Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Заболоцкий, М. Н. Шеремета, О медленном возрастании основных характеристик целых функций, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 206–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1042>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:46:55

УДК 517.547.2

О МЕДЛЕННОМ ВОЗРАСТАНИИ ОСНОВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Н. В. Заболоцкий, М. Н. Шеремета

В терминах коэффициентов разложения целой функции в ряд получено необходимое и достаточное условие медленного роста на бесконечности.

Библиография: 5 названий.

1. Введение и формулировка основных результатов. Пусть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

– целая трансцендентная функция с нулями в точках $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Для простоты, а это не уменьшает общности, будем считать, что $a_0 \neq 0$, т.е. $\lambda_k \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Основными характеристиками функции (1) являются $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, максимальный член $\mu(r, f) = \max\{|a_n| r^n : n \geq 0\}$, неванлинновские характеристическая функция

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$$

и считающая функция нулей

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad n(t) = \sum_{|\lambda_n| \leq t} 1.$$

Возрастающая непрерывная на $[0, +\infty)$ функция L называется *медленно возрастающей*, если для каждого $c \in (0, +\infty)$ выполняется $L(cr) \sim L(r)$ при $r \rightarrow \infty$.

Целые (а также мероморфные) функции, у которых неванлинновская характеристика является медленно возрастающей, имеют достаточно интересные и специфические свойства, исследованию которых посвящено много работ (укажем здесь только на статьи [1]–[3]). Поэтому естественной является проблема описания медленного возрастания указанных выше характеристик в терминах коэффициентов a_n и нулей λ_k .

Хорошо известно [4, с. 40], что если $r_0 < r < R < \infty$, то

$$T(r, f) \leq \ln M(r, f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, f). \quad (2)$$

Поэтому, если

$$T(r, f) = (1 + o(1))L(r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3)$$

и функция L медленно возрастающая, то при $R = cr$, $c > 1$, из (2) имеем

$$1 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, f)}{L(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M(r, f)}{L(r)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{c+1}{c-1} \frac{L(cr)}{L(r)} = \frac{c+1}{c-1}.$$

Так как $(c+1)/(c-1) \rightarrow 1$ при $c \rightarrow \infty$, отсюда следует, что

$$\ln M(r, f) = (1 + o(1))L(r), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Несложно также показать, используя неравенство (2), что если имеет место (4), где L — медленно возрастающая функция, то выполнено (3). Отсюда следует, что $T(r, f)$ является медленно возрастающей функцией тогда и только тогда, когда $\ln M(r, f)$ — медленно возрастающая функция.

Далее, если хотя бы одна из функций $\ln M(r, f)$ или $\ln \mu(r, f)$ является медленно возрастающей, то f имеет нулевой порядок возрастания. Тогда [5, с. 17] выполняется $\ln M(r, f) \sim \ln \mu(r, f)$ при $r \rightarrow \infty$.

Таким образом, функции $T(r, f)$, $\ln M(r, f)$ и $\ln \mu(r, f)$ являются или не являются медленно возрастающими одновременно.

Функция $N(r, 1/f)$ стоит несколько особняком от этой цепочки, на что указывает пример функции $f(z) = (z-1)e^z$, для которой $N(r, 1/f) = \ln r$, $r \geq 1$, является медленно возрастающей функцией, а $\ln M(r, f)$ таковой не является. Однако если $N(r, 1/f)$ и $N(r, 1/(f-a))$, $a \neq 0$, — медленно возрастающие функции, то и $\ln M(r, f)$ — также медленно возрастающая функция, так как из второй основной теоремы Неванлинны (см., например, [4, с. 58]) следует, что f имеет нулевой порядок роста, а в этом случае [2] $\ln M(r, f) \sim N(r, 1/f)$, $r \rightarrow \infty$.

