Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. В. Цыганов, О нелинейных скобках Пуассона, возникающих в неголономной механике, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 3, 340–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10422>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:11:22

О нелинейных скобках Пуассона, возникающих в неголономной механике

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. В. Цыганов

Рассматриваются неголономные системы, описывающие качение твердого тела по плоскости, и их связь с различными пуассоновыми структурами. Введено понятие обобщенного конформно гамильтонового представления динамической системы. В отличие от линейных пуассоновых структур, определяемых алгебрами Ли и используемых в динамике твердого тела, пуассоновы структуры неголономных систем оказываются нелинейными.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10422

С математической точки зрения любая динамическая система на фазовом пространстве $\mathcal{M}$, $\dim \mathcal{M} = 2n$, с координатами $x_1, \dots, x_{2n}$ определяется уравнениями движения

$$\dot{x}_i = X_i, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (0.1)$$

Эта система дифференциальных уравнений задает векторное поле

$$X = \sum_{i=1}^{2n} X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (0.2)$$

которое является линейным оператором на пространстве гладких функций на многообразии $\mathcal{M}$, определяющем изменение любой характеристики системы

$$\dot{F} = X(F) = \sum_{i=1}^{2n} X_i \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

при выполнении динамических уравнений (0.1).

Для того, чтобы изучить свойства данного векторного поля X , мы можем разложить его

$$X = g_1 X_1 + \dots + g_m X_m$$

Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания УдГУ «Регулярная и хаотическая динамика». Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №13-01-12462 офи_м2).

по гладким векторным полям X_k , отвечающим какой-либо известной подгруппе $\text{Diff}(\mathcal{M})$. Согласно эрлангенской программе Клейна выбор этой подгруппы связан с определением “геометрии” или “геометрической структуры” на многообразии $\mathcal{M}$. Например, в специальной теории относительности это будет группа Пуанкаре, в гамильтоновой динамике – группа симплектоморфизмов, в квантовой механике – унитарная группа, группа контактных преобразований и т.д. Во всех этих случаях подгруппа группы диффеоморфизмов, определяющаяся геометрией, сама характеризует геометрию.

В классической механике также рассматриваются разложения по набору коммутирующих векторных полей

$$X = g_1 X_1 + \cdots + g_n X_n, \quad (0.3)$$

где X_k либо поля симметрий, либо гамильтоновы векторные поля $X_k = P dH_k$, построенные с помощью функционально независимых первых интегралов H_i ,

$$\dot{H}_i = X(H_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

и бивектора Пуассона P , относительно которого интегралы движения находятся в инволюции

$$\{H_i, H_j\} = \sum_{km}^{2n} P_{km} \frac{\partial H_i}{\partial x_k} \frac{\partial H_j}{\partial x_m} = 0. \quad (0.4)$$

Разложение (0.3) можно назвать *обобщенно конформно гамильтоновым представлением*. Существование такого разложения и, соответственно, существование глобально определенной пуассоновой структуры является некоторым дополнительным качественным показателем для описания данного векторного поля. Например, эта пуассонова структура позволяет отождествить поверхности уровня интегралов движения с лагранжевыми подмногообразиями со всеми вытекающими последствиями.

Если связная компонента уровня интегралов движения диффеоморфна двумерному тору и на этом торе мы имеем динамическую систему с инвариантной мерой, то согласно теореме Колмогорова [1] можно ввести координаты $\varphi_1, \varphi_2 \pmod{2\pi}$, в которых эта система принимает вид

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{c_1}{\Phi}, \quad \dot{\varphi}_2 = \frac{c_2}{\Phi}.$$

Здесь Φ – гладкая положительная функция на торе, а $c_{1,2}$ – некоторые константы. Замена времени $dt \rightarrow \Phi d\tau$ позволяет линеаризовать уравнения движения и, поэтому, движение происходит по прямолинейным обмоткам тора, хотя возможно и не равномерно. В переменных $\varphi_{1,2}$ данное векторное поле является конформно-гамильтоновым

$$X = g_1 P dH_1, \quad g_1 = \Phi^{-1}. \quad (0.5)$$

Обобщение теоремы Колмогорова в окрестности неособого двумерного тора и вопросы о препятствиях к глобальной конформной гамильтоновости обозначаются в работе [2].

