle h \rangle$. В силу леммы 5 теорема доказана.

Доказательства теоремы в случаях (3) и (4) проводятся аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $G = \langle f, g \rangle < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ и $\mathrm{par}(\langle f, g \rangle) = (\gamma, \beta, -4)$, где $\gamma \in \mathbb{C}$ и $\beta \in \mathbb{C} \setminus [-4; 0]$. Обозначим

$$A = \frac{|\beta| \cdot (12 - |\beta + 4| - |\beta|)}{|\beta + 4| + |\beta| + 4} \quad \text{и} \quad B = \frac{|\beta + 4| + |\beta|}{4}.$$

Предположим, что выполнено одно из следующих условий:

- (1) $|\gamma| - |\gamma - \beta| \leq 0$ и $|\gamma| - |\gamma - \beta| \geq A$;
- (2) $|\gamma| - |\gamma - \beta| \leq 0$, $|\gamma| - |\gamma - \beta| < A$ и $B \cdot |\gamma| - |\gamma - \beta| \geq |\beta|$;
- (3) $|\gamma - \beta| - |\gamma| \leq 0$ и $|\gamma - \beta| - |\gamma| \geq A$;
- (4) $|\gamma - \beta| - |\gamma| \leq 0$, $|\gamma - \beta| - |\gamma| < A$ и $B \cdot |\gamma - \beta| - |\gamma| \geq |\beta|$.

Тогда G – неэлементарная дискретная группа и $G = \langle f \rangle * \langle g \rangle$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Rasskazov, *Adv. Geom.*, **6:1** (2006), 85–92. [2] А. В. Маслей, “Достаточные условия дискретности для двупорожденных подгрупп $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ ”, *Сиб. матем. журн.* (в печати). [3] A. Masley, *The Fourth Geometry Meeting*, Dedicated to the Centenary of A. D. Alexandrov (August 20–24, 2012), Abstracts, PDMI, Saint-Petersburg, 2012, 72–73, <http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2012/A100/abstr.pdf>. [4] Ф. Груневальд, Й. Меннике, Ю. Эльстродт, *Группы, действующие на гиперболическом пространстве. Гармонический анализ и теория чисел*, МЦНМО, М., 2003. [5] F. W. Gehring, G. J. Martin, *J. Anal. Math.*, **63:1** (1994), 175–219. [6] F. W. Gehring, J. P. Gilman, G. J. Martin, *Commun. Contemp. Math.*, **3:2** (2001), 163–186.

А. В. Маслей

Новосибирский государственный университет

E-mail: masley.alexander@gmail.com

Поступило

10.06.2013