Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Донг, Х. Чен, Почти расщепляющие последовательности квантовых удвоений конечной группы, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 3, 385–399

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10423>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:21:23

Почти расщепляющие последовательности квантовых удвоений конечной группы

Дж. Донг, Х. Чен

Пусть k – поле характеристики $p > 0$ и G – конечная группа, порядок которой делится на p . Доказано, что почти расщепляющие последовательности квантового дубля $D(kG)$ можно построить с помощью почти расщепляющих последовательностей групповых алгебр, где группы пробегает все централизаторы представителей классов сопряженности группы G . В качестве частного случая рассматривается приложение полученных результатов к квантовым дублям диэдральных групп.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10423

1. Введение

Почти расщепляющие последовательности были введены Ауслендером и его соавторами для конечнопорожденных модулей над конечномерной (или артиновой) алгеброй и играют важную роль в теории представлений. Однако и для произвольных артиновых алгебр почти расщепляющие последовательности допускают довольно конструктивное описание. В этой статье мы иллюстрируем этот тезис в случае хопфовых алгебр специального вида, а именно, в случае квантового дубля $D(kG)$ конечной группы G .

При обсуждении почти расщепляющих последовательностей естественно требовать, чтобы дубль $D(kG)$ не был полупростым. К счастью, мы знаем, что в силу предложения 1.2 из [1] квантовый дубль $D(kG)$ полупрост тогда и только тогда, когда характеристика p поля k не делит порядок G . По этой причине мы будем предполагать, что G – конечная группа, порядок которой делится на p .

Согласно предложению 2.1 из [2] категорию левых $D(kG)$ -модулей можно идентифицировать с категорией лево-правых kG -модулей Йеттера–Дринфельда, поэтому в этой статье мы изучаем только kG -модули Йеттера–Дринфельда.

Статья организована следующим образом. Во втором разделе мы напоминаем определения и некоторые основные свойства модулей Йеттера–Дринфельда над

Работа Дж. Донга выполнена при поддержке Национального научного фонда Китая (грант № 11201231), Китайского фонда поддержки докторов наук (грант № 2012M511643) и фонда плановых проектов исследований докторов наук Цзянсу (грант № 1102041C). Работа Х. Чена выполнена при поддержке Национального научного фонда Китая (грант № 11171291).

групповой алгеброй, почти расщепляющих последовательностей и колчанов Ауслендера–Рейтена.

В третьем разделе мы исследуем почти расщепляющие последовательности квантового дубля конечной группы. Мы доказываем, что почти расщепляющие последовательности квантового дубля $D(kG)$ можно построить с помощью почти расщепляющих последовательностей групповых алгебр, где группы пробегает все централизаторы представителей классов сопряженности группы G .

В четвертом разделе мы рассматриваем частный случай, когда G является диэдральной группой порядка $2n$ для нечетного n . В этом же разделе мы описываем все колчаны Ауслендера–Рейтена дубля $D(kG)$.

В последнем разделе мы рассматриваем случай четного n .

В этой статье мы всюду предполагаем, что k – алгебраически замкнутое поле нечетной характеристики p . Все модули предполагаются левыми, а комодули – правыми; кроме того, все они конечномерны над полем k .

2. Предварительные сведения

Напомним описания модулей Йеттера–Дринфельда над групповыми алгебрами и определение почти расщепляющих последовательностей.