В классической гамильтоновой динамике $g_1 = \text{const}$, а пуассонова структура (0.4) является обычно не более чем линейной и определяется некоторой суммой полупростых алгебр Ли, для которых функции Казимира являются полиномами [3].

Для рассматриваемых далее неголономных систем $g_i \neq \text{const}$, а пуассонова структура (0.4) является существенно нелинейной и вырожденной, и ее функции Казимира могут либо определяться с помощью решения некоторой системы дифференциальных уравнений, либо вообще отсутствовать (в глобальном смысле, аналогично первым интегралам уравнений движения).

Впервые на отсутствие глобальных функций Казимира для неголономной задачи Суллова было указано в работе [4]. Рассмотренные ниже системы еще раз указывают на то, что иерархия динамического поведения неголономных систем, введенная в [5], [6], обладает еще более тонкими уровнями, а сами конкретные неголономные системы могут индуцировать содержательные нелинейные пуассоновы структуры, общая теория которых на настоящий момент, к сожалению, плохо развита. Например, теория топологических, аналитических или алгебраических препятствий для существования функций Казимира, в отличие от существования интегралов движения, пока еще вообще не создана.

1. Качение тела вращения по плоскости. Рассмотрим качение тела вращения по плоскости без проскальзывания, т.е. когда скорость точки контакта равна нулю

$$v + \omega \times r = 0, \quad (1.1)$$

где ω и v – угловая скорость и скорость центра масс тела, r – вектор из центра масс в точку контакта относительно подвижной системы координат, связанной с главными осями шара. Скобки (a, b) обозначают обычное скалярное произведение, а $a \times b$ – векторное произведение трехмерных векторов.

Уравнения движения после исключения множителя Лагранжа, отвечающего данной неголономной связи, состоят из уравнения на вектор кинетического момента M относительно точки контакта и кинематического уравнения для единичного вектора нормали в точке контакта

$$\dot{M} = M \times \omega + m\dot{r} \times (\omega \times r) + M_F, \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad (1.2)$$

где M_F – момент внешних сил, действующих на тело. В подвижной системе координат угловой момент связан с угловой скоростью соотношением

$$M = \mathbf{I}_Q \omega, \quad \mathbf{I}_Q = \mathbf{I} + m r^2 \mathbf{E} - m r \otimes r. \quad (1.3)$$

Здесь m – масса тела, $\mathbf{I}$ – центральный тензор инерции, $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

В этих уравнениях предполагается, что вектор r связан с вектором нормали γ соотношением

$$\gamma = - \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|},$$

задающим гауссово отображение для функции $f(r) = 0$, определяющей поверхность тела. Детальный вывод этих уравнений движения приведен в [5]–[7].

Если тело катится по плоскости под воздействием потенциальных сил, например силы тяжести, то в первом из уравнений (1.2)

$$M_F = \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma}.$$

В этом случае уравнения (1.2) обладают интегралами движения

$$H = \frac{1}{2}(M, \omega) + U(\gamma), \quad C = (\gamma, \gamma) = 1. \quad (1.4)$$

Следуя [8] будем предполагать, что потенциал U зависит только от γ_3 , т.е. зависит только от наклона оси вращения тела относительно вертикали. В этом случае, если поверхность тела и центральный эллипсоид инерции являются соосными поверхностями вращения, т.е.

$$I_1 = I_2 \neq I_3, \quad r_1 = f_1(\gamma_3)\gamma_1, \quad r_2 = f_1(\gamma_3)\gamma_2, \quad r_3 = f_2(\gamma_3), \quad (1.5)$$

векторное поле X , задаваемое уравнениями движения (1.2), обладает полем симметрий

$$X_S = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial}{\partial \gamma_1} + M_1 \frac{\partial}{\partial M_2} - M_2 \frac{\partial}{\partial M_1}, \quad (1.6)$$

двумя дополнительными интегралами движения и инвариантной мерой

$$\mu = g^{-1}(\gamma) d\gamma dM, \quad g(\gamma) = \sqrt{I_1 I_3 + m(r, \mathbf{I}r)}.$$

