Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Бабаи, Б. Хосрави, Квазираспознаваемость ${}^2D_n(3^\alpha)$ по графу простых чисел при $n = 4m + 1 \geq 21$ и нечетном α , *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 3, 323–334

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10421>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:02:11

Квазираспознаваемость ${}^2D_n(3^\alpha)$ по графу простых чисел при $n = 4m + 1 \geq 21$ и нечетном α

А. Бабаи, Б. Хосрави

Пусть G – конечная группа. Обозначим $\Gamma(G)$ граф простых чисел G . Как основной результат данной работы показано, что если G является конечной группой, для которой $\Gamma(G) = \Gamma({}^2D_n(3^\alpha))$ при $n = 4m + 1$ и нечетном α , то G имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный ${}^2D_n(3^\alpha)$. Также показано, что если G – конечная группа, удовлетворяющая условию $|G| = |{}^2D_n(3^\alpha)|$, и $\Gamma(G) = \Gamma({}^2D_n(3^\alpha))$, то $G \cong {}^2D_n(3^\alpha)$. В качестве следствия дается новое доказательство гипотезы Ши и Би для ${}^2D_n(3^\alpha)$. Также рассмотрено приложение этого результата к задаче распознавания конечных простых групп по множеству порядков элементов. А именно, доказано, что группа ${}^2D_n(3^\alpha)$ является квазираспознаваемой по спектру.

Библиография: 31 название.

DOI: 10.4213/mzm10421

1. Введение. Если n целое, обозначим $\pi(n)$ множество всех простых делителей n . Если G – конечная группа, $\pi(|G|)$ обозначается как $\pi(G)$. *Спектр* конечной группы G , который обозначается $\omega(G)$, – это множество порядков ее элементов. Построим *граф простых чисел* группы G , который обозначается как $\Gamma(G)$, следующим образом: его множество вершин – это $\pi(G)$, а два различных простых числа p и q соединены ребром (в этом случае будем писать $p \sim q$), если и только если G содержит элемент порядка pq . Пусть $s(G)$ – число связных компонент графа $\Gamma(G)$ и пусть $\pi_i(G)$, $i = 1, \dots, s(G)$, – связные компоненты $\Gamma(G)$. Если $2 \in \pi(G)$, то всегда можно предполагать, что $2 \in \pi_1(G)$. В теории графов подмножество вершин графа называется *независимым множеством*, если эти вершины попарно не смежные. Обозначим $t(G)$ максимальное количество простых чисел из $\pi(G)$, попарно не смежных в графе $\Gamma(G)$. Другими словами, если $\rho(G)$ – некоторое независимое множество с максимальным числом вершин в $\Gamma(G)$, то $t(G) = |\rho(G)|$. Аналогично, если $p \in \pi(G)$, то $\rho(p, G)$ – некоторое независимое множество с максимальным числом вершин в $\Gamma(G)$, содержащее p , и $t(p, G) = |\rho(p, G)|$.

Конечная группа G называется *распознаваемой по графу простых чисел*, если из $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ следует, что $H \cong G$. Конечная неабелева простая группа P называется *квазираспознаваемой по спектру*, если каждая конечная группа H с $\omega(H) = \omega(P)$

Работа Б. Хосрави была выполнена при поддержке IPM (School of Mathematics, Institute for Research in Fundamental Sciences, Tehran, Iran) (грант № 91050116).

имеет композиционный фактор, изоморфный P (см. [1]). Неабелева простая группа P называется *квазираспознаваемой по графу простых чисел*, если каждая конечная группа с графом простых чисел $\Gamma(P)$ имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный P (см. [2]). Очевидно, что распознавание (квазираспознавание) по графу простых чисел влечет распознавание (квазираспознавание) по спектру, но обратное в общем случае неверно. Кроме того, некоторые методы распознавания по спектру нельзя использовать для распознавания по графу простых чисел.

Хаги в работе [3] определила конечные группы G , удовлетворяющие условию $\Gamma(G) = \Gamma(S)$, где S – спорадическая простая группа. Доказано, что если $q = 3^{2n+1}$, $n > 0$, то простая группа ${}^2G_2(q)$ определяется единственным образом по своему графу простых чисел [2], [4]. Группа G называется *СИТ-группой*, если она имеет четный порядок и централизатор любой инволюции в G является 2-группой. В работе [5] определены конечные группы с таким же графом простых чисел, как у простой СИТ-группы. Также в статье [6] доказано, что если $p > 11$ – простое число, и $p \not\equiv 1 \pmod{12}$, то $\text{PSL}(2, p)$ определяется единственным образом своим графом простых чисел. В [7]–[9] определяются конечные группы с таким же графом простых чисел, как у $\text{PSL}(2, q)$, где q не является простым числом, и как у $B_p(3)$, где p простое. А в работе [10] доказано, что если $\Gamma(G) = \Gamma(B_n(5))$ при $n > 6$, то G имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный $B_n(5)$ или $C_n(5)$. Доказано, что простая группа $F_4(q)$, где $q = 2^n > 2$ (см. [11]) и группа ${}^2F_4(q)$ (см. [12]) квазираспознаваемы по графу простых чисел. Также в статье [13] доказано, что если p – простое число, не являющееся простым числом Мерсенна или Ферма, при этом $p \neq 11, 13, 19$ и $\Gamma(G) = \Gamma(\text{PGL}(2, p))$, то G имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный $\text{PSL}(2, p)$, а в случае $p = 13$ группа G имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный $\text{PSL}(2, 13)$ или $\text{PSL}(2, 27)$. Далее, в [14] доказано, что если p и $k > 1$ нечетны и $q = p^k$ – простая степень, то $\text{PGL}(2, q)$ единственным образом определяется своим графом простых чисел. В [15]–[18] получены конечные группы с таким же графом простых чисел, как у $L_n(2)$. А в работе [19] доказано, что некоторые ортогональные группы являются квазираспознаваемыми по графу простых чисел.

В статье [20] доказано, что если число $p = 2^n + 1 \geq 5$ простое, то группа ${}^2D_p(3)$ квазираспознаваема по графу простых чисел. Наконец, в работе [21] авторы доказали, что ${}^2D_{2m+1}(3)$ распознаваема по графу простых чисел.