Сначала кратко изложим основные результаты статьи [1]. Пусть G – конечная группа и k – произвольное поле. Через $\mathcal{K}(G)$ мы обозначаем множество классов сопряженности группы G . Для любого $g \in G$ пусть $C_G(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$ – централизатор g в группе G . Для каждого $C \in \mathcal{K}(G)$ зафиксируем $g_C \in C$. Множество $\{g_C \mid C \in \mathcal{K}(G)\}$ является множеством представителей классов сопряженности в G . Предположим, что N – левый $kC_G(g_C)$ -модуль. Тогда $N \uparrow^G = kG \otimes_{kC_G(g_C)} N$ является kG -модулем. Определим k -линейное отображение $\varphi: N \uparrow^G \rightarrow N \uparrow^G \otimes kG$ правилом $\varphi(g \otimes n) = (g \otimes n) \otimes gg_C g^{-1}$ для всех $g \in G$ и $n \in N$. Непосредственная проверка показывает, что $(N \uparrow^G, \varphi)$ является kG -модулем Йеттера–Дринфельда; мы обозначаем его через $D(N)$. kG -Модуль Йеттера–Дринфельда $D(N)$ называется *неразложимым (простым)*, если N является неразложимым (соответственно, простым) $kC_G(g_C)$ -модулем.

Пусть M – kG -модуль Йеттера–Дринфельда с действием $\varphi: M \rightarrow M \otimes kG$. Для $C \in \mathcal{K}(C)$ положим

$$M_C = \bigoplus_{g \in C} M_g,$$

где $M_g = \{m \in M \mid \varphi(m) = m \otimes g\}$. Простой подсчет показывает, что M_g является $kC_G(g)$ -подмодулем ограничения $M|_{kC_G(g)}$ модуля M на $kC_G(g)$ и M_C является kG -подмодулем Йеттера–Дринфельда модуля M .

Пусть M – неразложимый (простой) kG -модуль Йеттера–Дринфельда. Тогда существует класс сопряженности $C \in \mathcal{K}(G)$, для которого $M = M_C \cong D(M_{g_C})$.

Пусть N_1 и N_2 – неразложимые (простые) $kC_G(g_C)$ -модули. Тогда $D(N_1) \cong D(N_2)$, если и только если $N_1 \cong N_2$.

Иными словами, с точностью до изоморфизма неразложимые (простые) $kC_G(g_C)$ -модули находятся во взаимнооднозначном соответствии с неразложимыми (простыми) kG -модулями Йеттера–Дринфельда, где C пробегает все классы сопряженности в G .

Теперь напомним некоторые определения и результаты из [3]. Пусть A – конечномерная алгебра над k , и пусть A^{op} – противоположная алгебра. Хорошо известно, что k -векторное пространство V является правым A -модулем, если и только если V является левым A^{op} -модулем. В дальнейшем через $\text{mod } A$ мы обозначаем категорию конечномерных левых A -модулей, а через $\text{mod } A^{\text{op}}$ – категорию конечномерных правых A -модулей (которые одновременно являются левыми A^{op} -модулями). Для любых M и N из $\text{mod } A$ пусть $\mathcal{P}(M, N)$ – k -подпространство пространства $\text{Hom}_A(M, N)$, состоящее из морфизмов $f: M \rightarrow N$, которые факторизуются через проективный модуль. Вместо $\text{Hom}_A(M, N)/\mathcal{P}(M, N)$ мы будем часто писать $\underline{\text{Hom}}_A(M, N)$, а фактор-категорию $\text{mod } A/\mathcal{P}$ будем обозначать через $\underline{\text{mod}} A$. Аналогично, для любых M и N из $\text{mod } A$ пусть $\mathcal{T}(M, N) \subset \text{Hom}_A(M, N)$ – множество всех морфизмов $f: M \rightarrow N$, которые факторизуются через инъективные модули. Мы будем писать $\overline{\text{Hom}}_A(M, N)$ вместо $\text{Hom}_A(M, N)/\mathcal{T}(M, N)$ и обозначать фактор-категорию $\text{mod } A/\mathcal{T}$ через $\overline{\text{mod}} A$.