Известно [8], [5], что дополнительные интегралы движения существуют и являются не более чем линейными функциями от моментов M_i и вещественно-аналитическими, но не алгебраическими, функциями координаты γ_3 :

$$J_k = v_1^{(k)}(\gamma_3)(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2) + v_2^{(k)}(\gamma_3) M_3, \quad k = 1, 2. \quad (1.7)$$

Входящие в это определение функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} & \frac{g^2(v_2'^{(k)} + v_1^{(k)})}{m} \\ &= m f_1 f_2 ((1 - \gamma_3^2) f_1 + \gamma_3 f_2) (v_2^{(k)} f_1 - v_1^{(k)} f_2) \\ & \quad + I_1 f_1 ((1 - \gamma_3^2) (v_1^{(k)} f_2' - v_2^{(k)} f_1') - \gamma_3 v_1^{(k)} f_2 + (v_1^{(k)} (\gamma_3^2 - 1) + \gamma_3 v_2^{(k)}) f_1), \\ & \frac{g^2 v_1'^{(k)}}{m} \\ &= m f_1^2 ((1 - \gamma_3^2) f_1 + \gamma_3 f_2) (v_2^{(k)} f_1 - v_1^{(k)} f_2) + I_3 (f_1^2 v_2^{(k)} - (v_1^{(k)} f_2' - v_2^{(k)} f_1') f_2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь и всюду далее мы опускаем зависимость функций от γ_3 .

В качестве примера рассмотрим круглый диск со смещенным вдоль оси динамической симметрии центром масс

$$f_1 = \frac{R}{\sqrt{1 - \gamma_3^2}}, \quad f_2 = a.$$

Здесь R – радиус диска (монеты), a – смещение центра масс. Если $a = 0$, то функции $v_{1,2}^{(k)}$

$$v_1^{(k)} = L^{(k)}(b_-, \gamma_3), \quad v_2^{(k)} = c(L^{(k)}(b_+, \gamma_3) - \gamma_3 L^{(k)}(b_-, \gamma_3)), \quad k = 1, 2,$$

где

$$b_{\mp} = \frac{\sqrt{g^2 - 4mI_3R^2}}{2gI_1^{1/2}} \mp \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{I_1^{1/2}\sqrt{g^2 - 4mI_3R^2} + gI_1}{2mgR^2}$$

выражаются через функции Лежандра $L^{(1,2)}(b_k, \gamma_3)$ первого и второго рода, которые стандартным образом определяются через гипергеометрическую функцию [5].

Если $a \neq 0$, то уравнения (1.8) не имеют алгебраических решений.

2. Пуассонова структура. Легко проверить, что для тела вращения уравнения (0.4) имеют частное решение вида

$$P_{\alpha}^{(k)} = \zeta_k \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma}_{\alpha} \\ -\mathbf{\Gamma}_{\alpha}^{\top} & \mathbf{M}_{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \text{rank } P_{\alpha}^{(k)} = 2, \quad k = 1, 2, \quad (2.1)$$

где

$$\mathbf{\Gamma}_{\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \frac{v_2^{(k)}}{v_1^{(k)}} & \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \frac{v_2^{(k)}}{v_1^{(k)}} & \gamma_2 \\ -\frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \frac{v_2^{(k)}}{v_1^{(k)}} & -\frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \frac{v_2^{(k)}}{v_1^{(k)}} & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \frac{v_2^{(k)}}{v_1^{(k)}} & -M_2 \\ * & 0 & M_1 \\ * & * & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$\zeta_k = \exp \left(\int m \left(\frac{mf_1^2((1 - \gamma_3^2)f_2 + \gamma_3 f_2)(f_1 v_2^{(k)} - f_2 v_1^{(k)})}{v_1^{(k)} g^2} + \frac{I_1 v_1^{(k)} f_1((1 - \gamma_3^2)f_1' - \gamma_3 f_1) + I_3 v_2^{(k)}(f_1' f_2 - f_1^2)}{v_1^{(k)} g^2} \right) d\gamma_3 \right).$$

Если добавить к уравнениям (0.4) условие совместности с ранее полученным частным решением P_{α} , то легко найти еще одно частное решение, которое зависит только от формы тела:

$$P_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma}_{\beta} \\ -\mathbf{\Gamma}_{\beta}^{\top} & \mathbf{M}_{\beta} \end{pmatrix}, \quad \text{rank } P_{\beta} = 2, \quad (2.2)$$