Как главный результат этой статьи мы покажем, что если G – конечная группа, для которой $\Gamma(G) = \Gamma({}^2D_n(3^\alpha))$, где $n = 4m + 1 \geq 21$ и α нечетно, то G имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный ${}^2D_n(3^\alpha)$, т.е. простая группа ${}^2D_n(3^\alpha)$ является квазираспознаваемой по графу простых чисел.

В данной статье все группы предполагаются конечными и под простой группой мы понимаем неабелеву простую группу. Все не объясненные в дальнейшем обозначения являются стандартными и определены в [22]. В доказательствах мы использовали классификацию конечных простых групп. В работе [23; таблицы 2–9] перечислены независимые множества для всех простых групп. Мы использовали эти результаты при доказательстве основной теоремы данной статьи.

2. Предварительные результаты.

ЛЕММА 2.1 [24; теорема 1]. Пусть G – конечная группа с $t(G) \geq 3$ и $t(2, G) \geq 2$. Тогда выполняется следующее:

- (1) существует конечная неабелева простая группа S , для которой выполняется $S \leq \overline{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$, где K – максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G ;
- (2) для любого независимого подмножества ρ множества $\pi(G)$, для которого $|\rho| \geq 3$, не более чем одно простое число из ρ делит произведение $|K||\overline{G}/S|$; в частности, $t(S) \geq t(G) - 1$;
- (3) выполняется одно из следующих утверждений:
 - (a) каждое простое $r \in \pi(G)$, не являющееся смежным с 2 в $\Gamma(G)$, не делит произведение $|K||\overline{G}/S|$; в частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$;
 - (b) существует простое $r \in \pi(K)$, не являющееся смежным с 2 в $\Gamma(G)$; в этом случае $t(G) = 3$, $t(2, G) = 2$, и $S \cong \text{Alt}_7$ или $L_2(q)$ для некоторого нечетного q .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В лемме 2.1 для каждого нечетного простого $p \in \pi(S)$ выполняется $t(p, S) \geq t(p, G) - 1$.

ЛЕММА 2.3 (Теорема Жигмонди [25]). Пусть p – простое число, а n – положительное целое число. Тогда верно одно из утверждений:

- (i) существует примитивное простое p' для $p^n - 1$, т.е. $p' \mid (p^n - 1)$, но $p' \nmid (p^m - 1)$ для каждого $1 \leq m < n$, (обычно такое p' обозначается как r_n);
- (ii) $p = 2$, $n = 1$ или 6;
- (iii) p – простое число Мерсенна и $n = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4 [26]. Пусть p – простое число и $(q, p) = 1$. Пусть $k \geq 1$ – наименьшее положительное целое число, для которого $q^k \equiv 1 \pmod{p}$. Тогда k называется порядком числа q относительно p , и мы будем обозначать его $\text{ord}_p(q)$. Из малой теоремы Ферма очевидным образом следует, что $\text{ord}_p(q) \mid (p - 1)$. Также, если $q^n \equiv 1 \pmod{p}$, выполняется $\text{ord}_p(q) \mid n$. Аналогично, если $m > 1$ целое и $(q, m) = 1$, можно определить $\text{ord}_m(q)$. Если a нечетно, $\text{ord}_a(q)$ обозначается также $e(a, q)$. Для нечетного q положим $e(2, q) = 1$, если $q \equiv 1 \pmod{4}$, и $e(2, q) = 2$, если $q \equiv -1 \pmod{4}$.

ЛЕММА 2.5 [27]. Пусть N – нормальная подгруппа группы G . Предположим, что G/N – группа Фробениуса с ядром Фробениуса F и циклическим дополнением Фробениуса C . Если $(|N|, |F|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $p \mid |C| \in \pi_e(G)$, где p – простой делитель $|N|$.

ЛЕММА 2.6 [28]. Пусть G – конечная простая группа $A_{n-1}(q)$. Тогда:

- (1) если у $q^n - 1$ существует примитивный простой делитель r , то G содержит подгруппу Фробениуса с ядром порядка r и циклическим дополнением порядка n ;
- (2) G содержит подгруппу Фробениуса с ядром порядка q^{n-1} и циклическим дополнением порядка $(q^{n-1} - 1)/(n, q - 1)$.

ЛЕММА 2.7 [28]. Пусть G – конечная простая группа. Тогда:

- (1) если $G = C_n(q)$, то G содержит подгруппу Фробениуса с ядром порядка q^n и циклическим дополнением порядка $(q^n - 1)/(2, q - 1)$;

- (2) если $G = {}^2D_n(q)$ и у $q^{2n-2} - 1$ существует примитивный простой делитель r , то G содержит подгруппу Фробениуса с ядром порядка q^{2n-2} и циклическим дополнением порядка r ;
- (3) если $G = B_n(q)$ или $D_n(q)$, и существует примитивный простой делитель r_m числа $q^m - 1$, где $m = n$ или $n - 1$, причем m нечетно, то G содержит подгруппу Фробениуса с ядром порядка $q^{m(m-1)/2}$ и циклическим дополнением порядка r_m .

ЛЕММА 2.8 [29; предложение 2.5]. Пусть $G = D_n^\varepsilon(q)$ – конечная простая группа лева типа над полем характеристики p . Определим

$$\eta(m) = \begin{cases} m, & \text{если } m \text{ нечетно,} \\ \frac{m}{2} & \text{в другом случае.} \end{cases}$$

Пусть r и s – простые нечетные числа и $r, s \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Положим $k = e(r, q)$ и $l = e(s, q)$, а также $1 \leq \eta(k) \leq \eta(l)$. Тогда r и s являются несмежными, если и только если $2\eta(k) + 2\eta(l) > 2n - (1 - \varepsilon(-1)^{k+l})$ и k, l удовлетворяют условию

$$\frac{l}{k} \text{ не является нечетным натуральным числом,}$$

и если $\varepsilon = +$, то цепочка равенств

$$n = l = 2\eta(l) = 2\eta(k) = 2k$$

не верна.

3. Основные результаты. Мы докажем более точный вариант леммы 2.5 и будем использовать его для доказательства основных теорем.

