Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лапин, Цепная реализация дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями и B -конструкция для A_∞ -алгебр, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 1, 101–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10419>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 16:30:31

Цепная реализация дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями и B -конструкция для A_∞ -алгебр

С. В. Лапин

На основе крашенного варианта двойственности Кошуля введено понятие дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями. При помощи гомотопической техники дифференциальных модулей Ли над крашенными коалгебрами доказана гомотопическая инвариантность структуры дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями. Установлены связи между дифференциальными модулями с ∞ -симплициальными гранями и A_∞ -алгебрами. Введены понятия цепной реализации дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями и тензорного произведения дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями. Показано, что цепная реализация тензорного дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями, построенного по A_∞ -алгебре, и B -конструкция для этой A_∞ -алгебры являются изоморфными дифференциальными коалгебрами.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10419

В работе [1] при изучении гомотопических свойств E_∞ -коалгебр была введена конструкция цепной реализации симплициальных дифференциальных модулей и, в частности, цепной реализации дифференциальных модулей с симплициальными гранями. В [2] было показано, что цепная реализация тензорного дифференциального модуля с симплициальными гранями, определяемого произвольной дифференциальной алгеброй, является B -конструкцией для этой дифференциальной алгебры. При помощи структуры E_∞ -коалгебры на цепном комплексе стандартного n -мерного симплициального симплекса и представления B -конструкции как цепной реализации в [2] было получено, что B -конструкция для любой кокоммутативной алгебры Хопфа является E_∞ -коалгеброй. Из этого следует, что на когомологиях этой B -конструкции имеется естественное действие операций Стинрода, для которых справедливы соотношения Адема [1] и формула Картана [3]. В частности, если в качестве кокоммутативной алгебры Хопфа взять алгебру Стинрода, то получим ставший уже классическим результат из работы [4] о действии операций Стинрода на когомологиях алгебры Стинрода, т.е. о действии операций Стинрода на втором члене спектральной последовательности Адамса для стабильных гомотопических групп сфер.

С другой стороны, в работе [5] было введено понятие A_∞ -алгебры, являющееся гомотопически инвариантным аналогом понятия дифференциальной ассоциативной алгебры. В [6] было введено понятие B -конструкции для A_∞ -алгебры, обобщающее понятие B -конструкции для дифференциальной алгебры. В [7] и [8] различными методами было показано, что на алгебре Стиррода имеется структура A_∞ -алгебры и когомологии B -конструкции для этой A_∞ -алгебры изоморфны предельному члену спектральной последовательности Адамса для стабильных гомотопических групп сфер. В связи с этим возникала задача представления B -конструкции для A_∞ -алгебры как цепной реализации тензорного дифференциального модуля с гомотопически возмущенными симплициальными гранями, которые определялись бы по высшим умножениям данной A_∞ -алгебры. Интерес к решению этой задачи вызван, главным образом, возможностью построения операций Стиррода в когомологиях B -конструкций кокоммутативных A_∞ -алгебр Хопфа и, в частности, в членах спектральной последовательности Адамса для стабильных гомотопических групп сфер.

Данная работа состоит из трех разделов. В первом разделе рассматриваются необходимые понятия, конструкции и утверждения, связанные с крашенным вариантом теории двойственности Кошуля для квадратичных алгебр [9] и крашенным вариантом теории дифференциальных модулей Ли над градуированными коалгебрами [10]. Во втором разделе дается описание двойственной по Кошулю крашенной коалгебры $(F^!, \nabla)$ к квадратичной крашенной алгебре симплициальных граней (F, π) . Далее вводится понятие дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями как дифференциального модуля Ли над крашенной коалгеброй $(F^!, \nabla)$ или, что эквивалентно, как дифференциального модуля над ко- B -конструкцией $(\Omega(F^!), d, \pi)$ для этой крашенной коалгебры. Показано, что структура дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями является гомотопически инвариантной. Отметим, что в [11] на основе рассмотрения квадратично-скалярной крашенной алгебры симплициальных граней и вырождений (S, π) , подалгеброй которой является крашенная квадратичная алгебра (F, π) , и применения к (S, π) гомотопической техники дифференциальных модулей Ли над искривленными крашенными коалгебрами было введено понятие дифференциального ∞ -симплициального модуля, и доказана гомотопическая инвариантность структуры дифференциального ∞ -симплициального модуля. Однако, из гомотопической инвариантности структуры дифференциального ∞ -симплициального модуля не следует гомотопическая инвариантность структуры дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями, поскольку крашенная алгебра (S, π) гомоморфно не отображается в крашенную алгебру (F, π) . Отметим еще, что в [12] на основе гомотопической техники F_∞ -дифференциалов было введено понятие дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями и доказана гомотопическая инвариантность структуры дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями. Здесь показано, что понятия дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями и дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями эквивалентны. Поэтому предложенное здесь доказательство гомотопической инвариантности структуры дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями является новым по сравнению с [12] доказательством гомотопической инвариантности структуры дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями. В третьем разделе вводится конструкция цепной реализации дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями, и определяется

тензорное произведение дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями. Показано, что каждая A_∞ -алгебра определяет тензорный дифференциальный модуль с ∞ -симплициальными гранями. Далее доказывается, что для любой A_∞ -алгебры цепная реализация ее тензорного дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями и B -конструкция для этой A_∞ -алгебры являются изоморфными дифференциальными коалгебрами.

Все рассматриваемые в этой работе модули и отображения модулей являются, соответственно, K -модулями и K -линейными отображениями модулей, где K – произвольное коммутативное кольцо с единицей.

1. Двойственные по Кошулю крашенные коалгебры к квадратичным крашенным алгебрам. Пусть I – множество целых неотрицательных чисел, каждый элемент которого называется *краской* или, по другому, называется *цветом*.

Крашенным красками из I дифференциальным модулем (X, d) или, более кратко, *крашенным дифференциальным модулем* называется любое семейство дифференциальных градуированных модулей

$$X = \{X(s, t)_m\}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad d: X(s, t)_\bullet \rightarrow X(s, t)_{\bullet-1},$$

индексированное всеми парами элементов $(s, t) \in I \times I$. В случае, когда для крашенного дифференциального модуля (X, d) выполнено условие $d = 0$ при всех $s, t \in I$, будем говорить, что задан крашенный градуированный модуль X .

Отображением крашенных дифференциальных модулей $f: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ называется произвольное семейство отображений дифференциальных градуированных модулей

$$f = \{f(s, t): (X(s, t), d) \rightarrow (Y(s, t), d)\}_{s, t \in I}.$$

Аналогично вводится понятие гомотопии $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$ между отображениями крашенных дифференциальных модулей $f, g: (X, d) \rightarrow (Y, d)$. Ясно, что крашенные дифференциальные модули и их отображения образуют категорию, в которой очевидным образом определены прямые суммы и прямые произведения объектов, ядра и коядра морфизмов, а также гомологии объектов.

Дифференциальным биградуированным модулем далее будем называть произвольный дифференциальный биградуированный модуль (X, d) , где

$$X = \{X_{n, m}\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad d: X_{*, \bullet} \rightarrow X_{*, \bullet-1}.$$

Для любых дифференциальных биградуированных модулей (X, d) и (Y, d) определен крашенный дифференциальный модуль

$$(\text{hom}(X; Y), d).$$

Элементами модуля $\text{hom}(X; Y)(s, t)_m$ являются произвольные отображения градуированных модулей $f: X_{t, \bullet} \rightarrow Y_{s, \bullet+m}$ степени $m \in \mathbb{Z}$, и для любых $s, t \in I$ дифференциал $d: \text{hom}(X; Y)(s, t)_\bullet \rightarrow \text{hom}(X; Y)(s, t)_{\bullet-1}$ задается на элементах $f \in \text{hom}(X; Y)(s, t)_m$ следующей формулой:

$$d(f) = df + (-1)^{s-t+m+1}fd: X_{t, \bullet} \rightarrow Y_{s, \bullet+m-1}.$$

Для любых крашенных градуированных модулей X и Y будем по определению считать, что $X(s, k)_p \otimes Y(l, t)_q = 0$, если $k \neq l$, $p, q \in \mathbb{Z}$, и, что $X(s, k)_p \otimes Y(l, t)_q$ – обычное тензорное произведение, если $k = l$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

Тензорным произведением крашенных дифференциальных модулей (X, d) и (Y, d) называется крашенный дифференциальный модуль $(X \otimes Y, d)$, для которого

$$(X \otimes Y)(s, t)_m = \bigoplus_{\substack{k, l \in I \\ p+q=m}} X(s, k)_p \otimes Y(l, t)_q = \bigoplus_{\substack{k \in I \\ p+q=m}} X(s, k)_p \otimes Y(k, t)_q,$$

и дифференциал $d: (X \otimes Y)(s, t)_\bullet \rightarrow (X \otimes Y)(s, t)_{\bullet-1}$ на произвольном элементе $x \otimes y \in X(s, l)_p \otimes Y(l, t)_q$, определяется следующей формулой:

$$d(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^{s-l+p} x \otimes d(y).$$

Крашенной дифференциальной алгеброй (A, d, π) называется любой крашенный дифференциальный модуль (A, d) , снабженный умножением $\pi: A \otimes A \rightarrow A$, которое является отображением крашенных дифференциальных модулей и удовлетворяет условию ассоциативности $\pi(\pi \otimes 1) = \pi(1 \otimes \pi)$. Если для крашенной дифференциальной алгебры (A, d, π) выполнено условие $d = 0$, то будем говорить, что задана крашенная градуированная алгебра (A, π) .

Отображением $f: (A', d, \pi) \rightarrow (A'', d, \pi)$ крашенных дифференциальных алгебр называется отображение $f: (A', d) \rightarrow (A'', d)$ крашенных дифференциальных модулей, для которого выполнено условие $\pi(f \otimes f) = f\pi$.

Единицей крашенной дифференциальной алгебры (A, d, π) называется семейство элементов $1_* = \{1_k\}_{k \in I}$, $1_k \in A(k, k)_0$, которые для каждого элемента $a \in A(s, t)_m$, $s, t \in I$, $m \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют условию $\pi(1_s \otimes a) = a = \pi(a \otimes 1_t)$.

Каноническим примером крашенной дифференциальной алгебры является крашенная дифференциальная алгебра $(\text{hom}(X; X), d, \pi)$, где $(\text{hom}(X; X), d)$ – рассмотренный выше крашенный дифференциальный модуль, определенный для любого дифференциального биградуированного модуля (X, d) . Умножение этой крашенной дифференциальной алгебры $\pi: \text{hom}(X; X) \otimes \text{hom}(X; X) \rightarrow \text{hom}(X; X)$ задается на произвольных элементах $g \in \text{hom}(X, X)(s, k)_n$ и $f \in \text{hom}(X, X)(l, t)_m$ следующим правилом:

$$\pi(g \otimes f) = \begin{cases} gf \in \text{hom}(X; X)(s, t)_{n+m}, & \text{если } k = l, \\ 0 \in \text{hom}(X; X)(s, t)_{n+m}, & \text{если } k \neq l, \end{cases}$$

где отображение $gf: X_{t,\bullet} \rightarrow X_{s,\bullet+n+m}$ является композицией $f: X_{t,\bullet} \rightarrow X_{(l=k),\bullet+m}$ и $g: X_{(k=l),\bullet} \rightarrow X_{s,\bullet+n}$. Ясно, что единицей крашенной дифференциальной алгебры $(\text{hom}(X, X), d, \pi)$ служит семейство элементов $1_* = \{1_s\}_{s \in I}$, где для каждого $s \in I$ элемент $1_s \in \text{hom}(X; X)(s, s)_0$ является тождественным отображением градуированного модуля $X_{s,\bullet}$.