где

$$\mathbf{\Gamma}_{\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} & -\frac{\gamma_1^2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} & 0 \\ \frac{\gamma_2^2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} & -\frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -M_3 + \frac{\gamma_3(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2)}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} + m\rho & -m\sigma\gamma_2 \\ * & 0 & m\sigma\gamma_1 \\ * & * & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{f_2}{f_1} \sigma - \frac{f_1(I_3 f_2(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2) - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) I_1 f_1 M_3)}{g^2} \left(1 - \left(\frac{f_2}{f_1} \right)' \right), \\ \sigma &= \frac{(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2)(m(r, \gamma) f_1^3 + I_3(f_1^2 + f_1' f_2))}{g^2} \\ &\quad + \frac{M_3(m(r, \gamma) f_1^2 f_2 + (\gamma_3 f_1 - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) f_1') I_1 f_1)}{g^2}. \end{aligned}$$

Линейная комбинация полученных частных решений дает нам искомое полное решение уравнений (0.4)

$$P^{(k)} = \alpha P_\alpha^{(k)} + \beta P_\beta, \quad \text{rank } P^{(k)} = 4, \quad k = 1, 2, \quad (2.3)$$

где α и β произвольные функции от γ_2/γ_1 и γ_3 , соответственно. Таким образом мы имеем две пуассоновых структуры, определенных неявно, так же как и дополнительные линейные интегралы движения (1.7), которые являются их функциями Казимира.

В этом случае исходное векторное поле раскладывается на гамильтоново поле и поле симметрий

$$X = \beta^{-1} P^{(k)} dH + \eta_k X_S, \quad \eta_k = \frac{u_1(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2) + u_2 M_3}{g^2}, \quad (2.4)$$

где коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{mf_1(1 - \gamma_3^2)(\beta^{-1}\alpha\zeta_k(v_1^{(k)} f_2 - v_2^{(k)} f_1) + v_1^{(k)}(\gamma_3 f_1 - f_2))}{(1 - \gamma_3^2)v_1^{(k)}} \\ &\quad + \frac{I_3(\gamma_3 v_1^{(k)} + \beta^{-1}\alpha\zeta_k v_2^{(k)})}{(1 - \gamma_3^2)v_1^{(k)}}, \\ u_2 &= \frac{mf_2(\beta^{-1}\alpha\zeta_k(v_1^{(k)} f_2 - v_2^{(k)} f_1) + v_1^{(k)}(\gamma_3 f_1 - f_2)) - I_1 v_1^{(k)}(\beta^{-1}\alpha\zeta_k + 1)}{v_1^{(k)}}, \end{aligned}$$

зависят от пар функций $v_{1,2}^{(k)}$, входящих в определение интегралов движения J_k (1.7).

Мы можем отделить поле симметрий в разложении (2.4), переходя к переменным, которые являются интегралами для поля симметрий X_S . Следуя [5], в качестве таких переменных выберем координату γ_3 , от которой зависит потенциал U , и моменты

$$K_1 = \frac{(M, r)}{f_1}, \quad K_2 = g\omega_3, \quad K_3 = \frac{\kappa(\gamma_1 M_2 - \gamma_2 M_1)}{1 - \gamma_3^2}, \quad (2.5)$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{1 - \gamma_3^3}{I_1 + m(r, r)}}.$$

Бивекторы $P^{(k)}$ имеют одну общую проекцию на инвариантное относительно поля симметрий X_S четырехмерное подпространство с координатами $x = (\gamma_3, K_1, K_2, K_3)$

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa I_3 g^{-1} \left(1 - \left(\frac{f_2}{f_1} \right)' \right) K_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\kappa m g^{-1} f_1 (f_1 - f_2') K_1 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rank } \hat{P} = 2. \quad (2.6)$$

Функциями Казимира данного бивектора будут линейные интегралы движения J_k (1.7). Именно эта пуассонова структура была найдена в [5] с помощью теории приводящего множителя Чаплыгина.