ЛЕММА 3.1. Пусть G – группа, которая удовлетворяет условиям леммы 2.1, и пусть группы K и S удовлетворяют утверждениям леммы 2.1. Пусть существуют $p \in \pi(K)$ и $p' \in \pi(S)$, для которых $p \approx p'$ в $\Gamma(G)$ и S содержит подгруппу Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C , причем выполняется $(|F|, |K|) = 1$. Тогда $p|C| \in \omega(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам нужно доказать, что выполнено $F \not\leq KC_G(K)/K$. Так как $KC_G(K)/K \trianglelefteq G/K$, имеем $S \cap KC_G(K)/K \trianglelefteq S$. Пусть $S \cap KC_G(K)/K = S$. Тогда $S \leq KC_G(K)/K$. Отсюда для каждого $t' \in \pi(S)$ и $t \in \pi(K)$ имеем $t' \sim t$, что ведет к противоречию. Следовательно, $S \cap KC_G(K)/K = 1$, поскольку группа S простая. Поэтому $F \not\leq KC_G(K)/K$, так как $F \leq S$. Отсюда $p|C| \in \omega(G)$ по лемме 2.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Пусть $G = {}^2D_n(q)$, где $n = 4m + 1 \geq 21$, $q = 3^\alpha$ и α нечетно. Далее мы везде будем обозначать примитивный простой делитель числа $q^i - 1$ как r_i . Заметим, что

$$\pi(G) = \pi\left(q^{n(n-1)}(q^n + 1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i} - 1)\right).$$

Также, поскольку $q = 3^\alpha \equiv 3 \pmod{8}$ и $n \equiv 1 \pmod{4}$, из [23] известно, что

$$\rho(2, {}^2D_n(q)) = \{2, r_{2(n-1)}, r_{2n}\}, \quad \rho(3, {}^2D_n(q)) = \{3, r_{2(n-1)}, r_{2n}\},$$

$t({}^2D_n(q)) = [(3n+4)/4] \geq 16$, и

$$\rho(G) = \left\{ r_{2i} \mid \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < i \leq n \right\} \cup \left\{ r_i \mid \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < i < n, i \equiv 1 \pmod{2} \right\}.$$

ЛЕММА 3.3. Пусть $G = {}^2D_n(3^\alpha)$, где $n = 4m+1 \geq 21$ и α нечетно. Пусть $A = \{5, r_{2(n-2)}, r_{2(n-1)}, r_{2n}\}$. Тогда A является независимым множеством в $\Gamma(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы знаем, что $e(5, 3^\alpha) = 4$, поскольку α нечетно. Кроме того,

$$e(r_{2n}, 3^\alpha) = 2n, \quad e(r_{2(n-1)}, 3^\alpha) = 2(n-1), \quad e(r_{2(n-2)}, 3^\alpha) = 2(n-2).$$

Поэтому из леммы 2.8 следует, что 5 не смежно с r_{2n} , $r_{2(n-1)}$ и $r_{2(n-2)}$. К тому же из-за свойств $\rho(G)$ в замечании 3.2 элементы r_{2n} , $r_{2(n-1)}$ и $r_{2(n-2)}$ являются попарно не смежными в $\Gamma(G)$, что завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $m \geq 5$ и пусть α нечетно. Тогда ${}^2D_{4m+1}(3^\alpha)$ является квазираспознаваемой по графу простых чисел, т.е. если G – конечная группа, для которой $\Gamma(G) = \Gamma({}^2D_{4m+1}(3^\alpha))$, то G имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный ${}^2D_{4m+1}(3^\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам известно, что $t({}^2D_{4m+1}(3^\alpha)) \geq 16$ и $t(2, {}^2D_{4m+1}(3^\alpha)) = 3$. Согласно лемме 2.1 существует неабелева простая группа S , для которой $S \leq \overline{G} = G/K \leq \text{Aut}(S)$, где K – максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G .

Нам известно, что $\{r_{2n}, r_{2(n-1)}\} \subseteq \rho(2, G)$. Следовательно, $\{r_{2n}, r_{2(n-1)}\} \subseteq \pi(S)$ и $r_{2n} \approx 2 \approx r_{2(n-1)}$ в $\Gamma(S)$. Из леммы 2.1 мы знаем, что $t(S) \geq 15$ и $t(2, S) \geq 3$. Далее рассматриваем все варианты группы S из [30; таблицы 1a–1c].

Случай 1. Пусть $S \cong A_{n'}$, где $n' \geq 5$.

Если $n' \leq 16$, то $t(S) \leq 3$, что ведет к противоречию по лемме 2.1. Следовательно, $n' \geq 17$. Если $x \in \pi(A_{n'})$ и для него выполняется $x \approx 17$, то $n' - 17 < x \leq n'$ согласно [23; предложение 1.1]. С другой стороны, существует $[18/2] + [18/3] - [18/6] = 12$ элементов из $[n' - 17, n']$, которые делятся на 2 или 3. Следовательно, не более 6 элементов из $[n' - 17, n']$ являются простыми числами. Отсюда $t(17, S) \leq 7$. Следовательно, по замечанию 2.2 $t(17, G) \leq 8$. С другой стороны,

$$B = \{r_{2n}, r_{2(n-1)}, \dots, r_{2(n-8)}\} \cup \{r_{n-2}, r_{n-4}, r_{n-6}\}$$

– независимое множество в $\Gamma(G)$. Также нам известно, что $e(17, 3^\alpha) = 16$, потому что α нечетно. Следовательно, по крайней мере 11 элементов из B не являются смежными с 17 согласно лемме 2.8. Поэтому $t(17, G) \geq 11$, что приводит к противоречию.

Будем обозначать через $A_{n'}^+(q')$ простую группу $A_{n'}(q')$, а через $A_{n'}^-(q')$ простую группу ${}^2A_{n'}(q')$.

Случай 2. Пусть $S \cong A_{n'-1}^\varepsilon(q')$, где $q' = p^f$ и $\varepsilon \in \{+, -\}$.

(а) Пусть $p \neq 2$. Нам известно, что $t(S) \geq 15$ и $t(2, S) \geq 3$, поэтому согласно [23; таблица 6] имеем $2 < n'_2 = (q' - \varepsilon 1)_2$. Далее для удобства изложения проведем доказательство для случаев $A_{n'-1}(q)$ и ${}^2A_{n'-1}(q)$ одновременно.