Далее через K_I будем обозначать крашенный градуированный модуль, который определяется равенствами

$$\begin{aligned} K_I(s, s)_m &= K, & m = 0, & \quad s \in I, \\ K_I(s, s)_m &= 0, & m \neq 0, & \quad s \in I, \\ K_I(s, t)_m &= 0, & m \in \mathbb{Z}, & \quad s \neq t. \end{aligned}$$

Легко видеть, что умножение в кольце K позволяет рассматривать K_I крашенную градуированную алгебру (K_I, π) .

При помощи рассмотренной выше операции тензорного произведения крашенных градуированных модулей стандартным путем определяются понятия тензорной алгебры крашенного градуированного модуля, двустороннего идеала крашенной градуированной алгебры, порожденным подмодулем этой крашенной градуированной алгебры, и фактор-алгебры крашенной градуированной алгебры по двустороннему идеалу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Крашенная градуированная алгебра (A, π) с единицей называется *квадратичной крашенной градуированной алгеброй* или, более кратко, *квадратичной крашенной алгеброй*, если (A, π) изоморфна фактор-алгебре $R = T(M)/(Q)$, где $T(M)$ – тензорная алгебра некоторого крашенного градуированного модуля

$$M = \{M(s, t)_m\}_{s, t \in I}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m \geq 0,$$

и (Q) – двусторонний идеал крашенной градуированной алгебры $T(M)$, порожденный некоторым подмодулем Q крашенного градуированного модуля $M \otimes M \subset T(M)$.

Крашенной градуированной коалгеброй (C, ∇) называется крашенный градуированный модуль

$$C = \{C(s, t)_m\}_{s, t \in I}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m \geq 0,$$

рассматриваемый вместе с коумножением $\nabla: C \rightarrow C \otimes C$, которое является отображением крашенных градуированных модулей и удовлетворяет условию $(\nabla \otimes 1)\nabla = (1 \otimes \nabla)\nabla$. Крашенную градуированную коалгебру (C, ∇) , для которой выполнено условие $C_0 = (K_I)_0$ будем называть *связной крашенной градуированной коалгеброй*. Стандартным путем для крашенной градуированной коалгебры (C, ∇) определяются понятия коединицы $\varepsilon: C \rightarrow K_I$ и коаугментации $\nu: K_I \rightarrow C$.

Легко видеть, что коумножение крашенной градуированной коалгебры (C, ∇) с коединицей $\varepsilon: C \rightarrow K_I$ и коаугментацией определяет на крашенном градуированном модуле $\bar{C} = \ker(\varepsilon)$ коумножение $\bar{\nabla}: \bar{C} \rightarrow \bar{C} \otimes \bar{C}$, которое определяется для произвольного $c \in \bar{C}(s, t)$, $s, t \in I$, формулой $\bar{\nabla}(c) = \nabla(c) - (1_s \otimes c + c \otimes 1_t)$. Таким образом, для каждой крашенной градуированной коалгебры (C, ∇) с коединицей и коаугментацией всегда определена крашенная градуированная коалгебра $(\bar{C}, \bar{\nabla})$ без коединицы.

Настройкой над крашенным градуированным модулем M называется крашенный градуированный модуль SM , определяемый для произвольных $s, t \in I$ формулой $(SM)(s, t)_{m+1} = M(s, t)_m$. Элементы в SM традиционно обозначаются через $[x]$, где $x \in M$. Для любого подмодуля Q крашенного градуированного модуля $M \otimes M$ будем обозначать через $S^{\otimes 2}Q$ соответствующий Q подмодуль в крашенном градуированном модуле $SM \otimes SM$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Двойственной по Кошулю крашенной коалгеброй к квадратичной крашенной алгебре* $R = T(M)/(Q)$ называется крашенная градуированная коалгебра (R^1, ∇) с коединицей $\varepsilon: R^1 \rightarrow K_I$ и коаугментацией $\nu: K_I \rightarrow R^1$, определяемая следующими формулами:

$$R^1 = \bigoplus_{k \geq 0} (R^1)^{(k)}, \quad (R^1)^{(0)} = K_I, \quad (R^1)^{(1)} = SM,$$

$$(R^1)^{(k)} = \bigcap_{i+2+j=k} (SM)^{\otimes i} \otimes S^{\otimes 2}Q \otimes (SM)^{\otimes j}, \quad k \geq 2, \quad i \geq 0, \quad j \geq 0,$$

$$\nabla(1_s) = 1_s \otimes 1_s, \quad 1_s \in (R^1)^{(0)}(s, s)_0 = K_I(s, s)_0, \quad s \in I,$$

$$\nabla([x_1 \otimes \cdots \otimes x_k])$$

$$= 1_s \otimes [x_1, \dots, x_k] + [x_1, \dots, x_k] \otimes 1_t + \sum_{i=1}^{k-1} [x_1, \dots, x_i] \otimes [x_{i+1}, \dots, x_k],$$

$$[x_1, \dots, x_k] \in (R^1)^{(k)}(s, t), \quad s, t \in I,$$

$$\varepsilon(1_s) = 1_s, \quad \varepsilon([x_1, \dots, x_k]) = 0, \quad k \geq 1, \quad \nu(1_s) = 1_s,$$

где

$$[x_1, \dots, x_k] = [x_1] \otimes \cdots \otimes [x_k], \quad x_j \in F^1(s_j, t_j),$$

$$s_j, t_j \in I, \quad 1 \leq j \leq k, \quad s_1 = s, \quad t_k = t, \quad s_p = t_{p+1}, \quad 1 \leq p \leq k-1.$$

Рассмотрим теперь понятие ко- B -конструкции для связной крашенной градуированной коалгебры с коединицей и коаугментацией.

Денадстройкой над крашенным градуированным модулем M называется крашенный градуированный модуль $S^{-1}M$, определяемый для произвольных $s, t \in I$ формулой $(S^{-1}M)(s, t)_{m-1} = M(s, t)_m$. Элементы в $S^{-1}M$ традиционно обозначаются через $[x]$, где $x \in M$.

Пусть $(\overline{C}, \overline{\nabla})$ – крашенная градуированная коалгебра без коединицы, определяемая крашенной градуированной коалгеброй (C, ∇) с коединицей и коаугментацией. Под *ко- B -конструкцией* для крашенной градуированной коалгебры (C, ∇) понимается крашенная дифференциальная алгебра $(\Omega(C), d, \pi)$, определяемая следующими формулами:

$$\Omega(C) = \bigoplus_{k \geq 0} (S^{-1}\overline{C})^{\otimes k}, \quad (S^{-1}\overline{C})^{\otimes 0} = K_I,$$

$$d([c_1, \dots, c_k]) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i+\mu_i} [c_1, \dots, c_{i-1}, \overline{\nabla}(c_i), c_{i+1}, \dots, c_k],$$

$$\overline{\nabla}(c_i) = \sum c'_i \otimes c''_i, \quad \pi([c_1, \dots, c_q] \otimes [c_{q+1}, \dots, c_k]) = [c_1, \dots, c_q, c_{q+1}, \dots, c_k],$$

где

$$[c_1, \dots, c_k] = [c_1] \otimes \cdots \otimes [c_k], \quad c_j \in \overline{C}(s_j, t_j)_{q_j}, \quad s_j = t_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq k, \\ c'_i \in \overline{C}(s_i, t'_i)_{q'_i}, \quad \mu_i = s_1 - t'_i + q_1 + \cdots + q_{i-1} + q'_i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Скрещивающей коцепью из крашенной градуированной коалгебры (C, ∇) в крашенную дифференциальную алгебру (A, d, π) называется отображение крашенных градуированных модулей $\varphi: C_\bullet \rightarrow A_{\bullet-1}$ степени -1 , для которого выполнено условие скрещивающей коцепи $d\varphi + \varphi \cup \varphi = 0$, где отображение крашенных градуированных модулей $\varphi \cup \varphi: C_\bullet \rightarrow A_{\bullet-2}$ степени -2 определяется формулой $\varphi \cup \varphi = \pi(\varphi \otimes \varphi)\nabla$.

Простейшим примером скрещивающей коцепи из любой крашенной градуированной коалгебры (C, ∇) в крашенную дифференциальную алгебру $(\Omega(C), d, \pi)$ является отображение

$$\varphi^\Omega: C_\bullet \rightarrow \Omega(C)_{\bullet-1}, \quad \varphi^\Omega(c) = [c], \quad c \in C.$$

Для любой скрещивающей коцепи $\varphi: C_\bullet \rightarrow A_{\bullet-1}$ из крашенной связной градуированной коалгебры (C, ∇) с коединицей и коаугментацией в крашенную градуированную алгебру (A, π) определено отображение крашенных дифференциальных алгебр

$\Omega(\varphi): (\Omega(C), d, \pi) \rightarrow (A, d=0, \pi)$, задаваемое на образующих $[c_1, \dots, c_k]$ крашенного градуированного модуля $\Omega(C)$ следующей формулой:

$$\Omega(\varphi)([c_1, \dots, c_k]) = \pi^{(k)}(\varphi(c_1) \otimes \dots \otimes \varphi(c_k)),$$

где $\pi^{(1)}$ – тождественное отображение крашенной алгебры A и $\pi^{(k)} = \pi(1 \otimes \pi^{(k-1)})$, $k \geq 2$, – итерированное умножение крашенной алгебры (A, π) .

Рассмотрим теперь понятие дифференциального модуля над крашенной дифференциальной алгеброй.

Тензорным произведением крашенного дифференциального модуля (X, d) и дифференциального биградуированного модуля (Y, d) называется дифференциальный биградуированный модуль $(X \otimes Y, d)$, для которого

$$(X \otimes Y)_{n,m} = \bigoplus_{\substack{s \in I \\ p+q=m}} X(n, s)_p \otimes Y_{s,q}, \quad n \in I, \quad m \in \mathbb{Z},$$

и дифференциал $d: (X \otimes Y)_{n,\bullet} \rightarrow (X \otimes Y)_{n,\bullet-1}$ определяется на произвольном элементе $x \otimes y \in X(n, s)_p \otimes Y_{s,q}$ следующей формулой:

$$d(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^{n-s+p} x \otimes d(y).$$

Левым дифференциальным модулем (X, d, μ) над крашенной дифференциальной алгеброй (A, d, π) или, более кратко, *дифференциальным A -модулем* называется дифференциальный биградуированный модуль (X, d) , снабженный левым действием $\mu: A \otimes X \rightarrow X$, которое является отображением дифференциальных биградуированных модулей бистепени $(0, 0)$, и удовлетворяет условию $\mu(\pi \otimes 1) = \mu(1 \otimes \mu)$.