Для любого M из $\text{mod } A$ двойственное пространство $\mathcal{D}M = \text{Hom}_k(M, k) = M^*$ принадлежит категории $\text{mod } A^{\text{op}}$. Хорошо известно, что $\mathcal{D}: \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{\text{op}}$ является двойственностью, а $\mathcal{D}^2 \cong 1$ – тождественным функтором на $\text{mod } A$ и $\text{mod } A^{\text{op}}$. Двойственность $\mathcal{D}: \text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{\text{op}}$ индуцирует двойственности $\mathcal{D}: \underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A^{\text{op}}$ и $\mathcal{D}: \overline{\text{mod}} A \rightarrow \overline{\text{mod}} A^{\text{op}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть M – объект категории $\text{mod } A$, и пусть $P_1 \xrightarrow{f} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ – минимальное проективное представление. Применяя функтор $\text{Hom}_A(-, A)$ к этому представлению, мы получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}_A(M, A) \rightarrow \text{Hom}_A(P_0, A) \rightarrow \text{Hom}_A(P_1, A) \rightarrow \text{CokerHom}_A(f, A)$$

в $\text{mod } A^{\text{op}}$. Таким образом, мы получаем модуль $\text{CokerHom}_A(f, A)$ из категории $\text{mod } A^{\text{op}}$, который называется *транспозицией модуля M* и обозначается через $\text{Tr } M$.

Соответствие Tr не индуцирует двойственность $\text{mod } A \rightarrow \text{mod } A^{\text{op}}$, но оно индуцирует двойственность $\underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A^{\text{op}}$. Композиции $\underline{\text{mod}} A \xrightarrow{\text{Tr}} \underline{\text{mod}} A^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Tr}} \underline{\text{mod}} A$ и $\underline{\text{mod}} A^{\text{op}} \xrightarrow{\text{Tr}} \underline{\text{mod}} A \xrightarrow{\text{Tr}} \underline{\text{mod}} A^{\text{op}}$ изоморфны тождественному морфизму на $\underline{\text{mod}} A$ и $\underline{\text{mod}} A^{\text{op}}$ соответственно. Кроме того, композиция $\mathcal{D}\text{Tr}: \underline{\text{mod}} A \rightarrow \overline{\text{mod}} A$ представляет собой эквивалентность категорий; обратной эквивалентностью является $\text{Tr } \mathcal{D}: \overline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A$.

Для каждого M из категории $\text{mod } A$ выберем фиксированное проективное накрытие $P(M) \xrightarrow{f} M \rightarrow 0$ и положим $\Omega(M) = \text{Ker } f$. В результате мы получаем функтор $\Omega: \underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A$, который называется *функтором сизигии*. Двойственным образом, для каждого M из категории $\text{mod } A$ зафиксируем обертывающее $\tau: M \rightarrow I(M)$ и положим $\Omega^{-1}(M) = \text{Coker } \tau$. Легко проверить, что мы получаем функтор $\Omega^{-1}: \overline{\text{mod}} A \rightarrow \overline{\text{mod}} A$, который называется *функтором косизигии*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [3; предложение IV.3.5]. Если A – самоинъективная алгебра, то $\underline{\text{mod}} A = \overline{\text{mod}} A$, а $\Omega: \underline{\text{mod}} A \rightarrow \underline{\text{mod}} A$ и $\Omega^{-1}: \overline{\text{mod}} A \rightarrow \overline{\text{mod}} A$ являются взаимнообратными эквивалентностями.

Заметим, что если A – конечномерная симметрическая алгебра, то A самоинъективна, $\mathcal{D}\text{Tr} \cong \Omega^2$ и $\text{Tr } \mathcal{D} \cong \Omega^{-2}$. Этот результат был получен в [3; предложение IV.3.8]. Конечномерная алгебра Хопфа H симметрическая, если и только если H

унимодулярна и квадрат S^2 антипода S алгебры H является внутренним (см. детали в [4], [5]). Хорошо известно [6], что дринфельдов квантовый дубль $D(H)$ любой конечномерной алгебры Хопфа H унимодулярен, а квадрат антипода S^2 внутренних. Следовательно, $D(H)$ всегда симметрический. Хеннингс [7] также показал, что дубль унимодулярен.