- Если $S \cong A_{n'-1}(q')$, то каждое r'_i , где $i \notin \{n' - 1, n'\}$, является смежным с 2 в $\Gamma(S)$, и $\rho(2, S) = \{2, r'_{n'-1}, r'_{n'}\}$ согласно [23; таблица 6]. Нам известно, что $r_{2n} \approx 2 \approx r_{2(n-1)}$ в $\Gamma(S)$. Следовательно, r_{2n} и $r_{2(n-1)}$ – некоторые примитивные простые делители $q'^{n'-1} - 1$ и $q'^{n'} - 1$, например, числа $r'_{n'-1}$ и $r'_{n'}$. Далее для простоты будем писать

$$\{r_{2n}, r_{2(n-1)}\} \approx \{r'_{n'}, r'_{n'-1}\}, \quad (1)$$

чтобы проиллюстрировать эти соотношения. С другой стороны, $r_{2n} \approx 5 \approx r_{2(n-1)}$ в $\Gamma(G)$ согласно лемме 3.3. Поэтому $r'_{n'} \approx 5 \approx r'_{n'-1}$ в $\Gamma(S)$.

- Если $S \cong {}^2A_{n'-1}(q')$, то каждое r'_i , где $i \notin \{n', 2(n' - 1)\}$, является смежным с 2 в $\Gamma(S)$ и $\rho(2, S) = \{2, r'_{n'}, r'_{2(n'-1)}\}$ согласно [23; таблица 6]. Аналогично предыдущему случаю

$$\{r_{2n}, r_{2(n-1)}\} \approx \{r'_{n'}, r'_{2(n'-1)}\}. \quad (2)$$

Нам также известно, что $r_{2n} \approx 5 \approx r_{2(n-1)}$ в $\Gamma(G)$. Отсюда $r'_{n'} \approx 5 \approx r'_{2(n'-1)}$ в $\Gamma(S)$.

Пусть $p \neq 5$. Нам известно, что $e(5, q') \mid 4$.

- Если $S \cong A_{n'-1}(q')$ и $2 \mid e(5, q')$, то $5 \sim r'_{n'}$ согласно [23; предложение 2.1], поскольку $n'_2 > 2$, и мы получаем противоречие. Следовательно, $e(5, q') = 1$, и поэтому $5 \mid (q' - 1)$.
- Если $S \cong {}^2A_{n'-1}(q')$ и $e(5, q') = 4$ или $e(5, q') = 1$, имеем $5 \sim r'_{n'}$ согласно [23; предложение 2.2], что ведет к противоречию. Следовательно, $e(5, q') = 2$, и поэтому $5 \mid (q' + 1)$.

Покажем теперь, что $r_{2(n-2)} \in \pi(S)$. Иначе было бы $r_{2(n-2)} \in \pi(K) \cup \pi(\overline{G}/S)$. Если $r_{2(n-2)} \in \pi(\overline{G}/S)$, получим $r_{2(n-2)} \in \pi(\text{Out}(S)) \subseteq \{2\} \cup \pi(f(n', q' - \varepsilon 1))$. Известно, что $r_{2(n-2)} \neq 2$. Если $r_{2(n-2)} \mid (q' - \varepsilon 1)$, то $r_{2(n-2)} \in \pi(S)$, поскольку $(q' - \varepsilon 1) \mid |S|$, что приводит к противоречию. Если $r_{2(n-2)} \mid f$, то $r_{2(n-2)}$ является порядком полевого автоморфизма S . Мы знаем, что полевой автоморфизм централизует элементы $A_{n'-1}^\varepsilon(p)$, и что $5 \in \pi(A_{n'-1}^\varepsilon(p))$. Поэтому 5 является смежным с $r_{2(n-2)}$, а это ведет к противоречию согласно лемме 3.3. Следовательно, $r_{2(n-2)} \in \pi(K)$.

- Если $S \cong A_{n'-1}(q')$, то уже доказано, что $5 \mid (q' - 1)$. Согласно лемме 2.6 $A_{n'-1}(q')$ содержит подгруппу Фробениуса вида $q'^{n'-1} : (q'^{n'-1} - 1)/(n', q' - 1)$. Поскольку $r_{2n} \in \pi(S)$, $r_{2n} \approx r_{2(n-2)}$ в $\Gamma(G)$ и $(r_{2(n-2)}, q') = 1$, то согласно лемме 3.1 $r_{2(n-2)} \sim \pi((q'^{n'-1} - 1)/(n', q' - 1))$. Поэтому $r_{2(n-2)} \sim r'_{n'-1}$, что приводит к противоречию согласно (1) и лемме 3.3.
- Если $S \cong {}^2A_{n'-1}(q')$, то $5 \mid (q' + 1)$. Тогда согласно [31] имеем $C_{n'/2}(q') \leq {}^2A_{n'-1}(q')$. По лемме 2.7 $C_{n'/2}(q')$ содержит подгруппу Фробениуса вида $q'^{n'/2} : (q'^{n'/2} - 1)/2$. Так как $r_{2n} \in \pi(S)$, $r_{2n} \approx r_{2(n-2)}$ в $\Gamma(G)$ и $(r_{2(n-2)}, q') = 1$, по лемме 3.1 имеем $r_{2(n-2)} \sim \pi((q'^{n'/2} - 1)/2)$. Поскольку $n'_2 > 2$, выполняется $(q'^2 - 1) \mid (q'^{n'/2} - 1)$, поэтому $r_{2(n-2)} \sim 5$, что ведет к противоречию согласно лемме 3.3.

Таким образом, $r_{2(n-2)} \in \pi(S)$. Известно, что $5 \mid (q - \varepsilon 1)$ и $5 \approx r_{2(n-2)}$ согласно лемме 3.3.

- Если $S \cong A_{n'-1}(q')$, то согласно [23; предложение 4.1] каждое r'_i , где $i \notin \{n' - 1, n'\}$, является смежным с 5 в $\Gamma(S)$. Из (1) получаем противоречие.

- Если $S \cong {}^2A_{n'-1}(q')$, то согласно [23; предложение 4.2] каждое r'_i , где $i \notin \{2(n'-1), n'\}$, является смежным с 5 в $\Gamma(S)$. Тогда из (2) следует противоречие.

Поэтому $p = 5$, а $q' = 5^f$.

- Если $S \cong A_{n'-1}(q')$, то согласно [23; таблица 4] имеем $t(5, A_{n'-1}(q')) = 3$. Так как $\{5, r_{2(n-1)}, r_{2n}\} \subseteq \pi(S)$, получаем, что $r_{2(n-2)} \notin \pi(S)$ согласно лемме 2.1. Если $r_{2(n-2)} \in \pi(\overline{G}/S) \cup \pi(K)$, то получается противоречие аналогично случаю, рассмотренному выше.
- Пусть $S \cong {}^2A_{n'-1}(q')$. Так как $q' = 5^f$, имеем $(q' + 1)_2 = 2$, что ведет к противоречию.