Легко видеть, что введение на произвольном дифференциальном биградуированном модуле (X, d) структуры дифференциального модуля (X, d, μ) над крашенной дифференциальной алгеброй (A, d, π) эквивалентно заданию некоторого отображения крашенных дифференциальных алгебр $\check{\mu}: (A, d, \pi) \rightarrow (\text{hom}(X; X), d, \pi)$. В самом деле, отображения μ и $\check{\mu}$ однозначно определяют друг друга по формуле $(\check{\mu}(a))(x) = \mu(a \otimes x)$, где $a \in A$, $x \in X$.

Заметим теперь, что для любой крашенной квадратичной алгебры (R, π) имеется скрепляющая коцепь $\varphi^!: R^!_{\bullet} \rightarrow R_{\bullet-1}$, задаваемая следующим правилом:

$$\varphi^!([x_1, \dots, x_k]) = \begin{cases} x_1, & \text{если } k = 1, \\ 0, & \text{если } k > 0, \end{cases}$$

где $(R^!, \nabla)$ – двойственная по Кошулю крашенная коалгебра к квадратичной крашенной алгебре (R, π) . Из этого следует, для каждой крашенной квадратичной алгебры (R, π) определено, как было сказано выше, отображение крашенных дифференциальных алгебр $\Omega(\varphi^!): (\Omega(R^!), d, \pi) \rightarrow (R, d=0, \pi)$. Ясно, что при помощи отображения $\Omega(\varphi^!)$ каждый дифференциальный R -модуль можно рассматривать как дифференциальный $\Omega(R^!)$ -модуль.

Для описания гомотопических свойств дифференциальных $\Omega(R^!)$ -модулей рассмотрим сначала крашенный вариант гомотопической техники дифференциальных модулей Ли над градуированными коалгебрами [10].

Пусть заданы любые дифференциальные биградуированные модули (X, d) , (Y, d) и крашенная градуированная коалгебра (C, ∇) . Рассмотрим соответствующий дифференциальным биградуированным модулям $(C \otimes X, 1 \otimes d)$, (Y, d) дифференциальный биградуированный модуль $(\text{Hom}(C \otimes X; Y), d)$ и определим для произвольных дифференциальных биградуированных модулей (X, d) , (Y, d) и (Z, d) отображение биградуированных модулей

$$\cup: (\text{Hom}(C \otimes Y; Z) \otimes \text{Hom}(C \otimes X; Y))_{*,\bullet} \rightarrow \text{Hom}(C \otimes X; Z)_{*,\bullet},$$

полагая

$$f \cup g = f(1 \otimes g)(\nabla \otimes 1),$$

где $f \in \text{Hom}(C \otimes Y; Z)$, $g \in \text{Hom}(C \otimes X; Y)$. Легко проверяется, что $\cup$ является отображением дифференциальных биградуированных модулей и обладает свойством ассоциативности, т.е. для любого $f \in \text{Hom}(C \otimes Y, Z)_{n,m}$ справедливы равенства

$$d(f \cup g) = d(f) \cup g + (-1)^{n+m} f \cup d(g), \quad (f \cup g) \cup l = f \cup (g \cup l).$$

Дифференциальным модулем Ли (X, d, ψ) над крашенной градуированной коалгеброй (C, ∇, ϑ) с коаугментацией $\nu: K \rightarrow C$ и коединицей или, более кратко, *дифференциальным C -модулем Ли* называется дифференциальный биградуированный модуль (X, d) , рассматриваемый вместе с отображением $\psi: (C \otimes X)_{*,\bullet} \rightarrow X_{*,\bullet-1}$, для которого выполнены следующие условия:

$$d(\psi) + \psi \cup \psi = 0, \quad \psi(\nu \otimes 1) = 0.$$

Морфизмом $f = (f', f''): (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ дифференциальных C -модулей Ли называется пара отображений $f': X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*,\bullet}$ и $f'': (C \otimes X)_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*,\bullet}$, где f' является отображением дифференциальных биградуированных модулей, и f'' удовлетворяет следующим условиям:

$$d(f'') - f'' \cup \psi + \psi \cup f'' - f' \psi + \psi(1 \otimes f') = 0, \quad f''(\nu \otimes 1) = 0.$$

Композиция $gf: (X, d, \psi) \rightarrow (Z, d, \psi)$ морфизмов дифференциальных C -модулей Ли $f = (f', f''): (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ и $g = (g', g''): (Y, d, \psi) \rightarrow (Z, d, \psi)$ определяется следующей формулой:

$$gf = (g', g'')(f', f'') = (g'f', g'' \cup f'' + g''(1 \otimes f') + g'f'').$$

Ясно, что операция композиции морфизмов дифференциальных C -модулей Ли ассоциативна, и что для каждого дифференциального C -модуля Ли (X, d, ψ) имеется тождественный морфизм $1_X = (1'_X, 1''_X): (X, d, \psi) \rightarrow (X, d, \psi)$, где $1'_X$ – тождественное отображение модуля X и $1''_X = 0$. Таким образом, дифференциальные C -модули Ли над любым коммутативным кольцом K с единицей и их морфизмы образуют категорию.

Гомотопией $h = (h', h''): (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ между морфизмами дифференциальных C -модулей Ли $f = (f', f''), g = (g', g''): (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ называется пара отображений $h': X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*,\bullet+1}$ и $h'': (C \otimes X)_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*,\bullet+1}$, где h' является гомотопией между отображениями дифференциальных биградуированных модулей f' и g' , и h'' удовлетворяет следующим условиям:

$$d(h'') + h'' \cup \psi + \psi \cup h'' + h' \psi + \psi(1 \otimes h') = f'' - g'', \quad h''(\nu \otimes 1) = 0.$$

Пусть заданы морфизмы $\eta: (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \psi): \xi$ дифференциальных C -модулей Ли, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и гомотопия $h: (X, d, \psi) \rightarrow (X, d, \psi)$ между морфизмами дифференциальных C -модулей Ли $\xi\eta$ и 1_X , для которой выполнены условия $\eta h = 0$, $\xi h = 0$, $hh = 0$. Каждая тройка $(\eta: (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \psi): \xi, h)$, удовлетворяющая перечисленным выше условиям, называется SDR-ситуацией дифференциальных C -модулей Ли.

Следующее утверждение, которое доказывается аналогично тому, как это сделано в [10] (см. также [13]) для коалгебр, не являющихся крашными, устанавливает гомотопическую инвариантность структуры дифференциального модуля Ли над любой крашенной градуированной коалгеброй при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных биградуированных модулей.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть задан любой дифференциальный модуль Ли (X, d, ψ) над крашенной связной градуированной коалгеброй (C, ∇) с коединицей и коаугментацией. Кроме того, пусть задана произвольная SDR-ситуация дифференциальных биградуированных модулей $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$. Тогда на дифференциальном биградуированном модуле (Y, d) имеется структура дифференциального C -модуля Ли $(Y, d, \bar{\psi})$, которая задается формулой

$$\bar{\psi} = \eta \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes \xi). \quad (1.1)$$

Более того, формулы

$$\bar{\xi}' = \xi, \quad \bar{\xi}'' = h \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes \xi), \quad (1.2)$$

$$\bar{\eta}' = \eta, \quad \bar{\eta}'' = \eta \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes h), \quad (1.3)$$

$$\bar{h}' = h, \quad \bar{h}'' = h \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes h). \quad (1.4)$$

определяют SDR-ситуацию $(\bar{\eta}: (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \bar{\psi}): \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных C -модулей Ли.

Далее ко- B -конструкцию $(\Omega(R^!), d, \pi)$ для двойственной по Кошулю крашенной коалгебры $(R^!, \nabla)$ к произвольной квадратичной крашенной алгебре (R, π) будем обозначать через (R_∞, d, π) .

Рассмотрим гомотопические свойства дифференциальных R_∞ -модулей. Легко видеть, что задание на произвольном дифференциальном биградуированном модуле (X, d) структуры дифференциального R_∞ -модуля (X, d, μ) эквивалентно заданию на (X, d) структуры дифференциального $R^!$ -модуля Ли (X, d, ψ) . Действительно, если задан дифференциальный R_∞ -модуль (X, d, μ) , то определен дифференциальный $R^!$ -модуль Ли (X, d, ψ_μ) , где $\psi_\mu = \mu(\varphi^\Omega \otimes 1): (R^! \otimes X)_{*, \bullet} \rightarrow X_{*, \bullet-1}$. Обратно, если задан дифференциальный $R^!$ -модуль Ли (X, d, ψ) , то его структурное отображение $\psi: (R^! \otimes X)_{*, \bullet} \rightarrow X_{*, \bullet-1}$ определяет скрепляющую коцепь $\tilde{\psi}: R^! \rightarrow \text{hom}(X; X)_{\bullet-1}$. Эта скрепляющая коцепь индуцирует отображение крашенных

дифференциальных алгебр $\check{\mu}_\psi = \Omega(\check{\psi}): \Omega(R^1) = R_\infty \rightarrow \text{hom}(X; X)$, которое, как было сказано выше, определяет структурное отображение $\mu_\psi: R_\infty \otimes X \rightarrow X$ дифференциального R_∞ -модуля (X, d, μ_ψ) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Под R_∞ -отображением $f: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ дифференциальных R_∞ -модулей далее будем понимать морфизм соответствующих дифференциальных R^1 -модулей Ли $f: (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Под R_∞ -гомотопией $h: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ между R_∞ -отображениями дифференциальных R_∞ -модулей $f, g: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ далее будем понимать гомотопию $h: (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$ между морфизмами соответствующих дифференциальных R^1 -модулей Ли $f, g: (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$.

Пусть заданы любые R_∞ -отображения $\eta: (X, d, \mu) \rightleftharpoons (Y, d, \mu): \xi$ дифференциальных R_∞ -модулей, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана R_∞ -гомотопия $h: (X, d, \mu) \rightarrow (X, d, \mu)$ между R_∞ -отображениями дифференциальных R_∞ -модулей $\xi\eta$ и 1_X , для которой выполнены условия

$$\eta h = 0, \quad \xi h = 0, \quad h h = 0.$$

Любую тройку $(\eta: (X, d, \mu) \rightleftharpoons (Y, d, \mu): \xi, h)$, удовлетворяющую указанным выше условиям, будем называть R_∞ -SDR-ситуацией дифференциальных R_∞ -модулей.

Следующее утверждение, которое является следствием теоремы 1.1, устанавливает R_∞ -гомотопическую инвариантность структуры дифференциального R_∞ -модуля при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных биградуированных модулей.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть заданы любые дифференциальный R_∞ -модуль (X, d, μ) и SDR-ситуация $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$ биградуированных дифференциальных модулей. Тогда на (Y, d) имеется структура дифференциального R_∞ -модуля $(Y, d, \mu_{\check{\psi}}^-)$, которая задается при помощи формулы (1.1). Более того, имеется R_∞ -SDR-ситуация дифференциальных R_∞ -модулей $(\bar{\eta}: (X, d, \mu) \rightleftharpoons (Y, d, \mu_{\check{\psi}}^-): \bar{\xi}, \bar{h})$, которая определяется при помощи формул (1.2)–(1.4) и продолжает заданную SDR-ситуацию $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$.