Пусть M и N – объекты категории $\text{mod } A$. Морфизм $f: M \rightarrow N$ называется *правоминимальным*, если любой эндоморфизм $g: M \rightarrow M$, для которого $fg = f$, является автоморфизмом. Двойственным образом морфизм $f: M \rightarrow N$ называется *левоминимальным*, если любой эндоморфизм $g: N \rightarrow N$, для которого $gf = f$, является автоморфизмом.

Скажем, что морфизм $f: M \rightarrow N$ является *расщепляющим эпиморфизмом*, если тождественный морфизм $\text{id}_N: N \rightarrow N$ модуля N факторизуется через f . Двойственным образом, скажем, что морфизм $g: L \rightarrow M$ является *расщепляющим мономорфизмом*, если id_L факторизуется через g . Морфизм $f: M \rightarrow N$ является *почти расщепляющим справа*, если

- (1) он не является расщепляющим эпиморфизмом;
- (2) любой морфизм $X \rightarrow N$, который не является расщепляющим эпиморфизмом, факторизуется через f .

Двойственным образом, морфизм $g: L \rightarrow M$ называется *почти расщепляющим слева*, если

- (1) он не является расщепляющим мономорфизмом;
- (2) любой морфизм $L \rightarrow Y$, который не является расщепляющим мономорфизмом, факторизуется через g .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Точная последовательность $0 \rightarrow L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ называется *почти расщепляющей последовательностью*, если g является почти расщепляющим слева, а f – почти расщепляющим справа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4 [3; предложение V.1.14]. *Следующие условия эквивалентны для точной последовательности $0 \rightarrow L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$:*

- (1) *данная последовательность почти расщепляющая;*
- (2) *модули N и $\text{Tr } \mathcal{D}(L)$ изоморфны, и g является почти расщепляющим слева;*
- (3) *модули L и $\mathcal{D} \text{Tr}(N)$ изоморфны, и f является почти расщепляющим справа.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5 [3; предложение V.2.2]. *Пусть N – непроективный неразложимый A -модуль и $0 \rightarrow \mathcal{D} \text{Tr } N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ – нерасщепляющая точная последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- (1) *данная последовательность почти расщепляющая;*
- (2) *любой морфизм $h: N \rightarrow N$, не являющийся изоморфизмом, факторизуется через $f: M \rightarrow N$;*
- (3) $\text{Im Hom}_A(N, f) = \text{rad}(\text{End}_A(N)^{\text{op}})$.

Морфизм $g: B \rightarrow C$ в $\text{mod } A$ называется *неприводимым*, если g не является ни расщепляющим мономорфизмом, ни расщепляющим эпиморфизмом, причем если $g = ts$ для некоторых $s: B \rightarrow X$ и $t: X \rightarrow C$, то либо s – расщепляющий мономорфизм, либо t – расщепляющий эпиморфизм. Легко видеть, что морфизм $g: B \rightarrow C$ неприводим тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(g): \mathcal{D}(C) \rightarrow \mathcal{D}(B)$ неприводим.

С каждой конечномерной алгеброй A можно связать нормированный колчан Γ_A следующим образом. Вершины колчана Γ_A находятся во взаимнооднозначном соответствии с классом изоморфизма $[M]$ неразложимого модуля M . Наличие стрелки $[M] \rightarrow [N]$ означает существование неприводимого морфизма $M \rightarrow N$. Стрелка имеет норму (m, n) , если существует минимальный почти расщепляющий справа морфизм $mM \oplus X \rightarrow N$, где M не является прямым слагаемым X , и минимальный почти расщепляющий слева морфизм $M \rightarrow nN \oplus Y$, где N не является прямым слагаемым Y . Здесь mM обозначает прямую сумму m экземпляров модуля M . Вершины, соответствующие проективным модулям, называются *проективными*, а вершины, соответствующие инъективным модулям, называются *инъективными*. Отображение $\mathcal{D} \operatorname{Tr}$ индуцирует отображение непроективных вершин в инъективные вершины. Это отображение называется *сдвигом колчана Γ_A* ; мы используем для него то же обозначение $\mathcal{D} \operatorname{Tr}$ и пунктирные стрелки $[M] \dashrightarrow [\mathcal{D} \operatorname{Tr} M]$. Нормированный колчан Γ_A , вместе со сдвигом $\mathcal{D} \operatorname{Tr}$, называется *колчаном Ауслендера–Рейтена*, или, коротко, AR-колчаном, алгебры A .