(b) Пусть $p = 2$; тогда $q' = 2^f$.

- Если $S \cong A_{n'-1}(q')$, то каждое r'_i , где $i \notin \{n' - 1, n'\}$, является смежным с 2 в $\Gamma(S)$ и $\rho(2, S) = \{2, r'_{n'}, r'_{n'-1}\}$ согласно [23; предложение 3.1]. Следовательно, аналогично предыдущему случаю $\{r_{2n}, r_{2(n-1)}\} \approx \{r'_{n'}, r'_{n'-1}\}$. Заметим, что $e(3, q') \mid 2$. Если $e(3, q') = 2$, имеем $r'_{n'} \sim 3$ или $r'_{n'-1} \sim 3$, что является противоречием согласно замечанию 3.2. Следовательно, $e(3, q') = 1$, и поэтому f четно. Тогда $e(5, q') = 2$ или $e(5, q') = 1$. Если $e(5, q') = 2$, имеем $r'_{n'} \sim 5$ или $r'_{n'-1} \sim 5$, что ведет к противоречию по лемме 3.3. Поэтому $e(5, q') = 1$, откуда следует, что $\rho(5, S) \subseteq \{5, r'_{n'}, r'_{n'-1}\}$ согласно [23; предложение 4.1]. Поэтому $r_{2(n-2)} \notin \pi(S)$. Отсюда $r_{2(n-2)} \in \pi(\overline{G}/S) \cup \pi(K)$, и получается противоречие аналогично случаю, рассмотренному выше.
- Пусть $S \cong {}^2A_{n'-1}(q')$. Рассмотрим следующие случаи.

- Пусть $n' \equiv 0 \pmod{4}$. Тогда $\rho(2, S) = \{2, r'_{n'}, r'_{2(n'-1)}\}$; это следует из [23; предложение 3.2]. Поэтому аналогично рассмотренному выше

$$\{r_{2n}, r_{2(n-1)}\} \approx \{r'_{n'}, r'_{2(n'-1)}\}.$$

Если $e(3, q') = 1$, имеем $r'_{n'} \sim 3$, что является противоречием согласно замечанию 3.2. Отсюда $e(3, q') = 2$, поэтому f нечетно. Тогда $e(5, q') = 4$ и, следовательно, $r'_{n'} \sim 5$, что согласно лемме 3.3 ведет к противоречию.

- Пусть $n' \equiv 1 \pmod{4}$. Тогда $\rho(2, S) = \{2, r'_{2n'}, r'_{n'-1}\}$ согласно [23; предложение 3.2], и аналогично предыдущему случаю мы получаем противоречие.
- Пусть $n' \equiv 2 \pmod{4}$. Тогда $\rho(2, S) = \{2, r'_{n'/2}, r'_{2(n'-1)}\}$ согласно [23; предложение 3.2]. Следовательно, аналогично рассмотренному выше

$$\{r_{2n}, r_{2(n-1)}\} \approx \{r'_{n'/2}, r'_{2(n'-1)}\}.$$

Если $e(3, q') = 1$, то $r'_{n'/2} \sim 3$, что является противоречием согласно замечанию 3.2. Таким образом, $e(3, q') = 2$ и поэтому f нечетно. Нам известно, что $e(17, 2^f) = 8$, так как $e(17, 2) = 8$ и f нечетно. Если $r'_i \in \pi(S)$ и $r'_i \approx 17$ в $\Gamma(S)$, то $\nu(i) + 8 > n'$ и $8 \nmid \nu(i)$. Следовательно, $t(17, S) = 8$. С другой стороны, $e(17, 3^\alpha) = 16$, потому что $e(17, 3) = 16$ и α нечетно. Если $r_i \in \pi(G)$ и $r_i \approx 17$ в графе $\Gamma(G)$, то $2\eta(i) + 16 > 2n - (1 + (-1)^{16+i})$ и $i/16$ не является нечетным натуральным числом. Поэтому $t(17, G) \geq 11$ и мы получаем противоречие согласно замечанию 2.2.

- Пусть $n' \equiv 3 \pmod{4}$. Тогда $\rho(2, S) = \{2, r'_{2n'}, r'_{(n'-1)/2}\}$ согласно [23; предложение 3.2] и, аналогично рассмотренному выше, мы получаем противоречие.

Обозначим $D_{n'}^+(q')$ простую группу $D_{n'}(q')$, а $D_{n'}^-(q')$ простую группу ${}^2D_{n'}(q')$.

Случай 3. Пусть $S \cong D_{n'}^\varepsilon(q')$, где $q' = p^f$.

Так как $t(S) \geq t(G) - 1$, мы получаем, что $n' \geq n - 3$ и поэтому $n' \geq 18$.

(а) Пусть $p \neq 2$. Нам известно, что $t(2, S) \geq 3$. Из этого следует, что $n' \equiv 1 \pmod{2}$, и если $\varepsilon = +$, то $q' \equiv 5 \pmod{8}$, а если $\varepsilon = -$, то $q' \equiv 3 \pmod{8}$ согласно [23; таблица 6].

- Если $S \cong D_{n'}(q')$, то $\rho(2, S) = \{2, r'_{n'}, r'_{2(n'-1)}\}$ согласно [23; предложение 4.4]. Нам известно, что в графе $\Gamma(S)$ числа $r_{2n} \approx 2 \approx r_{2(n'-1)}$. Следовательно,

$$\{r_{2n}, r_{2(n'-1)}\} \approx \{r'_{n'}, r'_{2(n'-1)}\}. \quad (3)$$

С другой стороны, $r_{2n} \approx 3 \approx r_{2(n'-1)}$ в $\Gamma(G)$, поэтому $r'_{n'} \approx 3 \approx r'_{2(n'-1)}$ в $\Gamma(S)$.

- Если $S \cong {}^2D_{n'}(q')$, то $\rho(2, S) = \{2, r'_{2n'}, r'_{2(n'-1)}\}$ согласно [23; предложение 4.4]. Аналогично предыдущему случаю, имеем

$$\{r_{2n}, r_{2(n'-1)}\} \approx \{r'_{2n'}, r'_{2(n'-1)}\} \quad (4)$$

и $r'_{2n'} \approx 3 \approx r'_{2(n'-1)}$ в $\Gamma(S)$.