2. Дифференциальные модули с ∞ -симплициальными гранями. Пусть (F, π) – крашенная градуированная K -алгебра, образующими которой являются элементы $\partial_i^n \in F(n-1, n)_0$, $n-1 \in I$, $i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq i \leq n$, связанные между собой симплициальными коммутационными соотношениями

$$\partial_i^{n-1} \partial_j^n = \partial_{j-1}^{n-1} \partial_i^n, \quad i < j, \quad n-1 \in I,$$

где $\partial_i^{n-1} \partial_j^n = \pi(\partial_i^{n-1} \otimes \partial_j^n)$. Далее крашенную градуированную алгебру (F, π) будем называть *крашенной алгеброй симплициальных граней*.

Легко видеть, что крашенная алгебра симплициальных граней (F, π) является квадратичной. В самом деле, рассмотрим сначала крашенный градуированный модуль M , для которого

$$\begin{aligned} M(s, t)_m &= 0 & \text{при } s, t \in I, \quad m > 0, \\ M(s, t)_0 &= 0 & \text{при } (s, t) \neq (n-1, n), \quad n-1 \in I, \end{aligned}$$

и $M(n-1, n)_0$ – свободный K -модуль с образующими ∂_i^n , где $n-1 \in I$, $0 \leq i \leq n$. Рассмотрим теперь подмодуль Q крашенного градуированного модуля $M \otimes M$, для которого

$$\begin{aligned} Q(s, t)_m &= 0 & \text{при } s, t \in I, \quad m > 0, \\ Q(s, t)_0 &= 0 & \text{при } (s, t) \neq (n-2, n), \quad n-2 \in I, \end{aligned}$$

и $Q(n-2, n)_0$ – свободный K -модуль с образующими $\partial_i^{n-1} \otimes \partial_j^n - \partial_{j-1}^{n-1} \otimes \partial_i^n$, где $n-2 \in I$, $0 \leq i < j \leq n$. Ясно, что крашенная алгебра симплициальных граней (F, π) изоморфна фактор-алгебре $T(M)/(Q)$ и, следовательно, (F, π) является квадратичной крашенной алгеброй.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Дифференциальным модулем с симплициальными гранями* будем называть любой дифференциальный (X, d, μ) над крашенной алгеброй симплициальных граней (F, π) . *Отображением* $f: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ дифференциальных модулей с симплициальными гранями будем называть любое отображение дифференциальных биградуированных модулей $f: (X, d) \rightarrow (Y, d)$, для которого выполнено условие $f\mu = \mu(1_F \otimes f)$. *Гомотопией* между отображениями $f, g: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ дифференциальных модулей с симплициальными гранями будем называть любую гомотопию $h: X_{*, \bullet} \rightarrow Y_{*, \bullet+1}$ между отображениями дифференциальных биградуированных модулей $f, g: (X, d) \rightarrow (Y, d)$, для которой выполнено условие $h\mu = \mu(1_F \otimes h)$.

Легко видеть, что задание дифференциального модуля с симплициальными гранями (X, d, μ) эквивалентно заданию дифференциального биградуированного модуля (X, d) вместе с семейством отображений модулей $\check{\mu}(\partial_i^n) = \partial_i: X_{n, \bullet} \rightarrow X_{n-1, \bullet}$, $0 \leq i \leq n$, которые являются отображениями дифференциальных модулей, т.е. удовлетворяют условию $d\partial_i + \partial_i d = 0$, и для которых выполнены симплициальные коммутационные соотношения

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i: X_{n, \bullet} \rightarrow X_{n-2, \bullet}, \quad 0 \leq i < j \leq n. \quad (2.1)$$

Указанные выше отображения дифференциальных модулей ∂_i называются *симплициальными гранями дифференциального биградуированного модуля* (X, d) .

Отметим, что различие между понятием дифференциального модуля с симплициальными гранями и понятием симплициального дифференциального модуля, т.е. симплициального объекта в категории дифференциальных модулей (см., например, [7]), заключается в том, что для дифференциальных модулей с симплициальными гранями не предполагается наличия симплициальных операторов вырождений.

Проведем теперь некоторые рассуждения, необходимые для введения понятия дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями.

Пусть задано произвольное целое число $n \geq 0$. Любой набор целых неотрицательных чисел $(i_1, \dots, i_k)$, где $0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, далее будем называть *упорядоченным набором*. Пусть Σ_k – симметрическая группа перестановок множества из k элементов. Для произвольной перестановки $\sigma \in \Sigma_k$ рассмотрим набор $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$, где σ действует на набор $(i_1, \dots, i_k)$ обычным образом, т.е. путем перестановки чисел из этого набора местами. Для указанного набора $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k))$ определим набор чисел

$$(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)}), \quad \widehat{\sigma(i_s)} = \sigma(i_s) - \alpha(\sigma(i_s)), \quad 1 \leq s \leq k,$$

и $\alpha(\sigma(i_s))$ – количество чисел из набора $(\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_s), \dots, \sigma(i_k))$, стоящих справа от числа $\sigma(i_s)$ и меньших его.

Рассмотрим двойственную по Кошулю крашенную коалгебру $(F^!, \nabla)$ к крашенной алгебре симплициальных граней (F, π) . Легко видеть, что образующими свободного K -модуля $(F^!)^{(k)}(n-k, n)_k$, $k \geq 1$, $n-k \in I$, являются элементы

$$[\partial_{i_1}^{n-k+1}] \hat{\wedge} \dots \hat{\wedge} [\partial_{i_k}^n] = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} (-1)^{\text{sign}(\sigma)+1} [\partial_{\widehat{\sigma(i_1)}}^{n-k+1}, \dots, \partial_{\widehat{\sigma(i_k)}}^n], \quad 0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

и, что

$$(F^!)(k)(s, t)_m = 0, \quad (s, t) \neq (n-k, n), \quad m \neq k, \quad n-k \in I.$$

Аналогично стандартному вычислению коумножения в двойственной по Кошулю коалгебре к симметрической алгебре градуированного векторного пространства (см. например [9]), получаем, что коумножение ∇ крашенной градуированной коалгебры $F^!$ задается на образующих $[\partial_{i_1}^{n-k+1}] \hat{\wedge} \dots \hat{\wedge} [\partial_{i_k}^n]$ модуля $(F^!)^{(k)}(n-k, n)_k$, $k \geq 1$, $n-k \in I$, следующей формулой:

$$\begin{aligned} \nabla([\partial_{i_1}^{n-k+1}] \hat{\wedge} \dots \hat{\wedge} [\partial_{i_k}^n]) \\ = 1_{n-k} \otimes ([\partial_{i_1}^{n-k+1}] \hat{\wedge} \dots \hat{\wedge} [\partial_{i_k}^n]) + ([\partial_{i_1}^{n-k+1}] \hat{\wedge} \dots \hat{\wedge} [\partial_{i_k}^n]) \otimes 1_n \\ + \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)+1} ([\partial_{\widehat{\sigma(i_1)}}^{n-k+1}] \hat{\wedge} \dots \hat{\wedge} [\partial_{\widehat{\sigma(i_m)}}^{n-k+m}]) \otimes ([\partial_{\widehat{\sigma(i_{m+1})}}^{n-k+m+1}] \hat{\wedge} \dots \hat{\wedge} [\partial_{\widehat{\sigma(i_k)}}^n]), \end{aligned}$$

где I_σ – множество всех разбиений набора чисел $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$ на два упорядоченных набора чисел $(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})$ и $(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})$, $1 \leq m \leq k-1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Крашенную дифференциальную алгебру $(\Omega(F^!), d, \pi)$ далее будем обозначать через (F_∞, d, π) и называть *крашенной алгеброй ∞ -симплициальных граней*.

Легко видеть, что образующими крашенной алгебры (F_∞, π) являются элементы

$$\partial_{(i_1, \dots, i_k)}^n = [[\partial_{i_1}^{n-k+1}] \hat{\wedge} \dots \hat{\wedge} [\partial_{i_k}^n]] \in F_\infty(n-k, n)_{k-1}, \quad 0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \quad n-k \in I,$$

которые связаны между собой соотношениями

$$d(\partial_{(i_1, \dots, i_k)}^n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)+1} \partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})}^{n-(k-m)} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})}^n, \quad (2.2)$$

где

$$\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} = \pi(\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \otimes \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})})$$

и I_σ такое же как в формуле для коумножения крашенной коалгебры $(F^!, \nabla)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Дифференциальным модулем с ∞ -симплициальными гранями будем называть любой дифференциальный модуль (X, d, μ) над крашенной алгеброй ∞ -симплициальных граней (F_∞, d, π) . Морфизмами $f: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями считаются F_∞ -отображения дифференциальных F_∞ -модулей. Под *гомотопией* между морфизмами дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями $f, g: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$

будем понимать любую F_∞ -гомотопию $h: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ между F_∞ -отображениями f и g дифференциальных F_∞ -модулей. SDR-ситуацией дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями будем называть любую F_∞ -SDR-ситуацию дифференциальных F_∞ -модулей.

Применение теоремы 1.2 к крашенной алгебре симплициальных граней (F, π) дает следующее утверждение, в котором устанавливается гомотопическая инвариантность структуры дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных биградуированных модулей.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть заданы любые дифференциальный модуль с ∞ -симплициальными гранями (X, d, μ) и SDR-ситуация $(\eta: (X, d) \rightleftarrows (Y, d): \xi, h)$ биградуированных дифференциальных модулей. Тогда на (Y, d) имеется структура дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями $(Y, d, \mu_{\overline{\varphi}})$, которая задается при помощи формулы (1.1) и, кроме того, имеется SDR-ситуация дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями $(\overline{\eta}: (X, d, \mu) \rightleftarrows (Y, d, \mu_{\overline{\varphi}}): \overline{\xi}, \overline{h})$, которая определяется при помощи формул (1.2)–(1.4) и продолжает заданную SDR-ситуацию $(\eta: (X, d) \rightleftarrows (Y, d): \xi, h)$.