Проекция исходного векторного поля X (1.2), (2.4) при $\beta = 1$ является гамильтоновым векторным полем

$$\hat{X} = \hat{P} dH.$$

Выпишем три первых уравнения движения:

$$\dot{\gamma}_3 = \kappa K_3, \quad \dot{K}_1 = -\kappa g^{-1} I_3 \left(1 - \left(\frac{f_2}{f_1} \right)' \right) K_2 K_3, \quad \dot{K}_2 = -\kappa m g^{-1} f_1 (f_1 - f_2') K_1 K_3.$$

Если поделить второе и третье уравнение на первое, то мы получим линейные не автономные уравнения первого порядка

$$\frac{dK_1}{d\gamma_3} = -g^{-1} I_3 \left(1 - \left(\frac{f_2}{f_1} \right)' \right) K_2, \quad \frac{dK_2}{d\gamma_3} = -m g^{-1} f_1 (f_1 - f_2') K_1. \quad (2.7)$$

Эти уравнения, в несколько иных обозначениях, были получены С. А. Чаплыгиным [8], см. детальное обсуждение в [5].

Общее решение данных уравнений может быть получено в виде линейной суперпозиции

$$K_i = c_1 \Phi_1(\gamma_3) + c_2 \Phi_2(\gamma_3), \quad i = 1, 2, \quad (2.8)$$

где $\Phi_{1,2}$ – фундаментальные решения системы уравнений (2.7), а константы $c_{1,2}$ и есть значения линейных по моментам интегралов движения $H_{2,3}$, которые и являются функциями Казимира для вырожденного бивектора Пуассона $\hat{P}$.

3. Сфера Рауса. Следуя [5], [8], [9], рассмотрим качение неуравновешенного динамически симметричного шара по плоскости без проскальзывания. Неуравновешенный означает, что центр масс не совпадает с геометрическим центром, а симметричный означает, что два момента инерции совпадают друг с другом. Для сферы Рауса вектор r имеет вид

$$r = (R\gamma_1, R\gamma_2, R\gamma_3 + a),$$

где R – радиус шара и a – расстояние от геометрического центра до центра масс шара. В этом случае векторное поле X (1.2) обладает интегралами

$$H_J = K_1 = (r, M), \quad H_R = K_2 = g^{-1}(\gamma)\omega_3.$$

Первый из них представляет собой интеграл Джеллета¹, который имеется также при достаточно общем законе трения в точке контакта. Второй линейный по скоростям интеграл был найден Э. Раусом в 1884 г. и С. А. Чаплыгиным в работе [8].

Выпишем явно бивектор Пуассона P_J , для которого интеграл Джеллета является функцией Казимира. Этот бивектор параметризуется двумя функциями $\alpha(\gamma_1/\gamma_2)$ и $\beta(\gamma_3)$

$$P_J = \alpha g \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma}_\alpha \\ -\mathbf{\Gamma}_\alpha^\top & \mathbf{M}_\alpha \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{\Gamma}_\beta \\ -\mathbf{\Gamma}_\beta^\top & \mathbf{M}_\beta \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Матрицы $\mathbf{\Gamma}_{\alpha,\beta}$ имеют вид

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_1\gamma_2(R\gamma_3+a)}{R(\gamma_1^2+\gamma_2^2)} & \frac{\gamma_2^2(R\gamma_3+a)}{R(\gamma_1^2+\gamma_2^2)} & -\gamma_2 \\ -\frac{\gamma_1^2(R\gamma_3+a)}{R(\gamma_1^2+\gamma_2^2)} & -\frac{\gamma_1\gamma_2(R\gamma_3+a)}{R(\gamma_1^2+\gamma_2^2)} & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_\beta = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1^2+\gamma_2^2} & \frac{\gamma_2^2\gamma_3}{\gamma_1^2+\gamma_2^2} & 0 \\ -\frac{\gamma_2^2\gamma_3}{\gamma_1^2+\gamma_2^2} & \frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1^2+\gamma_2^2} & 0 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 & 0 \end{pmatrix},$$

а кососимметричные матрицы $\mathbf{M}_{\alpha,\beta}$ равны

$$\mathbf{M}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2)(R\gamma_3 + a)}{R(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} & -M_2 \\ * & 0 & M_1 \\ * & * & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}_\beta = \begin{pmatrix} 0 & M_3 - \frac{\gamma_3(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2)}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} - \frac{m\sigma R(R\gamma_3 + a)}{g^2} & \frac{m\sigma\gamma_2 R^2}{g^2} \\ * & 0 & -\frac{m\sigma\gamma_1 R^2}{g^2} \\ * & * & 0 \end{pmatrix},$$

где $\sigma = mR(m(r, \gamma)C_2 + I_3(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2) + I_1 M_3 \gamma_3)$.