Пусть $p \neq 3$. Нам известно, что $e(3, q') \mid 2$.

- Если $S \cong D_{n'}(q')$ и $e(3, q') = 1$, то $3 \sim r'_{n'}$ согласно лемме 2.8, потому что n' нечетно, и мы получаем противоречие. Следовательно, $e(3, q') = 2$. Тогда $3 \sim r'_{2(n'-1)}$ согласно лемме 2.8, и мы опять получаем противоречие.
- Если $S \cong {}^2D_{n'}(q')$ и $e(3, q') = 2$, то $3 \sim r'_{2n'}$ согласно лемме 2.8, и мы получаем противоречие. Следовательно, $e(3, q') = 1$. Тогда $3 \sim r'_{2(n'-1)}$ согласно лемме 2.8, и мы опять получаем противоречие.

Пусть $p = 3$ и поэтому $q' = 3^f$.

- Если $S \cong D_{n'}(q')$, то, как было сказано выше,

$$\{r_{2n}, r_{2(n'-1)}\} \approx \{r'_{n'}, r'_{2(n'-1)}\}$$

согласно (3). Нам известно, что $\pi(S) \subseteq \pi(G)$, поэтому $2(n' - 1)f \leq 2n\alpha$. Рассмотрим следующие случаи.

- Пусть $r_{2n} = r'_{n'}$ и $r_{2(n'-1)} = r'_{2(n'-1)}$. Пусть p_0 – примитивный простой делитель числа $3^{2n\alpha} - 1$. Тогда p_0 – примитивный простой делитель числа $(3^\alpha)^{2n} - 1$. Поскольку $r_{2n} = r'_{n'}$, из этого следует, что $p_0 \mid (3^{n'f} - 1)$. Отсюда $2n\alpha \leq n'f$, что является противоречием.
- Пусть $r_{2n} = r'_{2(n'-1)}$ и $r_{2(n'-1)} = r'_{n'}$. Пусть p_0 – примитивный простой делитель числа $3^{2n\alpha} - 1$. Аналогично рассмотренному выше здесь $2n\alpha \leq 2(n' - 1)f$, так как $r_{2n} = r'_{2(n'-1)}$. Следовательно, $2n\alpha = 2(n' - 1)f$. Нам известно, что n, n' и α нечетны, что является противоречием.
- Если $S \cong {}^2D_{n'}(q')$, то согласно (4)

$$\{r_{2n}, r_{2(n'-1)}\} \approx \{r'_{2n'}, r'_{2(n'-1)}\}.$$

Рассмотрим следующие случаи.

- Пусть $r_{2n} = r'_{2(n'-1)}$ и $r_{2(n-1)} = r'_{2n'}$. Пусть p_0 – примитивный простой делитель числа $3^{2n\alpha} - 1$. Тогда p_0 является примитивным простым делителем $(3^\alpha)^{2n} - 1$. Поскольку $r_{2n} = r'_{2(n'-1)}$, мы получаем, что $p_0 \mid (3^{2(n'-1)f} - 1)$. Поэтому $2n\alpha \leq 2(n' - 1)f$. С другой стороны, $\pi(S) \subseteq \pi(G)$, поэтому $2n\alpha = 2(n' - 1)f$, что ведет к противоречию, потому что $r'_{2n'} \in \pi(G)$ и $2n\alpha < 2n'f$.
- Пусть $r_{2n} = r'_{2n'}$ и $r_{2(n-1)} = r'_{2(n'-1)}$. Пусть p_0 – примитивный простой делитель числа $3^{2n\alpha} - 1$. Тогда p_0 – примитивный простой делитель числа $(3^\alpha)^{2n} - 1$. Так как $r_{2n} = r'_{2n'}$, мы получаем, что $p_0 \mid (3^{2n'f} - 1)$. Отсюда $2n\alpha \leq 2n'f$. Следовательно, $2n'f = 2n\alpha$ и поэтому $\alpha \mid n'f$. Пусть p'_0 – примитивный простой делитель числа $3^{2(n-1)\alpha} - 1$. Тогда p'_0 – примитивный простой делитель числа $(3^\alpha)^{2(n-1)} - 1$. Так как $r_{2(n-1)} = r'_{2(n'-1)}$, мы получаем, что $2(n-1)\alpha \mid 2(n'-1)f$. Отсюда $\alpha \mid f$, так как $\alpha \mid n'f$ и $\alpha \mid (n' - 1)f$. Если $\alpha \neq f$, то имеем $\alpha \leq f/2$ и поэтому $n \geq 2n'$. Отсюда $n \leq 6$, потому что $n - 3 \leq n'$, и мы получаем противоречие. Следовательно, $\alpha = f$ и $n = n'$. Отсюда $S \cong {}^2D_n(3^\alpha)$.

(b) Пусть $p = 2$ и поэтому $q = 2^f$.

Если $n' \equiv 1 \pmod{2}$, то рассуждение, аналогичное приведенному в начале пункта (a), даст нам противоречие. Поэтому $n' \equiv 0 \pmod{2}$.

- Если $S \cong D_{n'}(q')$, то аналогично сказанному выше

$$\{r_{2n}, r_{2(n-1)}\} \approx \{r'_{n'-1}, r'_{2(n'-1)}\}.$$

Если $e(3, q') = 1$, то $r'_{n'-1} \sim 3$ согласно [23; предложение 4.4], что ведет к противоречию. Поэтому $e(3, q') = 2$. Тогда $r'_{2(n'-1)} \sim 3$ согласно [23; предложение 4.4], что является противоречием.

- Если $S \cong {}^2D_{n'}(q')$, то $\rho(2, S) = \{2, r'_{2n'}, r'_{2(n'-1)}, r'_{n'-1}\}$ согласно [23; предложение 4.4]. Мы знаем, что $\rho(2, G) \subseteq \rho(2, S)$. Поскольку $r_{2n} \approx 3 \approx r_{2(n-1)}$ в $\Gamma(G)$, по крайней мере два элемента из $\rho(2, S)$ не являются смежными с 3. Если $e(3, q') = 1$, имеем $r'_{n'-1} \sim 3 \sim r'_{2(n'-1)}$ согласно [23; предложение 4.4], что ведет к противоречию. Поэтому $e(3, q') = 2$ и f нечетно. Отсюда $e(17, 2^f) = 8$. Если $r'_i \in \pi(S)$ и $r'_i \approx 17$ в $\Gamma(S)$, имеем $2\eta(i) + 8 > 2n' - (1 + (-1)^{i+8})$ и $i/8$ не является нечетным натуральным числом. Отсюда $t(17, S) \leq 8$. С другой стороны, аналогично предыдущему случаю, $t(17, G) \geq 11$, и мы получаем противоречие согласно замечанию 2.2.