Рассмотрим теперь связь между введенным выше понятием дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями и введенным в [12] понятием дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями. Напомним, что дифференциальным модулем с гомотопическими симплициальными гранями (X, d, ∂) называется любой дифференциальный биградуированный модуль (X, d) , рассматриваемый вместе с семейством отображений модулей

$$\tilde{\partial} = \{\partial_{(i_1, \dots, i_k)}: X_{n, \bullet} \rightarrow X_{n-k, \bullet+k-1}\}, \quad i_1, \dots, i_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n,$$

для которых выполнены следующие соотношения:

$$d(\partial_{(i_1, \dots, i_k)}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)+1} \partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})}. \quad (2.3)$$

Видно, что задание дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями (X, d, μ) эквивалентно заданию дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$, где структурное отображение $\mu: F_\infty \otimes X \rightarrow X$ и семейство отображений $\tilde{\partial} = \{\partial_{(i_1, \dots, i_k)}\}$ определяют друг друга по следующей формуле:

$$\partial_{(i_1, \dots, i_k)} = \check{\mu}(\partial_{(i_1, \dots, i_k)}^n): X_{n, \bullet} \rightarrow X_{n-k, \bullet+k-1}, \quad n \geq 0. \quad (2.4)$$

Далее любой дифференциальный модуль с ∞ -симплициальными гранями (X, d, μ) будем отождествлять с соответствующим ему дифференциальным модулем с гомотопическими симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$. Указанные выше отображения модулей $\partial_{(i_1, \dots, i_k)}$ будем называть ∞ -симплициальными гранями дифференциального биградуированного модуля (X, d) . Отметим, что при $k = 1$ соотношения (2.3) имеют вид $d(\partial_{(i)}) = 0$. Это говорит о том, что все ∞ -симплициальные грани $\partial_{(i)}$ являются отображениями дифференциальных модулей. При $k = 2$ соотношения (2.3) записываются в виде

$$d(\partial_{(i,j)}) = \partial_{(j-1)} \partial_{(i)} - \partial_{(i)} \partial_{(j)}, \quad i < j.$$

Это означает, что ∞ -симплициальная грань $\partial_{(i,j)}$ является гомотопией между отображениями дифференциальных модулей $\partial_{(j-1)}\partial_{(i)}$, $\partial_{(i)}\partial_{(j)}$. Таким образом, ∞ -симплициальные грани $\partial_{(i)}$ удовлетворяют с точностью до гомотопии симплициальным коммутационным соотношениям (2.1).

В заключение раздела отметим, что при помощи формул, аналогичных формуле (2.4), введенные выше понятия морфизма, гомотопии и SDR-ситуации для дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями отождествляются, соответственно, с введенными в [12] понятиями морфизма, гомотопии и SDR-ситуации для дифференциальных модулей с гомотопическими симплициальными гранями. После указанных отождествлений теорема 2.1 становится теоремой о гомотопической инвариантности структуры дифференциального модуля с гомотопическими симплициальными гранями [12].

3. Цепная реализация дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями и B -конструкция для A_∞ -алгебр. Обозначим для крашенной алгебры ∞ -симплициальных граней (F_∞, d, π) через $(F_\infty[n]_{m,\bullet}, d)$ дифференциальный градуированный модуль $(F_\infty(m, n)_\bullet, d)$. Легко видеть, что для любого $n \geq 0$ дифференциальный биградуированный модуль $(F_\infty[n], d)$,

$$F_\infty[n] = \{F_\infty[n]_{m,p}\}, \quad m \geq 0, \quad p \geq 0, \quad d: F_\infty[n]_{m,\bullet} \rightarrow F_\infty[n]_{m,\bullet-1},$$

имеет структуру дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями

$$\tilde{\partial} = \{\partial_{(i_1, \dots, i_k)} : F_\infty[n]_{m,\bullet} \rightarrow F_\infty[n]_{m-k, \bullet+k-1}\},$$

которые определяются на произвольном элементе $a \in F_\infty[n]_{m,\bullet} = F_\infty(m, n)_\bullet$ следующим равенством:

$$\partial_{(i_1, \dots, i_k)}(a) = \pi(\partial_{(i_1, \dots, i_k)}^m \otimes a), \quad \partial_{(i_1, \dots, i_k)}^m \in F_\infty(m-k, m)_{k-1}.$$

Также легко видеть, что для дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями $(F_\infty[n], d, \tilde{\partial})$ соответствующий ему дифференциальный F_∞ -модуль $(F_\infty[n], d, \mu)$ является свободным биградуированным модулем $(F_\infty[n], \mu)$ над крашенной градуированной алгеброй (F_∞, π) с одной образующей $1_n \in F_\infty[n]_{n,0} = F_\infty(n, n)_0$, и дифференциал $d: F_\infty[n]_{m,\bullet} \rightarrow F_\infty[n]_{m,\bullet-1}$ полностью определяется дифференциалом в (F_∞, d, π) и равенством $d(1_n) = 0$, т.е. задается на произвольных элементах $\mu(a \otimes 1_n) \in F_\infty[n]$ формулой $d(\mu(a \otimes 1_n)) = \mu(d(a) \otimes 1_n)$.

Пусть теперь задан произвольный дифференциальный модуль с ∞ -симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$. Рассмотрим для любого фиксированного элемента $x \in X_{n,q}$ отображение биградуированных модулей $\bar{x}: F_\infty[n]_{*,\bullet} \rightarrow X_{*,\bullet+q}$, задаваемое на произвольном элементе $a \in F_\infty[n]_{m,p}$ формулой

$$\bar{x}(a) = (-1)^{(p+m)q} \mu(a \otimes x), \quad (3.1)$$

где (X, d, μ) – дифференциальный F_∞ -модуль, соответствующий дифференциальному модулю с ∞ -симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$. Из определения дифференциала в тензорном произведении крашенного дифференциального модуля и дифференциального биградуированного модуля следует, что для указанного выше отображения $\bar{x}: F_\infty[n]_{*,\bullet} \rightarrow X_{*,\bullet+q}$, рассматриваемого как элемент $\bar{x} \in \text{Hom}(F_\infty[n]; X)_{0,q}$ дифференциального биградуированного модуля $(\text{Hom}(F_\infty[n]; X), d)$, справедлива следующая формула:

$$d(\bar{x}) = (-1)^n \overline{d(x)}. \quad (3.2)$$

Из этой формулы получаем, что для каждого цикла $x \in X_{n,q}$ дифференциального биградуированного модуля (X, d) отображение $\bar{x}$ является отображением дифференциальных биградуированных модулей $\bar{x}: (F_\infty[n]_{*,\bullet}, d) \rightarrow (X_{*,\bullet+q}, d)$ бистепени $(0, q)$, т.е. удовлетворяет условию $d\bar{x} = (-1)^q \bar{x}d$.

Рассмотрим для любого дифференциального F_∞ -модуля (X, d, μ) и произвольных элементов $a \in F_\infty(s, m)_t = F_\infty[m]_{s,t}$, $x \in X_{m,p}$ элемент $\mu(a \otimes x) \in X_{s,t+p}$ и, кроме того, рассмотрим соответствующие указанным выше элементам отображения

$$\begin{aligned} \bar{a}: F_\infty[s]_{*,\bullet} &\rightarrow F_\infty[m]_{*,\bullet+t}, & \bar{x}: F_\infty[m]_{*,\bullet} &\rightarrow X_{*,\bullet+p}, \\ \overline{\mu(a \otimes x)}: F_\infty[s]_{*,\bullet} &\rightarrow X_{*,\bullet+t+p}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что из (3.1) следует справедливость следующего соотношения:

$$\overline{\mu(a \otimes x)} = (-1)^{tp} \bar{x}\bar{a}. \quad (3.3)$$

В частности, если в качестве дифференциального F_∞ -модуля (X, d, μ) взять дифференциальный F_∞ -модуль $(F_\infty[n], d, \mu)$, то соотношение (3.3) для указанного выше элемента $\mu(a \otimes x) = \pi(a \otimes x) = ax$ запишется в виде соотношения

$$\bar{a}\bar{x} = (-1)^{tp} \bar{x}\bar{a}. \quad (3.3')$$

При помощи формулы (3.1) получаем, что для любого элемента $x \in X_{n,q}$ соответствующее ему отображение $\bar{x}: F_\infty[n]_{*,\bullet} \rightarrow X_{*,\bullet+q}$ связано с ∞ -симплициальными гранями $\partial_{(i_1, \dots, i_k)}$ на $F_\infty[n]$ и на X формулой

$$\partial_{(i_1, \dots, i_k)} \bar{x} = (-1)^q \bar{x} \partial_{(i_1, \dots, i_k)}. \quad (3.4)$$

Из (3.4) следует, что для каждого элемента $x \in X_{n,q}$ соответствующее ему отображение $\bar{x}$ полностью определяется своим значением на образующей $1_n \in F_\infty[n]_{n,0}$, т.е. полностью определяется равенством $\bar{x}(1_n) = (-1)^{nq}x$.

Рассмотрим теперь для каждого элемента $\partial_{(i_1, \dots, i_k)}^n \in F_\infty[n]_{n-k, k-1}$ соответствующее ему отображение

$$\delta^{(i_1, \dots, i_k)} = (-1)^{n-k} \overline{\partial_{(i_1, \dots, i_k)}^n}: F_\infty[n-k]_{*,\bullet} \rightarrow F_\infty[n]_{*,\bullet+k-1}.$$

Отображения $\delta^{(i_1, \dots, i_k)}$ далее будем называть ∞ -косимплициальными кограницами семейства $F_\infty[*] = \{(F_\infty[n], d, \partial)\}_{n \geq 0}$ дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями. Из формул (2.4), (3.2) и (3.3') следует, что ∞ -косимплициальные кограни семейства $F_\infty[*]$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$d(\delta^{(i_1, \dots, i_k)}) = \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma) + k(m-1)} \delta^{(\sigma(\widehat{i_{m+1}}), \dots, \sigma(\widehat{i_k}))} \delta^{(\sigma(\widehat{i_1}), \dots, \sigma(\widehat{i_m}))}, \quad (3.5)$$

где I_σ такое же, как в формуле (2.4).

Напомним [14], что D_∞ -модулем называется любой биградуированный модуль $X = \{X_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, рассматриваемый вместе с семейством отображений модулей

$$\{d^k: X_{*,\bullet} \rightarrow X_{*-k, \bullet+k-1} \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\},$$

которые для каждого целого числа $k \geq 0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\sum_{i+j=k} d^i d^j = 0. \quad (3.6)$$

Определим для произвольного дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$ семейство отображений

$$\{d^k: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-k,\bullet+k-1}\}, \quad k, n \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 0, \quad n \geq 0,$$

полагая

$$\begin{aligned} d^0 &= d: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n,\bullet-1}, \\ d^k &= 0: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-k,\bullet+k-1}, & k > n, \\ d^k &= \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k} \partial_{(i_1, \dots, i_k)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-k,\bullet+k-1}, & k \leq n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Так как для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_k$ чисел $i_1 < \dots < i_k$ справедливо равенство

$$\widehat{\sigma(i_1)} + \dots + \widehat{\sigma(i_k)} = \sigma(i_1) + \dots + \sigma(i_k) - I(\sigma),$$

где $I(\sigma) = \alpha(\sigma(i_1)) + \dots + \alpha(\sigma(i_k))$ – число инверсий перестановки σ , при помощи очевидного сравнения $\text{sign}(\sigma) \equiv I(\sigma) \pmod{2}$ и формулы (2.3) легко проверяется, что для отображений из семейства (3.7) выполнены соотношения (3.6). Таким образом, для каждого дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$ определен по формулам (3.7) соответствующий ему D_∞ -модуль (X, d^k) .