3. Почти расщепляющие последовательности квантового дубля конечной группы

В этом разделе мы обсуждаем почти расщепляющие последовательности квантового дубля конечной группы. Пусть G – конечная группа, порядок которой делится на p , и пусть $H = kG$ – групповая алгебра группы G .

Следующее предложение было сформулировано и доказано в категорных терминах Ченом и Хиссом (см. [8; замечание 4.5]). Здесь мы приводим другое доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Дубль $D(H)$ имеет неприводимый (простой) проективный модуль, если и только если существует $g \in G$, для которого $kC_G(g)$ имеет неразложимый (соответственно простой) проективный модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – проективный неразложимый $D(H)$ -модуль. Тогда существуют элемент $g \in G$, для которого M_g является неразложимым $kC_G(g)$ -модулем, и изоморфизм $D(H)$ -модулей $\phi: D(M_g) \rightarrow M$, $h \otimes t \mapsto h \cdot t$. Значит, если $\psi: N \rightarrow M_g$ является эпиморфизмом $kC_G(g)$ -модулей, то $\phi D(\psi)$ является эпиморфизмом $D(H)$ -модулей из $D(N)$ в M , где $D(\psi) = \operatorname{id} \otimes_{kC_G(g)} \psi$. Следовательно, существует морфизм $D(H)$ -модулей $\theta: M \rightarrow D(N)$, удовлетворяющий условию $\phi D(\psi)\theta = \operatorname{id}_M$. Отображение θ индуцирует морфизм $kC_G(g)$ -модулей $f: M_g \rightarrow D(N)_g \cong N$, для которого $\psi f = \operatorname{id}_{M_g}$. Таким образом, M_g является проективным $kC_G(g)$ -модулем.

Обратно, пусть N – проективный неразложимый $kC_G(g)$ -модуль для некоторого $g \in G$. Тогда $D(N)$ – неразложимый $D(H)$ -модуль. Предположим, что $\phi: M \rightarrow D(N)$ – эпиморфизм $D(H)$ -модулей. Тогда ϕ индуцирует эпиморфизм $kC_G(g)$ -модулей $f: M_g \rightarrow D(N)_g \cong N$. Следовательно, найдется морфизм $kC_G(g)$ -модулей $\psi: N \rightarrow M_g$, для которого $f\psi = \operatorname{id}_N$. Отображение ψ индуцирует морфизм $D(H)$ -модулей

$$\theta: D(N) \xrightarrow{D(\psi)} D(M_g) \rightarrow M,$$

где $D(M_g) \rightarrow M$ определено правилом $h \otimes t \mapsto h \cdot t$. Непосредственная проверка показывает, что $\phi\theta = \text{id}_{D(N)}$. Следовательно, $D(N)$ является проективным $D(H)$ -модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $g \in G$, а P и M – $kC_G(g)$ -модули, причем P проективен. Если $f: P \rightarrow M$ – проективное накрытие M , то $D(f): D(P) \rightarrow D(M)$ является проективным накрытием $D(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 3.1 $D(P)$ является проективным $D(H)$ -модулем. Из [3; предложение I.4.1] вытекает, что эпиморфизм $f: P \rightarrow M$ является проективным накрытием M , если и только если f минимально справа.

Пусть $D(\varphi): D(P) \rightarrow D(P)$ – эндоморфизм, удовлетворяющий условию

$$D(f)D(\varphi) = D(f).$$

Тогда $D(\varphi)$ индуцирует автоморфизм $kC_G(g)$ -модулей $\varphi: P \rightarrow P$, для которого выполнено $f\varphi = f$, поскольку $f: P \rightarrow M$ минимально справа. Следовательно, $D(\varphi)$ – автоморфизм.