Однако, изучение медленного возрастания $N(r, 1/f)$ можно также свести к изучению медленного возрастания логарифма максимального члена некоторой другой целой функции. Действительно, нетрудно показать (и это хорошо известно), что если $|\lambda_n| \leq r \leq |\lambda_{n+1}|$, то

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) = \sum_{k=1}^n \ln \frac{1}{|\lambda_k|} + n \ln r.$$

С другой стороны, функция

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{|\lambda_k|} \right) z^n \quad (5)$$

в силу монотонного стремления $|\lambda_k|$ к ∞ является целой и

$$\ln \mu(r, \tilde{f}) = \ln \prod_{k=1}^n \frac{1}{|\lambda_k|} + n \ln r,$$

если только $|\lambda_n| \leq r \leq |\lambda_{n+1}|$. Таким образом, $N(r, 1/f) = \ln \mu(r, \tilde{f})$ и проблема медленного возрастания основных характеристик целой функции сводится к проблеме медленного возрастания логарифма максимального члена степенного разложения этой функции, а решением последней является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть f — целая функция, заданная рядом (1), и

$$\kappa(n, m) = \frac{\ln |a_m| - \ln |a_n|}{n - m}.$$

Для того чтобы функция $\ln \mu(r, f)$ была медленно возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы существовала возрастающая последовательность (n_k) натуральных чисел такая, что

$$\kappa(n_{k+1}, n_k) > \kappa(n_k, n_{k-1}), \quad k \geq 2, \quad (6)$$

$$\kappa(n_{k+1}, n_k) \leq \kappa(n, n_k), \quad n_k < n < n_{k+1}, \quad (7)$$

$$\kappa(n_{k+1}, n_k) - \frac{1}{n_{k+1}} \ln \frac{1}{|a_{n_{k+1}}|} \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Пусть α — неотрицательная, непрерывная, возрастающая к $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функция такая, что $x\alpha(x)$ — выпуклая функция, а B_α — класс целых трансцендентных функций (1) таких, что $\ln |a_n| \leq -n\alpha(n)$, $n \geq n_0$. Естественным является вопрос о том, при каких условиях на функцию α для каждой $f \in B_\alpha$ функция $\ln M(r, f)$ является медленно возрастающей. Используя теорему 1, мы доказываем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы функция $\ln M(r, f)$ была медленно возрастающей для любой функции $f \in B_\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = c > 0. \quad (9)$$

Заметим, что достаточность в теореме 2 имеет место и без условия выпуклости функции $x\alpha(x)$.

Доказательство теоремы 1 и ее аналога для считающей функции $N(r, 1/f)$ проведем в п. 2. В п. 3 мы докажем теорему 2, одно дополнение к ней и соответствующие аналогии для некоторого класса целых функций, определенного условием на нули. Наконец, в п. 4 сформулируем одну не решенную нами задачу.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\nu(r, f) = \max\{n \geq 0 : |a_n r^n| = \mu(r, f)\}$ — центральный индекс ряда (1). Тогда [5, с. 13]

$$\ln \mu(2r, f) - \ln \mu(r, f) = \int_r^{2r} \frac{\nu(t, f)}{t} dt, \quad r > 0,$$

откуда

$$\nu(r, f) \ln 2 \leq \ln \mu(2r, f) - \ln \mu(r, f) \leq \nu(2r, f) \ln 2,$$

т.е.

$$\frac{\ln \mu(2r, f)}{\ln \mu(r, f)} - 1 \geq \frac{\nu(r, f)}{\ln \mu(r, f)} \ln 2 > 0, \quad (10)$$

$$0 < 1 - \frac{\ln \mu(r, f)}{\ln \mu(2r, f)} \leq \frac{\nu(2r, f)}{\ln \mu(2r, f)} \ln 2. \quad (11)$$

Из (10) следует, что если функция $\ln \mu(r, f)$ медленно возрастает, то $\nu(r, f) / \ln \mu(r, f) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, а из (11) получаем обратное утверждение.

Таким образом, для того чтобы функция $\ln \mu(r, f)$ была медленно возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\ln \mu(r, f)}{\nu(r, f)} \rightarrow +\infty \quad r \rightarrow \infty. \quad (12)$$

В плоскости XOY рассмотрим множество точек $\{(n, -\ln |a_n|)\}$ и построим его выпуклую оболочку. Предположим, что уравнение границы этой оболочки, которая является ломаной, имеет вид $y = g(x)$. Положим $c_n = e^{-g(n)}$ и рассмотрим целую функцию

$$\hat{f}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_n z^n.$$

Функция $\hat{f}(z)$ называется *мажорантой Ньютона* для функции f . Хорошо известно, что $\ln \mu(r, \hat{f}) = \ln \mu(r, f)$ и $\nu(r, \hat{f}) = \nu(r, f)$.