Случай 4. Пусть $S \cong C_{n'}(q')$, где $q' = p^f$. Нам известно, что $t(2, S) \geq 3$. Тогда $p = 2$ и $n' > 1$ нечетно согласно [23; таблица 4]. В этом случае $\rho(2, S) = \{2, r'_{n'}, r'_{2n'}\}$ согласно [23; предложение 4.3]. Аналогично сказанному выше,

$$\{r_{2n}, r_{2(n-1)}\} \approx \{r'_{n'}, r'_{2n'}\}.$$

Кроме того, $r_{2n} \approx 3 \approx r_{2(n-1)}$ в $\Gamma(G)$. Если $e(3, q') = 1$, имеем $r'_{n'} \sim 3$ в $\Gamma(S)$ согласно лемме 2.8, что ведет к противоречию. Отсюда $e(3, q') = 2$, и поэтому $r'_{2n'} \sim 3$ в $\Gamma(S)$ согласно лемме 2.8, что ведет к противоречию.

Аналогичные рассуждения показывают, что S не изоморфна $B_{n'}(q')$. Отсюда $S \cong {}^2D_n(3^\alpha)$, где $n = 4m + 1 \geq 21$ и α нечетно.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $q = 3^\alpha$, где α нечетно. Если $\Gamma(G) = \Gamma(^2D_n(q))$, причем $n = 4m + 1 \geq 21$, то ${}^2D_n(q) \leq G/K \leq \text{Aut}({}^2D_n(q))$, где K является p -группой и $p = 3$ или $p \mid (q - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.1 известно, что $S \leq G/K \leq \text{Aut}(S)$, где K – максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G . Согласно теореме 3.4 $S \cong {}^2D_n(q)$, где $n = 4m + 1 \geq 21$ и α нечетно. Предположим, что существует p , для которого $p \mid |K|$. Мы утверждаем, что без потери общности можно рассматривать K как элементарную абелеву p -группу при $p \in \pi(G)$. Поскольку K разрешима, существует $p \in \pi(G)$, для которого $O^p(K) \neq K$. Тогда $K/O^p(K)$ является нетривиальной p -группой. Пусть $\hat{K} = K/O^p(K)$ и $\hat{G} = G/O^p(K)$, поскольку $O^p(K)$ – характеристическая подгруппа группы K и $K \triangleleft G$. Если обозначить подгруппу Фраттини $\hat{K}$ как $\Phi(\hat{K})$, то $\hat{K}/\Phi(\hat{K})$ – элементарная абелева p -группа и

$$\frac{G}{K} \cong \frac{\hat{G}}{\hat{K}} \cong \frac{\hat{G}/\Phi(\hat{G})}{\hat{K}/\Phi(\hat{K})}.$$

Следовательно, без потери общности можно предположить, что K – элементарная абелева p -группа. Пусть $p \neq 3$.

Покажем, что если $t \in \pi({}^2D_n(q))$, то $t \approx r_{2n}$ или $t \approx r_{2(n-1)}$. Пусть $e(t, q) = a$, $t \sim r_{2n}$ и $t \sim r_{2(n-1)}$. Поскольку $t \sim r_{2(n-1)}$, из этого следует, что $2(n-1) + 2\eta(a) \leq 2n - (1 + (-1)^{2(n-1)+a})$ или $2(n-1)/a$ нечетно согласно лемме 2.8. Следовательно, $a = 1$ или $2(n-1)/a$ нечетно. Аналогично, поскольку $t \sim r_{2n}$, мы получаем, что $2n/a$ нечетно согласно лемме 2.8, что является противоречием.

Согласно лемме 2.7 $S \cong {}^2D_n(q)$ содержит подгруппу Фробениуса с ядром порядка $q^{2(n-1)}$ и циклическим дополнением порядка $r_{2(n-1)}$. По предположению $S \leq G/K$, и поэтому G/K содержит подгруппу Фробениуса T/K вида $q^{2(n-1)} : r_{2(n-1)}$. Поскольку $p \neq 3$ и $p \approx r_{2n}$ или $p \approx r_{2(n-1)}$, мы получаем, что $p \sim r_{2(n-1)}$ согласно лемме 3.1. Кроме того, нам известно, что $B_{n-1}(q) \leq {}^2D_n(q)$ согласно [31], и поэтому $B_{n-1}(q) \leq G/K$. Аналогично, G/K содержит подгруппу Фробениуса вида $q^{(n-2)(n-3)/2} : r_{n-2}$ согласно лемме 2.7. Поскольку $p \neq 3$ и $p \approx r_{2n}$ или $p \approx r_{2(n-1)}$, получаем, что $p \sim r_{n-2}$ согласно лемме 3.1. Пусть $e(p, q) = l$. Так как $p \sim r_{2(n-1)}$, получаем, что $2(n-1) + 2\eta(l) \leq 2n - (1 + (-1)^{2(n-1)+l})$ или $2(n-1)/l$ нечетно согласно лемме 2.8. Аналогично, поскольку $p \sim r_{n-2}$, имеем $2(n-2) + 2\eta(l) \leq 2n - (1 + (-1)^{(n-2)+l})$ или $(n-2)/l$ нечетно. Следовательно, $l = 1$, откуда $p \mid (q - 1)$.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть G – конечная группа, удовлетворяющая условию $|G| = |{}^2D_n(3^\alpha)|$, где $n = 4m + 1 \geq 21$ и α нечетно. Если $\Gamma(G) = \Gamma({}^2D_n(3^\alpha))$, то $G \cong {}^2D_n(3^\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По нашему предположению $\Gamma(G) = \Gamma({}^2D_n(3^\alpha))$. Согласно теореме 3.4 G имеет нормальный ряд $S \leq G/K \leq \text{Aut}(S)$, для которого $S \cong {}^2D_n(3^\alpha)$. Кроме того, $|G| = |{}^2D_n(3^\alpha)|$, поэтому $K = 1$. Отсюда $G \cong {}^2D_n(3^\alpha)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Пусть $m \geq 5$ и α нечетно. Тогда ${}^2D_{4m+1}(3^\alpha)$ является квазираспознаваемой по спектру, т.е. если G – конечная группа, для которой $\Gamma(G) = \Gamma({}^2D_{4m+1}(3^\alpha))$, то G имеет единственный неабелев композиционный фактор, изоморфный ${}^2D_{4m+1}(3^\alpha)$.