В качестве непосредственного следствия получается следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть $g \in G$ и M – $kC_G(g)$ -модуль. Если

$$\dots \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$$

является минимальной проективной резольвентой модуля M , то

$$\dots \xrightarrow{D(d_n)} D(P_{n-1}) \xrightarrow{D(d_{n-1})} \dots \xrightarrow{D(d_2)} D(P_1) \xrightarrow{D(d_1)} D(P_0) \xrightarrow{D(d_0)} D(M) \rightarrow 0$$

является минимальной проективной резольвентой дубля $D(M)$. В частности,

$$\Omega^2(D(M)) = \text{Ker}(D(d_1)) = kG \otimes_{kC_G(g)} \text{Ker } d_1 = D(\text{Ker } d_1).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть N – непроективный неразложимый $kC_G(g)$ -модуль для некоторого $g \in G$ и $0 \rightarrow L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ – почти расщепляющая последовательность $kC_G(g)$ -модулей. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $\text{rad } \text{End}_{D(H)}(D(N))$ содержится в $\text{ImHom}_{D(H)}(D(N), D(f))$;
- (2) $0 \rightarrow D(L) \xrightarrow{D(h)} D(M) \xrightarrow{D(f)} D(N) \rightarrow 0$ является почти расщепляющей последовательностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Для краткости будем писать $A = \text{End}_{D(H)}(D(N))$ и $B = \text{ImHom}_{D(H)}(D(N), D(f))$. Поскольку A является локальным кольцом, из того, что $\text{rad } A$ содержится в B , вытекает, что B совпадает с A или $\text{rad } A$. Если $B = A$, то $D(f)$ – расщепляющий эпиморфизм. Значит,

$$D(M) \cong D(L) \oplus D(N) \cong D(L \oplus N).$$

Следовательно, $M \cong L \oplus N$, в противоречие с тем, что f не является расщепляющим эпиморфизмом. Теперь предположим, что $B = \text{rad } A$. Это означает, что эндоморфизм $D(N) \rightarrow D(N)$ факторизуется через $D(f)$ тогда и только тогда, когда он не является автоморфизмом. Из предложения 2.5 вытекает, что последовательность

$$0 \rightarrow D(L) \xrightarrow{D(h)} D(M) \xrightarrow{D(f)} D(N) \rightarrow 0$$

является почти расщепляющей последовательностью, поскольку она не является расщепляющей, $D \operatorname{Tr}(D(N)) \cong \Omega^2(D(N)) \cong D(L)$ (согласно следствию 3.3) и каждый эндоморфизм $D(N) \rightarrow D(N)$, не являющийся автоморфизмом, факторизуется через $D(M)$.

Доказательство импликации (2) $\Rightarrow$ (1) тривиально.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть N – непроективный неразложимый $kC_G(g)$ -модуль для некоторого $g \in G$ и $0 \rightarrow L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ – почти расщепляющая последовательность $kC_G(g)$ -модулей.

Тогда $\operatorname{Im} \operatorname{Hom}_{D(H)}(D(N), D(f))$ содержит $\operatorname{rad} \operatorname{End}_{D(H)}(D(N))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для краткости положим

$$A = \operatorname{End}_{D(H)}(D(N)), \quad B = \operatorname{Im} \operatorname{Hom}_{D(H)}(D(N), D(f)).$$

Предположим, что $D(\varphi)$ содержится в $\operatorname{rad} A$. Тогда для некоторого натурального m имеем $\operatorname{id} \otimes_{kC_G(g)} \varphi^m = 0$. Следовательно, $\varphi^m = 0$, а значит, φ содержится в $\operatorname{rad} \operatorname{End}_{kC_G(g)}(N)$. Из предложений 2.4 и 2.5 вытекает существование морфизма $\psi: N \rightarrow M$ со свойством $f\psi = \varphi$. Поэтому $D(f)D(\psi) = D(\varphi)$, так что $D(\varphi)$ содержится в B .