Пусть (n_k) – произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел, а

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}.$$

Если последовательность (n_k) удовлетворяет условиям (6) и (7), то функции F и f имеют одну и ту же мажоранту Ньютона. Действительно, пусть $y = g_1(x)$ – граница выпуклой оболочки множества точек $\{(n_k, -\ln |a_{n_k}|)\}$. Тогда из (6) следует, что все точки $(n_k, -\ln |a_{n_k}|)$ являются вершинами ломаной $y = g_1(x)$. Уравнение отрезка, который соединяет точки $(n_k, -\ln |a_{n_k}|)$ и $(n_{k+1}, -\ln |a_{n_{k+1}}|)$, имеет вид

$$\frac{y + \ln |a_{n_k}|}{x - n_k} = \varkappa(n_{k+1}, n_k),$$

и из (7) видно, что для всех $n_k < n < n_{k+1}$ точки $(n, -\ln |a_n|)$ лежат не ниже этого отрезка. Отсюда следует, что $g_1(x) = g(x)$ на $[n_k, n_{k+1}]$. Поэтому мажоранты функций F и f совпадают и, таким образом, $\ln \mu(r, F) = \ln \mu(r, f)$, $\nu(r, F) = \nu(r, f)$. Если теперь

$$\varkappa(n_k, n_{k-1}) \leq \ln r < \varkappa(n_{k+1}, n_k), \quad (13)$$

то $\nu(r, F) = n_k$ и $\ln \mu(r, F) = \ln |a_{n_k}| + n_k \ln r$. Учитывая (8), имеем

$$\frac{\ln \mu(r, F)}{\nu(r, F)} = \ln r - \frac{1}{n_k} \ln \frac{1}{|a_{n_k}|} \geq \varkappa(n_k, n_{k-1}) - \frac{1}{n_k} \ln \frac{1}{|a_{n_k}|} \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

т.е. $\ln \mu(r, F)$ – медленно возрастающая функция. Достаточность условий (6)–(8) доказана.

Докажем теперь необходимость. Пусть $(n_k, -\ln |a_{n_k}|)$ – вершины ломаной (диаграммы Ньютона) $y = g(x)$. Тогда ясно, что для последовательности (n_k) выполняются условия (6) и (7), а для значений $\ln r$ из (13), как выше, учитывая (12), имеем

$$\frac{\ln \mu(r, f)}{\nu(r, f)} = \ln r - \frac{1}{n_k} \ln \frac{1}{|a_{n_k}|} \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty.$$

Полагая здесь $\ln r = \varkappa(n_k, n_{k-1})$, получим (8). Теорема 1 полностью доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если коэффициенты целой функции (1) такие, что

$$\frac{|a_n|^2}{|a_{n-1}a_{n+1}|} > 1,$$

то необходимым и достаточным условием медленного возрастания $\ln \mu(r, f)$ является соотношение

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = o\left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right), \quad n \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Действительно, если $|a_n|^2/|a_{n-1}a_{n+1}| > 1$, то каждый член ряда (1) становится максимальным, условия (6) и (7) выполнены с $n_k = k$, а условие (8), как нетрудно показать, равносильно (14).

Пусть (λ_n) – занумерованная в порядке неубывания модулей последовательность нулей функции (1), а (n_k) – возрастающая последовательность натуральных чисел таких, что

$$|\lambda_{n_k}| < |\lambda_{n_k+1}| = \dots = |\lambda_{n_{k+1}}| < |\lambda_{n_{k+1}+1}|. \quad (15)$$

Рассмотрим целую функцию (5). Поскольку для этой функции в силу (15)

$$\begin{aligned} \varkappa(n_{k+1}, n_k) &= \frac{1}{n_{k+1} - n_k} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \ln |\lambda_j| = \ln |\lambda_{n_{k+1}}|, \\ \varkappa(n, n_k) &= \ln |\lambda_{n_{k+1}}|, \quad n_k < n \leq n_{k+1}, \end{aligned}$$