Авторы хотели бы поблагодарить рецензента за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Кондратьев, “Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ ”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:6 (2007), 1250–1271.
- [2] А. Хосрави, Б. Хосрави, “Квазираспознавание простой группы ${}^2G_2(q)$ по графу простых чисел”, *Сиб. матем. журн.*, **48**:3 (2007), 707–716.
- [3] M. Hagie, “The prime graph of a sporadic simple group”, *Comm. Algebra*, **31**:9 (2003), 4405–4424.
- [4] А. М. Попов, “О строении некоторых групп с конечным H -фробениусовым элементом”, *Алгебра и логика*, **43**:2 (2004), 220–228.
- [5] B. Khosravi, B. Khosravi, B. Khosravi, “Groups with the same prime graph as a CIT simple group”, *Houston J. Math.*, **33**:4 (2007), 967–977.
- [6] B. Khosravi, B. Khosravi, B. Khosravi, “On the prime graph of $PSL(2, p)$ where $p > 3$ is a prime number”, *Acta. Math. Hungar.*, **116**:4 (2007), 295–307.
- [7] А. Хосрави, Б. Хосрави, “2-распознаваемость $PSL(2, p^2)$ по графу простых чисел”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:4 (2008), 934–944.
- [8] B. Khosravi, “ n -Recognition by prime graph of the simple group $PSL(2, q)$ ”, *J. Algebra Appl.*, **7**:6 (2008), 735–748.
- [9] Z. Momen, B. Khosravi, “On r -recognition by prime graph of $B_p(3)$ where p is an odd prime”, *Monatsh. Math.*, **166**:2 (2012), 239–253.
- [10] A. Babai, B. Khosravi, “On the composition factors of a group with the same prime graph as $B_n(5)$ ”, *Czechoslovak Math. J.*, **62**:2 (2012), 469–486.
- [11] B. Khosravi, A. Babai, “Quasirecognition by prime graph of $F_4(q)$ where $q = 2^n > 2$ ”, *Monatsh. Math.*, **162**:3 (2011), 289–296.
- [12] Z. Akhlaghi, M. Khatami, B. Khosravi, “Quasirecognition by prime graph of the simple group ${}^2F_4(q)$ ”, *Acta Math. Hungar.*, **122**:4 (2009), 387–397.
- [13] M. Khatami, B. Khosravi, Z. Akhlaghi, “NCF-distinguishability by prime graph of $PGL(2, p)$, where p is a prime”, *Rocky Mountain J. Math.*, **41**:5 (2011), 1523–1545.
- [14] Z. Akhlaghi, B. Khosravi, M. Khatami, “Characterization by prime graph of $PGL(2, p^k)$ where p and $k > 1$ are odd”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **20**:7 (2010), 847–873.
- [15] B. Khosravi, B. Khosravi, B. Khosravi, “A characterization of the finite simple group $L_{16}(2)$ by its prime graph”, *Manuscripta Math.*, **126** (2008), 49–58.
- [16] Б. Хосрави, “Квазираспознаваемость $L_{10}(2)$ по графу простых чисел”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:2 (2009), 446–452.
- [17] B. Khosravi, “Some characterizations of $L_9(2)$ related to its prime graph”, *Publ. Math. Debrecen*, **75**:3-4 (2009), 375–385.
- [18] B. Khosravi, H. Moradi, “Quasirecognition by prime graph of finite simple groups $L_n(2)$ and $U_n(2)$ ”, *Acta. Math. Hungar.*, **132**:1-2 (2011), 140–153.
- [19] B. Khosravi, H. Moradi, “Quasirecognition by prime graph of some orthogonal groups over the binary field”, *J. Algebra Appl.*, **11**:3 (2012), 1250056.
- [20] A. Babai, B. Khosravi, N. Hasani, “Quasirecognition by prime graph of ${}^2D_p(3)$ where $p = 2^n + 1 \geq 5$ is a prime”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2), **32**:3 (2009), 343–350.
- [21] А. Бабаи, Б. Хосрави, “Распознавание групп ${}^2D_{2m+1}(3)$ по графу простых чисел”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:5 (2011), 993–1003.
- [22] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of Finite Groups. Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1985.
- [23] А. В. Васильев, Е. П. Вдовин, “Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы”, *Алгебра и логика*, **44**:6 (2005), 682–725.
- [24] А. В. Васильев, И. Б. Горшков, “О распознавании конечных простых групп со связным графом простых чисел”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:2 (2009), 292–299.
- [25] K. Zsigmondy, “Zur Theorie der Potenzreste”, *Monatsh. Math. Phys.*, **3**:1 (1892), 265–284.

- [26] W. Sierpiński, *Elementary Theory of Numbers*, Monogr. Mat., **42**, PWN, Warsaw, 1964.
- [27] В. Д. Мазуров, “Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов”, *Алгебра и логика*, **36**:1 (1997), 37–53.
- [28] H. He, W. Shi, “Recognition of some finite simple groups of type $D_n(q)$ by spectrum”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **19**:5 (2009), 681–698.
- [29] А. В. Васильев, Е. П. Вдовин, “Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы”, *Алгебра и логика*, **50**:4 (2011), 425–470.
- [30] А. В. Васильев, М. А. Гречкосеева, “О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности 2^m , $2^m + 1$ и $2^m + 2$ над полем характеристики 2”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:3 (2004), 510–526.
- [31] E. Stensholt, “Certain embeddings among finite groups of lie type”, *J. Algebra*, **53**:1 (1978), 136–187.

А. Бабаи

Amirkabir University of Technology, Iran

E-mail: a_babai@aut.ac.ir

Поступило

28.07.2012

Б. Хосрави

Amirkabir University of Technology, Iran

E-mail: khosravibbb@yahoo.com