Из предложений 3.4 и 3.5 и описания kG -модулей Йеттера–Дринфельда вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть N – непроективный неразложимый $kC_G(g_C)$ -модуль для некоторого класса сопряженности C в группе G , и пусть $0 \rightarrow L \xrightarrow{h} M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ – почти расщепляющая последовательность $kC_G(g_C)$ -модулей. Тогда

$$0 \rightarrow D(L) \xrightarrow{D(h)} D(M) \xrightarrow{D(f)} D(N) \rightarrow 0$$

является почти расщепляющей последовательностью $D(H)$ -модулей. Таким путем можно получить любую почти расщепляющую последовательность для $D(H)$ -модулей.

4. Применение квантового дубля диэдральной группы

Предположим, что $n = p^s t$ – нечетное натуральное число, причем $p \nmid t$. Пусть

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = 1, b^2 = 1, (ab)^2 = 1 \rangle = \{1, a, \dots, a^{n-1}, b, ba, \dots, ba^{n-1}\}$$

– диэдральная группа порядка $2n$. Тогда D_n имеет классы сопряженности

$$\{1\}, \quad \{a^i, a^{n-i}\} \quad \left(1 \leq i \leq \frac{n-1}{2}\right), \quad \{a^j b \mid 0 \leq j \leq n-1\}$$

с представителями $1, a^i, 1 \leq i \leq (n-1)/2, b$, где $1, b, a^{p^s}, a^{2p^s}, \dots, a^{(t-1)/2p^s}$ p -регулярны.

Силовские p -подгруппы группы D_n имеют порядок p^s . Циклическая подгруппа $C_n = \{1, a, \dots, a^{n-1}\}$ является нормальной подгруппой группы D_n . Пусть P – подгруппа группы C_n , порожденная элементом a^t . Тогда $P = \{1, a^t, \dots, a^{(p^s-1)t}\}$ является нормальной силовой p -подгруппой группы D_n . Согласно результатам, полученным в [9], [10], групповая алгебра kD_n имеет конечный тип представления и допускает $p^s(t+3)/2$ разных неразложимых модулей с точностью до изоморфизма.

4.1. Неразложимые представления квантового дубля диэдральной группы. Здесь мы приводим краткую сводку результатов, полученных в статье [11], содержащей описание всех неразложимых представлений квантового дубля $D(kD_n)$.

ЛЕММА 4.1 [11; теорема 3.4]. Пусть $C_n = \{1, a, \dots, a^{p^s t - 1}\}$ – циклическая группа порядка $p^s t$. Тогда kC_n имеет $p^s t$ неизоморфных неразложимых представлений

$$\rho_{r,i}(a) = \begin{pmatrix} \xi^i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \xi^i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \xi^i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \xi^i \end{pmatrix}_{r \times r} = A_{r,i},$$

где $\xi \in k$ – первообразный корень t -й степени из единицы, $r = 1, 2, \dots, p^s$ и $i = 0, 1, \dots, t-1$.

Для $r = 1, \dots, p^s$ пусть $T = (t_{ij}) \in M_r(k)$ – верхнетреугольная матрица, определенная равенствами $t_{rr} = 1$, $t_{ij} = -t_{i+1,j} - t_{i+1,j+1}$ и $t_{ii} = -t_{i+1,i+1}$ для всех $1 \leq i < j$.

Для $r = 1, 2, \dots, p^s$ и $i = 1, \dots, (t-1)/2$ рассмотрим представления

$$\Omega_{2r,i}(a) = \begin{pmatrix} A_{r,i} & 0 \\ 0 & A_{r,i}^{-1} \end{pmatrix}_{2r \times 2r}, \quad \Omega_{2r,i}(b) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}_{2r \times 2r}$$

алгебры kD_n , где I – единичная матрица размера $r \times r$.

Для $r = 1, 2, \dots, p^s$ рассмотрим также представления

$$\Phi_{r,0}(a) = A_{r,0}, \quad \Phi_{r,0}(b) = T, \quad \Phi'_{r,0}(a) = A_{r,0}, \quad \Phi'_{r,0}(b) = -T$$

алгебры kD_n .