то неравенства (6) и (7) очевидны, а условие (8) запишется в виде

$$\ln |\lambda_{n_{k+1}}| - \frac{1}{n_{k+1}} \sum_{j=1}^{n_{k+1}} \ln |\lambda_j| \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Таким образом, доказан следующий аналог теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. Для того чтобы функция $N(r, 1/f)$ была медленно возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (16), где последовательность (n_k) определена соотношениями (15).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если последовательность $(|\lambda_n|)$ возрастающая, то условие

$$\ln |\lambda_n| - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln |\lambda_j| \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $N(r, 1/f)$ была медленно возрастающей.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Если выполняется условие (9), то для каждой функции $f \in B_\alpha$ имеет место неравенство

$$\ln |a_n| \leq -\gamma n^2, \quad n > n_0,$$

где γ – положительная постоянная. Поэтому

$$\ln \mu(r, f) \leq \max\{-\gamma x^2 + x \ln r : x \geq 0\} = \frac{1}{4\gamma} \ln^2 r. \quad (17)$$

Так как каждая функция $f \in B_\alpha$ является трансцендентной, то

$$\frac{\ln \mu(r, f)}{\ln r} \rightarrow +\infty, \quad r \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Покажем, что из (17) и (18) следует медленное возрастание функции $\ln \mu(r, f)$. Таким образом, и функция $\ln M(r, f)$ медленно возрастающая. Действительно, при всех достаточно больших $r > 0$ имеем

$$\ln \mu(r^2, f) \geq \int_r^{r^2} \nu(t, f) d \ln t \geq \nu(r, f) \ln r.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ln \mu(2r, f) - \ln \mu(r, f) = \int_r^{2r} \nu(t, f) d \ln t \leq \int_r^{2r} \frac{\ln \mu(t^2, f)}{\ln t} d \ln t \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \int_r^{2r} \ln t d \ln t = \frac{1}{\gamma} (2 \ln 2 \ln r + \ln^2 r) \\ &\leq \frac{4 \ln 2 \ln r}{\gamma \ln \mu(r, f)} \ln \mu(r, f) = o(\ln \mu(r, f)), \quad r \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т.е. $\ln \mu(r, f)$ – медленно возрастающая функция, и достаточность условия (9) доказана.

Докажем необходимость. Рассмотрим целую функцию

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-n_k \alpha(n_k)} z^{n_k}, \quad (19)$$

где (n_k) – произвольная возрастающая последовательность натуральных чисел. Так как $x\alpha(x)$ – выпуклая функция, то каждый член этого ряда становится максимальным, последовательность (n_k) является последовательностью значений центрального индекса, т.е. только для нее выполняются условия (6) и (7) теоремы 1. Поэтому для функции (19) функция $\ln \mu(r, f)$ является медленно возрастающей тогда и только тогда, когда

$$\frac{n_{k+1} \alpha(n_{k+1}) - n_k \alpha(n_k)}{n_{k+1} - n_k} - \alpha(n_{k+1}) \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

т.е.

$$\frac{n_k}{n_{k+1} - n_k} (\alpha(n_{k+1}) - \alpha(n_k)) \rightarrow +\infty, \quad k \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Предположим теперь, что условие (9) не выполняется, а значит, $\alpha(x_k)/x_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для некоторой возрастающей к $+\infty$ последовательности (x_k) . Так как α – возрастающая функция, существует последовательность (n_k) натуральных чисел такая, что $\alpha(n_k)/n_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Можем считать, что эта последовательность (n_k) настолько быстро возрастает, что

$$\frac{n_k}{n_{k+1}}\alpha(n_{k+1}) \rightarrow 0, \quad \frac{\alpha(n_k)}{\alpha(n_{k+1})} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тогда $n_k/n_{k+1} \rightarrow 0$ и

$$\frac{n_k}{n_{k+1} - n_k}(\alpha(n_{k+1}) - \alpha(n_k)) = (1 + o(1))\frac{n_k}{n_{k+1}}\alpha(n_{k+1}) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

т.е. условие (20) не выполняется. Таким образом, существует функция $f \in B_\alpha$, для которой $\ln \mu(r, f)$ и $\ln M(r, f)$ не являются медленно возрастающими функциями. Теорема 2 полностью доказана.