Рассмотрим теперь для каждого дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$ соответствующий ему D_∞ -модуль (X, d^k) и определим дифференциальный градуированный модуль $(\bar{X}, \partial)$, полагая

$$\bar{X}_n = \bigoplus_{s+t=n} X_{s,t}, \quad \partial = \sum_{k \geq 0} d^k: \bar{X}_\bullet \rightarrow \bar{X}_{\bullet-1}.$$

Легко видеть, что из соотношений (3.6) следует равенство $\partial\partial = 0$. В частности, для каждого дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями $(F_\infty[n], d, \tilde{\partial})$, $n \geq 0$, определен дифференциальный модуль $(F_\infty[n], \partial)$. Рассмотренное выше отображение $\bar{x}: F_\infty[n]_{*,\bullet} \rightarrow X_{*,\bullet+q}$, соответствующее произвольному элементу $x \in X_{n,q}$, индуцируют отображение градуированных модулей $\bar{x}: \bar{F}_\infty[n]_\bullet \rightarrow \bar{X}_{\bullet+q}$ степени q , для которого, в силу равенства (3.4), выполнено соотношение $\partial(\bar{x}) = d(\bar{x})$. В частности, для ∞ -косимплициальных кограней $\delta^{(i_1, \dots, i_k)}: F_\infty[n-k]_{*,\bullet} \rightarrow F_\infty[n]_{*,\bullet+k-1}$, $k \geq 2$, индуцированные ими отображения $\delta^{(i_1, \dots, i_k)}: \bar{F}_\infty[n-k]_\bullet \rightarrow \bar{F}_\infty[n]_{\bullet+k-1}$ не являются отображениями дифференциальных модулей, поскольку

$$\partial(\delta^{(i_1, \dots, i_k)}) = d(\delta^{(i_1, \dots, i_k)}) \neq 0.$$

Пусть теперь задан любой дифференциальный модуль с ∞ -симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$. Рассмотрим для каждого фиксированного целого числа $n \geq 0$ тензорное произведение $(\bar{F}_\infty[n]_\bullet \otimes X_{n,\bullet}, d)$ дифференциальных модулей $(\bar{F}_\infty[n]_\bullet, \partial)$ и $(X_{n,\bullet}, d)$. Прямые вычисления показывают, что дифференциал в прямой сумме

дифференциальных градуированных модулей $\bigoplus_{n \geq 0} (\overline{F_\infty[n]}_\bullet \otimes X_{n,\bullet}, d)$ индуцирует корректно определенный дифференциал в фактор-модуле $\bigoplus_{n \geq 0} (\overline{F_\infty[n]}_\bullet \otimes X_{n,\bullet}) / \sim$ градуированного модуля $\bigoplus_{n \geq 0} (\overline{F_\infty[n]}_\bullet \otimes X_{n,\bullet})$ по отношению эквивалентности $\sim$, порожденному следующими соотношениями:

$$\delta_{(i_1, \dots, i_k)}(a) \otimes x \sim (-1)^{s(k-1)+(n+q)k} a \otimes \partial_{(i_1, \dots, i_k)}(x), \quad (3.8)$$

где $a \in \overline{F_\infty[n-k]}_s$, $x \in X_{n,q}$ – произвольные элементы и $(i_1, \dots, i_k)$ – любой упорядоченный набор чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Цепной реализацией дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$ будем называть дифференциальный градуированный модуль $(|X|, d)$, определяемый как дифференциальный фактор-модуль*

$$(|X|, d) = \bigoplus_{n \geq 0} (\overline{F_\infty[n]}_\bullet \otimes X_{n,\bullet}, d) / \sim$$

по отношению эквивалентности $\sim$, порожденному соотношениями (3.8).

Рассмотрим дифференциальный модуль $(|X|, d)$ более детально. Так как $F_\infty[n]$ является свободным F_∞ -модулем с образующей 1_n , из легко проверяемого равенства $\delta_{(i_1, \dots, i_k)}(1_{n-k}) = (-1)^{(n-k)k} \partial_{(i_1, \dots, i_k)}(1_n)$ и формул (3.4), (3.8) следует, что для любых элементов $a = \partial_{(i_1, \dots, i_s)} \dots \partial_{(j_1, \dots, j_t)}(1_n) \in \overline{F_\infty[n]}$ и $x \in X_{n,\bullet}$ справедливо соотношение

$$a \otimes x \sim (-1)^\varepsilon 1_m \otimes \partial_{(i_1, \dots, i_s)} \dots \partial_{(j_1, \dots, j_t)}(x),$$

где знак $(-1)^\varepsilon$ вычисляется при помощи (3.4) и (3.8). В частности, пользуясь равенством $d(1_n) = 0$, получаем, что для каждого элемента $x \in X_{n,q}$ имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \partial(1_n) \otimes x &= \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k} \partial_{(i_1, \dots, i_k)}(1_n) \otimes x \\ &\sim \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + n(k-1) + (q-1)k} 1_{n-k} \otimes \partial_{(i_1, \dots, i_k)}(x). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Рассмотрим для $(X, d, \tilde{\partial})$ соответствующий ему D_∞ -модуль (X, d^k) и определим новый D_∞ -модуль $(X, \bar{d}^k)$, полагая $\bar{d}^k(x) = (-1)^{n(k-1) + (q-1)k} d^k(x)$, $k \geq 0$, $x \in X_{n,q}$. Так как

$$\begin{aligned} \sum_{i+j=k} \bar{d}^i \bar{d}^j(x) &= \sum_{i+j=k} (-1)^{(n-j)(i-1) + (q+j-2)i} d^i (-1)^{n(j-1) + (q-1)j} d^j(x) \\ &= \sum_{i+j=k} (-1)^{(n+q)(i+j)} d^i d^j(x) = (-1)^{(n+q)k} \sum_{i+j=k} d^i d^j(x) = 0, \quad x \in X_{n,q}, \end{aligned}$$

то $(X, \bar{d}^k)$ действительно является D_∞ -модулем и, следовательно, для $(X, \bar{d}^k)$ определен дифференциальный модуль $(\bar{X}, \bar{\partial})$, дифференциал $\bar{\partial}: \bar{X}_\bullet \rightarrow \bar{X}_{\bullet-1}$ которого задается на произвольных элементах $x \in X_{n,q} \subset \bar{X}_{n+q}$ формулой

$$\bar{\partial}(x) = \sum_{k \geq 0} \bar{d}^k(x) = (-1)^n d(x) + \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-1)^{i_1 + \dots + i_k + n(k-1) + (q-1)k} \partial_{(i_1, \dots, i_k)}(x)$$

и продолжается на любые элементы модуля $\overline{X}$ по линейности. Далее элементы $x \in X_{n,q} \subset \overline{X}_{n+q}$ будем обозначать через $[x]$. Заметим, что каждый класс эквивалентности $[a \otimes x] \in |X|$ является линейной комбинацией классов эквивалентности вида $[1_n \otimes y]$, где элементы $y \in X_{n,\bullet}$ однозначно определяются по соотношениям (3.4) и (3.8). Рассмотрим отображение градуированных модулей $F: |X|_\bullet \rightarrow \overline{X}_\bullet$, которое задается на произвольных элементах $[1_n \otimes x]$, где $x \in X_{n,q}$, равенством $F([1_n \otimes x]) = [x]$ и продолжается на любые элементы модуля $|X|$ по линейности. Ясно, что отображение F является изоморфизмом градуированных модулей. Более того, из соотношений (3.9) следует, что F является изоморфизмом дифференциальных модулей $F: (|X|, d) \rightarrow (\overline{X}, \tilde{\partial})$.

Покажем теперь, что каждая A_∞ -алгебра (A, d, π_n) определяет некоторый дифференциальный модуль с ∞ -симплициальными гранями $(T(A), d, \tilde{\partial})$. Напомним [5] (см. также [6], [2]), что A_∞ -алгеброй (A, d, π_n) называется дифференциальный модуль (A, d) ,

$$A = \{A_n\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad d: A_\bullet \rightarrow A_{\bullet-1},$$

рассматриваемый вместе с семейством отображений

$$\{\pi_n: (A^{\otimes(n+2)})_\bullet \rightarrow A_{\bullet+n} \mid n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\},$$

удовлетворяющих для любых целых $n \geq -1$ следующим соотношениям:

$$d(\pi_{n+1}) = \sum_{m=0}^n \sum_{t=1}^{m+2} (-1)^{t(n-m+1)+n+1} \pi_m(\underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{t-1} \otimes \pi_{n-m} \otimes \underbrace{1 \otimes \cdots \otimes 1}_{m-t+2}), \quad (3.10)$$

где $d(\pi_{n+1}) = d\pi_{n+1} + (-1)^n \pi_{n+1}d$. Рассмотрим для любой A_∞ -алгебры (A, d, π_n) дифференциальный биградуированный модуль $(T(A), d)$, где

$$T(X) = \{T(A)_{n,m}\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0,$$

определяется равенствами

$$\begin{aligned} T(A)_{n,m} &= (A^{\otimes n})_m, & n > 0, \quad m > 0, \\ T(A)_{0,0} &= K, \\ T(A)_{n,0} &= 0, & n > 0, \\ T(A)_{0,m} &= 0, & m > 0, \end{aligned}$$

и дифференциал $d: T(A)_{n,\bullet} \rightarrow T(A)_{n,\bullet-1}$ — обычный дифференциал в тензорном произведении.

Определим семейство отображений $\tilde{\partial} = \{\partial_{(i_1, \dots, i_k)}^n: T(A)_{n,q} \rightarrow T(A)_{n-k, q+k-1}\}$, где $n \geq 0$, $q \geq 0$ и $0 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, полагая

$$\partial_{(i_1, \dots, i_k)}^n = \begin{cases} (-1)^{k(q-1)} 1^{\otimes(j-1)} \otimes \pi_{k-1} \otimes 1^{\otimes(n-k-j)}, & \text{если } 1 \leq j \leq n-k \text{ и } (i_1, \dots, i_k) = (j, j+1, \dots, j+k-1), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.11)$$

ТЕОРЕМА 3.1. Для любой A_∞ -алгебры (A, d, π_n) тройка $(T(A), d, \tilde{\partial})$ является дифференциальным модулем с ∞ -симплициальными гранями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется проверить справедливость соотношений (2.3) для семейства отображений

$$\tilde{\partial} = \{\partial_{(i_1, \dots, i_k)}^n : T(A)_{n,q} \rightarrow T(A)_{n-k, q+k-1}\},$$

определяемых формулой (3.11). Проверим сначала выполнение соотношений (2.3) для отображений

$$\partial_{(1,2,\dots,n+2)}^{n+3} = (-1)^{(n+2)(q-1)} \pi_{n+1} : (A^{\otimes(n+3)})_q \rightarrow A_{q+n+1}, \quad n \geq -1.$$

Ясно, что при $n = -1$ условие (2.3) для $\partial_{(1)}^2 = (-1)^{q-1} \pi_0$ выполнено, поскольку из равенства $d(\pi_0) = d\pi_0 - \pi_0 d = 0$ получаем

$$d(\partial_{(1)}^2) = d\partial_{(1)}^2 + \partial_{(1)}^2 d = (-1)^{q-1} d(\pi_0) = 0.$$