¹В отличие от встречающейся в российской литературе французской транскрипции “Желле”, мы используем более корректную транскрипцию фамилии ирландского ученого J. H. Jellet.

Согласно [9] преобразование моментов

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \left(\frac{\gamma_1 \gamma_3 (R(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2) - b I_1^{-1} (I_1 + m(R\gamma_3 + a)^2))}{\alpha g (R\gamma_3 + a)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_2 (\gamma_2 M_1 - \gamma_1 M_2)}{\beta} + c \gamma_1 \right), \\ L_2 &= \frac{1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \left(\frac{\gamma_2 \gamma_3 (R(\gamma_1 M_1 + \gamma_2 M_2) - b I_1^{-1} (I_1 + m(R\gamma_3 + a)^2))}{\alpha g (R\gamma_3 + a)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma_1 (\gamma_2 M_1 - \gamma_1 M_2)}{\beta} + c \gamma_2 \right), \\ L_3 &= \frac{M_3}{\alpha g} + \frac{b m (R\gamma_3 + a)}{\alpha g I_1}, \end{aligned}$$

где $b = (M, r)$, $c = (L, \gamma)$, переводит скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_J$ в канонические скобки Ли–Пуассона на алгебре $e^*(3)$

$$\{L_i, L_j\}_0 = \varepsilon_{ijk} L_k, \quad \{L_i, \gamma_j\}_0 = \varepsilon_{ijk} \gamma_k, \quad \{\gamma_i, \gamma_j\}_0 = 0, \quad (3.2)$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор.

Если $c = (\gamma, L) = 0$, то исходные интегралы движения имеют вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{\alpha^2}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \left(\frac{g^2 - I_1 I_3}{m R^2} L_3^2 + \frac{g^2 (R\gamma_3 + a)^2 (L_1 \gamma_2 - L_2 \gamma_1)^2}{R^2 \gamma_3^2 (I_1 + m r^2)} \right) \\ &\quad - \frac{2b \alpha g (R\gamma_3 + a) L_3}{I_1 R^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} + \frac{b^2 (I_1 + m (R\gamma_3 + a)^2)}{I_1^2 R^2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$H_R = \alpha I_1 L_3,$$

так что соответствующие уравнения Гамильтона интегрируются абсолютно точно так же, как и для волчка Лагранжа [3].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Н. Колмогоров, “О динамических системах с интегральным инвариантом на торе”, *Докл. АН СССР*, **93**:5 (1953), 763–766.
- [2] A. V. Bolsinov, A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Hamiltonization of non-holonomic systems in the neighborhood of invariant manifolds”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **16**:5 (2011), 443–464.
- [3] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Динамика твердого тела. Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос*, ИКИ, М.–Ижевск, 2005.
- [4] А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев, “Гамильтоновость и интегрируемость задачи Суслова”, *Нелинейная динам.*, **6**:1 (2010), 127–142.
- [5] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Rolling of a rigid body on plane and sphere. Hierarchy of dynamics”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **7**:2 (2002), 177–200.
- [6] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, A. A. Kilin, “Rolling of a ball on a surface. New integrals and hierarchy of dynamics”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **7**:2 (2002), 201–219.
- [7] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “Conservation laws, hierarchy of dynamics and explicit integration of nonholonomic systems”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **13**:5 (2008), 443–490.
- [8] С. А. Чаплыгин, “О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости”, *Собр. соч.*, Т. 1, М.–Л., 1948.

[9] И. А. Бизяев, А. В. Цыганов, “О сфере Рауса”, *Нелинейная динам.*, **8:3** (2012), 569–583.

А. В. Борисов

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск,
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: borisov@rcd.ru

Поступило

28.05.2013

И. С. Мамаев

Удмуртский государственный университет,
г. Ижевск
E-mail: mamaev@rcd.ru

А. В. Цыганов

Санкт-Петербургский государственный университет
E-mail: andrey.tsiganov@gmail.com