Класс целых функций (19) обозначим через B_α^* . Как видно из доказательства теоремы 2, если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = 0,$$

то существует функция $f \in B_\alpha^*$, для которой функция $\ln M(r, f)$ не является медленно возрастающей. Возникает вопрос о том, какой должна быть функция α , чтобы в классе B_α^* существовала функция f , для которой функция $\ln M(r, f)$ является медленно возрастающей. Ответ на этот вопрос дает следующая

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы существовала функция $f \in B_\alpha^*$, для которой функция $\ln f(r)$ является медленно возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\ln x} = +\infty. \quad (21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для каждой функции $f \in B_\alpha^*$ функция $\ln f(r)$ не является медленно возрастающей. Тогда для каждой возрастающей к $+\infty$ последовательности (n_k) натуральных чисел

$$\frac{n_k}{n_{k+1} - n_k}(\alpha(n_{k+1}) - \alpha(n_k)) = O(1), \quad k \rightarrow \infty.$$

В частности, при $n_k = k$ имеем $k(\alpha(k+1) - \alpha(k)) \leq K < \infty, k \geq 1$. Если $k \leq x \leq k+1$, то

$$\alpha(x) \leq \alpha(k+1) \leq \alpha(k) + \frac{K}{k} \leq \dots \leq K \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} + \alpha(0) \leq K \ln k + C \leq K \ln x + C,$$

где K и C – положительные постоянные, а это противоречит (21). Таким образом, если (21) выполняется, то существует функция $f \in B_\alpha^*$, для которой функция $\ln f(r)$ является медленно возрастающей.

Обратно, если условие (21) не выполняется, т.е. $\alpha(x) \leq K \ln x$ при $x \geq x_0$, где K – положительная постоянная, то для каждой функции имеем

$$f(r) \geq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-n_k K \ln n_k} r^{n_k},$$

и в силу формулы Адамара f имеет положительный порядок возрастания. Таким образом, $\ln f(r)$ не может быть медленно возрастающей функцией. Теорема 4 доказана.

Пусть, как выше, α – неотрицательная, непрерывная, возрастающая $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функция такая, что $x\alpha(x)$ – выпуклая функция, а A_α – класс целых функций, нули λ_k которых удовлетворяют условию

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln |\lambda_k| \geq \alpha(n), \quad n \geq n_0.$$

Применяя теорему 2 к функции (5), как в доказательстве теоремы 1, получаем следующий аналог теоремы 2.

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы для любой функции $f \in A_\alpha$ функция $N(r, 1/f)$ была медленно возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (9).*

Наконец, пусть функция f имеет положительные нули λ_n , последовательность (n_k) определена как в (15) и

$$\lambda_{n_{k+1}} = \frac{n_{k+1}\alpha(n_{k+1}) - n_k\alpha(n_k)}{n_{k+1} - n_k}.$$

Класс таких функций f обозначим через A_α^* . Тогда из теоремы 4 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 6. *Для того чтобы существовала функция $f \in A_\alpha^*$ такая, что функция $N(r, 1/f)$ медленно возрастающая, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (21).*

4. Из равенства [5, с. 13]

$$\ln \mu(r, f) = \ln \mu(0, f) + \int_0^r \frac{\nu(t, f)}{t} dt$$

вытекает, что если центральный индекс $\nu(r, f)$ – медленно возрастающая функция, то $\ln \mu(r, f)$ – медленно возрастающая функция. Поэтому если функция $\nu(r, f)$ медленно возрастающая, то существует последовательность (n_k) натуральных чисел, удовлетворяющая условиями (6)–(8). Так как из медленного возрастания $\ln \mu(r, f)$, вообще говоря, не следует медленное возрастание $\nu(r, f)$, то существование последовательности натуральных чисел, удовлетворяющей условиям (6)–(8), не является достаточным условием медленного возрастания центрального индекса. Поэтому актуальной является следующая не решенная нами задача.

ЗАДАЧА. Найти необходимые и достаточные условия на коэффициенты ряда (1), для того чтобы его центральный индекс $\nu(r, f)$ являлся медленно возрастающей функцией.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф. Краткая интерполяционная задача в пространстве целых функций заданного уточненного порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 5. С. 1102–1127.
- [2] Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В. Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Матем. заметки. 1983. Т. 34. № 2. С. 227–236.
- [3] Anderson J., Clunie J. Slowly growing meromorphic functions // Comment. Math. Helv. 1966. V. 40. № 4. P. 267–280.
- [4] Хейман У. Мероморфные функции. М.: Мир, 1966.
- [5] Поля Г., Серё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1978.

Львовский государственный университет

Поступило
23.04.96