Пусть теперь $n \geq 0$. Заметим, что для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_{n+2}$ чисел $1, \dots, n+2$ всегда выполнено условие $\widehat{\sigma(1)} = 1$. Действительно, в наборе $(\sigma(1), \dots, \sigma(n+2))$ все числа, меньшие числа $\sigma(1)$, стоят справа от $\sigma(1)$ и количество таких чисел равно $\alpha(\sigma(1)) = \sigma(1) - 1$. Из условия $\widehat{\sigma(1)} = 1$ и формулы (3.11) следует, что соотношения (2.3) в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$d(\partial_{(1,2,\dots,n+2)}^{n+3}) = \sum_{m=0}^n \sum_{t=1}^{m+2} (-1)^{\text{sign}(\sigma_{t,m})+1} \partial_{(1,2,\dots,m+1)}^{m+2} \partial_{(t,t+1,\dots,t+n-m)}^{n+3}, \quad (3.12)$$

где $d(\partial_{(1,2,\dots,n+2)}^{n+3}) = d\partial_{(1,2,\dots,n+2)}^{n+3} + \partial_{(1,2,\dots,n+2)}^{n+3} d$ и $\sigma_{t,m} \in \Sigma_{n+2}$ – перестановка чисел $1, \dots, n+2$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma_{t,m}(1)} &= 1, & \widehat{\sigma_{t,m}(2)} &= 2, & \dots, & \widehat{\sigma_{t,m}(m+1)} &= m+1, \\ \widehat{\sigma_{t,m}(m+2)} &= t, & \widehat{\sigma_{t,m}(m+3)} &= t+1, & \dots, & \widehat{\sigma_{t,m}(n+2)} &= t+n-m. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что $\sigma_{t,m}$ является перестановкой, которая действует на набор $(1, 2, \dots, n+2)$ путем разбиения этого набора на три блока

$$(1, 2, \dots, t-1 \mid t, t+1, \dots, t+n-m \mid t+n-m+1, \dots, n+2)$$

и переставлением второго и третьего блоков местами. Из этого следует, что число инверсий $I(\sigma_{t,m})$ перестановки $\sigma_{t,m}$ равно произведению длин второго и третьего блоков из указанного выше разбиения, т.е. $I(\sigma_{t,m}) = (n-m+1)(m-t+2)$. Умножая теперь левую и правую части равенства (3.10) на $(-1)^{(n+2)(q-1)}$ и учитывая сравнение $I(\sigma_{t,m}) \equiv \text{sign}(\sigma_{t,m}) \pmod{2}$, получим при помощи (3.11) соотношения (3.12). Аналогично проверяется справедливость соотношений (2.3) для произвольных отображений $\partial_{(j,j+1,\dots,j+k-1)}^n$, где $k \geq 1$ и $1 \leq j \leq n-k$. Рассмотрим теперь случай отображений $\partial_{(i_1,\dots,i_k)}^n$, когда упорядоченный набор $(i_1, \dots, i_k)$ не является набором чисел вида $(j, j+1, \dots, j+k-1)$, где $k \geq 1$ и $1 \leq j \leq n-k$. В этом случае соотношения (2.3) требуют проверки только для тех наборов $(i, \dots, i_k)$, которые имеют вид

$$(j, j+1, \dots, j+l-1, t, t+1, \dots, t+m-1), \quad l \geq 1, \quad m \geq 1, \quad l+m = k, \quad j+l < t,$$

поскольку в противном случае левая и правая части соотношений (2.3) равны нулю. Для наборов указанного вида соотношения (2.3) записываются как соотношения

$$\begin{aligned} d(\partial_{(j,j+1,\dots,j+l-1,t,t+1,\dots,t+m-1)}^n) \\ = 0 = -\partial_{(j,j+1,\dots,j+l-1)}^{n-m} \partial_{(t,t+1,\dots,t+m-1)}^n \\ + (-1)^{lm+1} \partial_{(t-l,t+1-l,\dots,t+m-1-l)}^{n-l} \partial_{(j,j+1,\dots,j+l-1)}^n, \end{aligned}$$

справедливость которых легко следует из очевидных равенств

$$\begin{aligned} & (\underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{j-1} \otimes \pi_{l-1} \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-m-j-l}) (\underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{t-1} \otimes \pi_{m-1} \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-m-t}) \\ & = (-1)^{(m-1)(l-1)} (\underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{t-l-1} \otimes \pi_{m-1} \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-m-t}) (\underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{j-1} \otimes \pi_{l-1} \otimes \underbrace{1 \otimes \dots \otimes 1}_{n-l-j}), \end{aligned}$$

где $l \geq 1$, $m \geq 1$, $j + l < t$.

Рассмотрим для любой A_∞ -алгебры (A, d, π_n) цепную реализацию $(|T(A)|, d)$ соответствующего этой A_∞ -алгебре дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями $(T(A), d, \tilde{\partial})$. Как сказано выше, дифференциальный модуль $(|T(A)|, d)$ отождествляется при помощи изоморфизма F с дифференциальным модулем $(\overline{T(A)}, \bar{\partial})$, где $\overline{T(A)}_m = \bigoplus_{n+q=m} (A^{\otimes n})_q$ и дифференциал $\bar{\partial}: \overline{T(A)}_\bullet \rightarrow \overline{T(A)}_{\bullet-1}$ задается на образующих $[a_1 \otimes \dots \otimes a_n] \in \overline{T(A)}_{n+q}$ модуля $\overline{T(A)}$ следующей формулой:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}([a_1 \otimes \dots \otimes a_n]) & = (-1)^n \sum_{i=1}^n (-1)^\varepsilon [a_1 \otimes \dots \otimes d(a_i) \otimes \dots \otimes a_n] \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-k} (-1)^{k(k-1)/2 + ik + n(k-1) + \varepsilon(k-1)} \\ & \quad \times [a_1 \otimes \dots \otimes \pi_{k-1}(a_i \otimes \dots \otimes a_{i+k}) \otimes \dots \otimes a_n], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\varepsilon = \deg(a_1) + \dots + \deg(a_{i-1})$.

Перейдем к определению на дифференциальном модуле $(|T(A)|, d)$, где (A, d, π_n) – произвольная A_∞ -алгебра, структуры дифференциальной коалгебры $(|T(A)|, d, \nabla)$. Для этого введем сначала конструкцию тензорного произведения дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Тензорным произведением $(X \otimes Y, d, \tilde{\partial})$ дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$ и $(Y, d, \tilde{\partial})$ будем называть тензорное произведение $(X \otimes Y, d)$ дифференциальных биградуированных модулей (X, d) и (Y, d) , которое рассматривается вместе с семейством ∞ -симплициальных граней $\tilde{\partial} = \{\partial_{(i_1, \dots, i_k)} : (X \otimes Y)_{n, \bullet} \rightarrow (X \otimes Y)_{n-k, \bullet+k-1}\}$, задаваемых на произвольном элементе $x \otimes y \in X_{q,s} \otimes Y_{l,t}$ следующим правилом:

$$\partial_{(i_1, \dots, i_k)}(x \otimes y) = \begin{cases} \partial_{(i_1, \dots, i_k)}(x) \otimes y, & 0 \leq i_1 < \dots < i_k < q, \\ 0, & 0 \leq i_1 < \dots < i_k = q, \\ (-1)^{(k-1)q+s} x \otimes \partial_{(i_1-q, \dots, i_k-q)}(y), & q < i_1 < \dots < i_k \leq q+l, \\ 0, & 0 \leq i_1 \leq q < i_k \leq q+l. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3.2. *Тензорное произведение дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями является дифференциальным модулем с ∞ -симплициальными гранями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется проверить справедливость соотношений (2.3) для ∞ -симплициальных граней в тензорном произведении $(X \otimes Y, d, \tilde{\partial})$ дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями $(X, d, \tilde{\partial})$ и $(Y, d, \tilde{\partial})$.

Рассмотрим случай $0 \leq i_1 < \dots < i_k < q$. В этом случае для любого элемента $x \otimes y \in X_{q,s} \otimes Y_{l,t}$ имеем

$$\begin{aligned}
 & (d(\partial_{(i_1, \dots, i_k)}))(x \otimes y) \\
 &= d(\partial_{(i_1, \dots, i_k)}(x \otimes y)) + (-1)^{-k+(k-1)+1} \partial_{(i_1, \dots, i_k)}(d(x \otimes y)) \\
 &= d(\partial_{(i_1, \dots, i_k)}(x) \otimes y) + \partial_{(i_1, \dots, i_k)}(d(x) \otimes y + (-1)^{q+s} x \otimes d(y)) \\
 &= d(\partial_{(i_1, \dots, i_k)}(x)) \otimes y + (-1)^{q+s-1} \partial_{(i_1, \dots, i_k)}(x) \otimes d(y) \\
 &\quad + \partial_{(i_1, \dots, i_k)}(d(x)) \otimes y + (-1)^{q+s} \partial_{(i_1, \dots, i_k)}(x) \otimes d(y) \\
 &= (d(\partial_{(i_1, \dots, i_k)}))(x) \otimes y \\
 &= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)+1} \partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} (x) \otimes y \\
 &= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)+1} (\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \otimes 1) (\partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} \otimes 1) (x \otimes y) \\
 &= \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)+1} \partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} (x \otimes y).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $0 \leq i_1 < \dots < i_k = q$. В этом случае для произвольного элемента $x \otimes y \in X_{q,s} \otimes Y_{l,t}$ по определению ∞ -симплициальных граней в тензорном произведении имеем $(d(\partial_{(i_1, \dots, i_k)}))(x \otimes y) = 0$. Требуется теперь проверить, что в рассматриваемом случае для любого элемента $x \otimes y \in X_{q,s} \otimes Y_{l,t}$ справедливо равенство

$$\sum_{\sigma \in \Sigma_k} \sum_{I_\sigma} (-1)^{\text{sign}(\sigma)+1} \partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} (x \otimes y) = 0.$$

Покажем, что каждое слагаемое в левой части этого равенства является нулевым. Действительно, пусть для слагаемого $\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} (x \otimes y)$ перестановка $\sigma \in \Sigma_k$ является такой, что

$$i_k = q \in \{\sigma(i_{m+1}), \dots, \sigma(i_k)\}.$$

Покажем, что в этом случае $\widehat{\sigma(i_k)} = q$. Предположим от противного, что $\widehat{\sigma(i_k)} < q$. Тогда получаем $\sigma(i_k) < q$, поскольку $\widehat{\sigma(i_k)} = \sigma(i_k)$. Так как для ∞ -симплициальной грани $\partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})}$ выполнено условие $0 \leq \widehat{\sigma(i_{m+1})} < \dots < \widehat{\sigma(i_k)} < q$, имеем

$$\widehat{\sigma(i_{k-p})} < q - p, \quad 0 \leq p \leq k - (m + 1).$$

Так как

$$\widehat{\sigma(i_{k-p})} = \sigma(i_{k-p}) - \alpha(\sigma(i_{k-p})), \quad 0 \leq \alpha(\sigma(i_{k-p})) \leq p,$$

получаем

$$\sigma(i_{k-p}) < q, \quad 0 \leq p \leq k - (m + 1),$$

что противоречит условию $q \in \{\sigma(i_{m+1}), \dots, \sigma(i_k)\}$. Таким образом, сделанное предположение о том, что $\widehat{\sigma(i_k)} < q$, является неверным и, следовательно, $\widehat{\sigma(i_k)} = q$. Из этого получаем, что в рассматриваемом случае для произвольного слагаемого

$$\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} (x \otimes y), \quad x \otimes y \in X_{q,s} \otimes Y_{l,t},$$

справедливо равенство $\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} (x \otimes y) = 0$, поскольку $\widehat{\sigma(i_k)} = q$.

Пусть теперь для слагаемого $\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} (x \otimes y)$ перестановка $\sigma \in \Sigma_k$ является такой, что $i_k = q \in \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_m)\}$. Покажем, что в этом случае

$$\widehat{\sigma(i_m)} = q - (k - m).$$

Предположим от противного, что $\widehat{\sigma(i_m)} < q - (k - m)$. Тогда получаем $\sigma(i_m) < q$, поскольку

$$\widehat{\sigma(i_m)} = \sigma(i_m) - \alpha(\sigma(i_m)), \quad 0 \leq \alpha(\sigma(i_m)) \leq k - m.$$

Так как для ∞ -симплициальной грани $\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})}$ выполнено условие $0 \leq \widehat{\sigma(i_1)} < \dots < \widehat{\sigma(i_m)} < q$, имеем

$$\widehat{\sigma(i_p)} < q - (k - p), \quad 1 \leq p \leq m.$$

Так как

$$\widehat{\sigma(i_p)} = \sigma(i_p) - \alpha(\sigma(i_p)), \quad 0 \leq \alpha(\sigma(i_p)) \leq k - p,$$

получаем $\sigma(i_p) < q$, $1 \leq p \leq m$, что противоречит условию $q \in \{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_m)\}$. Таким образом, сделанное предположение о том, что $\widehat{\sigma(i_m)} < q - (k - m)$, является неверным и, следовательно, $\widehat{\sigma(i_m)} = q - (k - m)$. Из этого получаем, что в рассматриваемом случае для произвольного слагаемого

$$\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} (x \otimes y), \quad x \otimes y \in X_{q,s} \otimes Y_{l,t},$$

справедливо равенство $\partial_{(\widehat{\sigma(i_1)}, \dots, \widehat{\sigma(i_m)})} \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} (x \otimes y) = 0$, поскольку $\widehat{\sigma(i_m)} = q - (k - m)$ и

$$\partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} (x \otimes y) = \partial_{(\widehat{\sigma(i_{m+1})}, \dots, \widehat{\sigma(i_k)})} (x) \otimes y \in X_{q-(k-m), s+(k-m)-1} \otimes Y_{l,t}.$$

Рассмотрение случаев $q < i_1 < \dots < i_k \leq q + l$ и $0 \leq i_1 \leq q < i_k$ проводится аналогично.

Докажем теперь при помощи конструкции тензорного произведения дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.3. *Для любой A_∞ -алгебры (A, d, π_n) цепная реализация $(|T(A)|, d)$ дифференциального F_∞ -модуля $(T(A), d, \tilde{\partial})$, рассматриваемая вместе с коумножением $\nabla: |T(A)| \rightarrow |T(A)| \otimes |T(A)|$, которое задается на образующих формулой*

$$\begin{aligned} \nabla([1_n \otimes (a_1 \otimes \dots \otimes a_n)]) \\ = \sum_{i=0}^n (-1)^{(n-i)\varepsilon_i} [1_i \otimes (a_1 \otimes \dots \otimes a_i)] \otimes [1_{n-i} \otimes (a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n)], \end{aligned}$$

где $\varepsilon_i = \deg(a_1) + \dots + \deg(a_i)$, является дифференциальной коалгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что коумножение ∇ ассоциативно. Покажем, что ∇ является отображением дифференциальных модулей. Для дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями $(T(A), d, \bar{\partial})$ рассмотрим дифференциальный модуль с ∞ -симплициальными гранями $(T(A), d', \tilde{\partial}')$, определяемый равенствами $d' = (-1)^n d: T(A)_{n, \bullet} \rightarrow T(A)_{n, \bullet-1}$ и

$$\tilde{\partial}' = \{\partial'_{(i_1, \dots, i_k)} = (-1)^{n(k-1)+k(q-1)} \partial_{(i_1, \dots, i_k)}: T(A)_{n, q} \rightarrow T(A)_{n-k, q+k-1}\}.$$

Доказательство того, что тройка $(T(A), d', \tilde{\partial}')$ является дифференциальным модулем с ∞ -симплициальными гранями аналогична доказательству теоремы 3.1. Прямые вычисления показывают, что семейство отображений

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} &= \{\Delta_{(i_1, \dots, i_k)}: T(A)_{n, \bullet} \rightarrow (T(A) \otimes T(A))_{n-k, \bullet+k}\}, \quad \Delta_{(i_1, \dots, i_k)} = 0, \quad k \geq 1, \\ \Delta_{(\cdot)}(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) &= \sum_{i=0}^n (-1)^{(n-i)\varepsilon_i} (a_1 \otimes \dots \otimes a_i) \otimes (a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_i = \deg(a_1) + \dots + \deg(a_i)$, является морфизмом дифференциальных модулей с ∞ -симплициальными гранями

$$\tilde{\Delta}: (T(A), d', \tilde{\partial}') \rightarrow (T(A), d', \tilde{\partial}') \otimes (T(A), d', \tilde{\partial}') = (T(A) \otimes T(A), d', \tilde{\partial}').$$

Из этого следует, что отображение биградуированных модулей $\Delta_{(\cdot)}$ индуцирует отображение $\Delta: (\overline{T(A)}, \partial') \rightarrow (\overline{T(A)} \otimes \overline{T(A)}, \partial')$ дифференциальных модулей. Заметим теперь, используя формулу (3.11), что для ∞ -симплициальных граней

$$\partial'_{(i_1, \dots, i_k)}: T(A)_{n, \bullet} \rightarrow T(A)_{n-k, \bullet+k-1}$$

при $i_1 = 0$ или $i_k = n$ выполнено условие $\partial'_{(i_1, \dots, i_k)} = 0$. Из этого условия имеем равенство дифференциальных модулей $(\overline{T(A)} \otimes \overline{T(A)}, \partial') = (\overline{T(A)}, \partial') \otimes (\overline{T(A)}, \partial')$. При помощи этого равенства, а также учитывая равенство $(\overline{T(A)}, \partial') = (\overline{T(A)}, \bar{\partial})$, получаем отображение дифференциальных модулей $\Delta: (\overline{T(A)}, \bar{\partial}) \rightarrow (\overline{T(A)}, \bar{\partial}) \otimes \overline{T(A)}, \bar{\partial})$, которое задается на образующих следующей формулой:

$$\Delta([a_1 \otimes \dots \otimes a_n]) = \sum_{i=0}^n (-1)^{(n-i)\varepsilon_i} [a_1 \otimes \dots \otimes a_i] \otimes [a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n]. \quad (3.14)$$

Очевидно, что Δ удовлетворяет условию $(\Delta \otimes 1)\Delta = (1 \otimes \Delta)\Delta$. Если теперь рассмотреть изоморфизм $F: (|T(A)|, d) \rightarrow (\overline{T(A)}, \bar{\partial})$, $F([1_n \otimes x]) = [x]$, дифференциальных модулей, то легко видеть, что для указанного в формулировке теоремы отображения ∇ справедливо равенство $\nabla = (F^{-1} \otimes F^{-1})\Delta F$ и, следовательно, ∇ является отображением дифференциальных модулей. Кроме того, из этого равенства следует, что изоморфизм дифференциальных модулей F является изоморфизмом дифференциальных коалгебр $F: (|T(A)|, d, \nabla) \rightarrow (\overline{T(A)}, \bar{\partial}, \Delta)$.

Дифференциальная коалгебра $(\overline{T(A)}, \bar{\partial}, \Delta)$ хорошо известна [6] как B -конструкция $(B(A), d, \Delta)$ для A_∞ -алгебры (A, d, π_n) . Таким образом, показано, что B -конструкция $(B(A), d, \Delta)$ для A_∞ -алгебры (A, d, π_n) является с точностью до изоморфизма дифференциальных коалгебр цепной реализацией тензорного дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями $(T(A), d, \tilde{\partial})$, определяемого данной A_∞ -алгеброй (A, d, π_n) .

В заключение раздела стоит отметить, что если A_∞ -алгебра (A, d, π_n) является дифференциальной ассоциативной алгеброй (A, d, π) , где $\pi_0 = \pi$ и $\pi_n = 0$, $n > 0$, то $(\overline{T(A)}, \overline{\partial}, \Delta)$ является обычной B -конструкцией $(B(A), d, \Delta)$ для алгебры (A, d, π) , и знаки в формулах (3.13) и (3.14) для этой B -конструкции совпадают со знаками, предложенным в работе [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Смирнов, “Гомотопическая теория коалгебр”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:6 (1985), 1302–1321.
- [2] В. А. Смирнов, “Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 80–96.
- [3] С. В. Лапин, “Продолжение операции умножения в E_∞ -алгебрах до A_∞ -морфизма E_∞ -алгебр и картановские объекты в категории алгебр Мэя”, *Матем. заметки*, **89**:5 (2011), 719–737.
- [4] С. П. Новиков, “О когомологиях алгебры Стиррода”, *Докл. АН СССР*, **128**:5 (1959), 893–895.
- [5] J. D. Stasheff, “Homotopy associativity of H -spaces. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108**:2 (1963), 275–292; “Homotopy associativity of H -spaces. II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108**:2 (1963), 293–312.
- [6] Т. В. Кадеишвили, “К теории гомологии расслоенных пространств”, *УМН*, **35**:3 (1980), 183–188.
- [7] В. А. Смирнов, *Симплициальные и операдные методы в алгебраической топологии*, Факториал, М., 2002.
- [8] С. В. Лапин, “ D_∞ -дифференциальные A_∞ -алгебры и спектральные последовательности”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 119–142.
- [9] J.-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads*, Grundlehren Math. Wiss., **346**, Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [10] В. А. Смирнов, “Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 121–154.
- [11] С. В. Лапин, “Дифференциальные модули Ли над искривленными крашными коалгебрами и ∞ -симплициальные модули”, *Матем. заметки*, **96**:5 (2014), 709–731.
- [12] С. В. Лапин, “Гомотопические симплициальные грани и гомологии реализаций симплициальных топологических пространств”, *Матем. заметки*, **94**:5 (2013), 661–681.
- [13] С. В. Лапин, “Гомотопические свойства дифференциальных модулей Ли над искривленными коалгебрами и двойственность по Кошулю”, *Матем. заметки*, **94**:3 (2013), 354–372.
- [14] С. В. Лапин, “Дифференциальные возмущения и D_∞ -дифференциальные модули”, *Матем. сб.*, **192**:11 (2001), 55–76.

С. В. Лапин
г. Саранск
E-mail: slapin@mail.ru

Поступило
15.11.2013
Исправленный вариант
23.01.2015