ЛЕММА 4.2 [11; следствие 3.15]. Множество

$$\left\{ \Phi_{1,0}, \Phi'_{1,0}, \Omega_{2,i} \mid 1 \leq i \leq \frac{t-1}{2} \right\}$$

состоит из всех неприводимых представлений алгебры kD_n с точностью до изоморфизма.

ЛЕММА 4.3 [11; теорема 3.21]. Множество

$$\left\{ \Phi_{r,0}, \Phi'_{r,0}, \Omega_{2r,i} \mid 1 \leq r \leq p^s, 1 \leq i \leq \frac{t-1}{2} \right\}$$

состоит из всех неразложимых представлений алгебры kD_n с точностью до изоморфизма.

Рассмотрим теперь неразложимые модули над групповыми алгебрами централизаторов представителей классов сопряженности группы D_n . Групповая алгебра $kC_{D_n}(b) = k\langle b \rangle$ полупроста, поскольку p не делит порядок подгруппы $\langle b \rangle$. Она имеет

только 2 неразложимых модуля, U_1 и U_2 ; эти модули одномерны, просты и проективны и обладают структурой

$$b \cdot u_i = (-1)^i u_i, \quad 1 \leq i \leq 2, \quad u_i \in U_i.$$

По лемме 4.1 групповая алгебра $kC_{D_n}(a^l) = kC_n$, $1 \leq l \leq (n-1)/2$, имеет n неразложимых представлений $\rho_{r,i}$, $1 \leq r \leq p^s$, $0 \leq i \leq t-1$. Мы обозначаем соответствующие им неразложимые модули через $V(r, i)$. Очевидно, все $V(1, i)$ являются простыми kC_n -модулями с точностью до изоморфизма. Для каждого l , $1 \leq l \leq (n-1)/2$, определим $V_l(r, i) = V(r, i)$ как kC_n -модули; нижний индекс l указывает, что соответствующий модуль является $kC_{D_n}(a^l)$ -модулем.

По лемме 4.3 групповая алгебра $kC_{D_n}(1) = kD_n$ имеет $p^s(t+3)/2$ неразложимых представлений $\Phi_{r,0}$, $\Phi'_{r,0}$ и $\Omega_{2r,i}$, $1 \leq r \leq p^s$, $1 \leq i \leq (t-1)/2$. Мы обозначаем соответствующие неразложимые модули через $W(+r)$, $W(-r)$ и $W(2r, i)$. По лемме 4.2 $W(+1)$, $W(-1)$ и $W(2, i)$ являются простыми kD_n -модулями с точностью до изоморфизма. Согласно характеристизации модулей Йеттера–Дринфельда над групповыми алгебрами, приведенной во втором разделе, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4.4 [11; теорема 4.1]. *Предположим, что $n = p^s t$ нечетно. Тогда*

$$\left\{ \begin{array}{l} W(+r), W(-r), W(2r, i), \\ D(U_1), D(U_2), D(V_l(r, j)) \end{array} \middle| \begin{array}{l} 1 \leq r \leq p^s, 0 \leq j \leq t-1, \\ 1 \leq i \leq \frac{t-1}{2}, 1 \leq l \leq \frac{n-1}{2} \end{array} \right\}$$

– полное множество неразложимых kD_n -модулей Йеттера–Дринфельда с точностью до изоморфизма.

4.2. Почти расщепляющие последовательности для групповых алгебр kD_n . В этом подразделе $H = kD_n$ обозначает групповую алгебру D_n . Пусть

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2t} \sum_{j=0}^{t-1} (a^{jp^s} + a^{jp^s} b), & e_2 &= \frac{1}{2t} \sum_{j=0}^{t-1} (a^{jp^s} - a^{jp^s} b), \\ e_{i1} &= \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \xi^{j(i-2)} a^{jp^s}, & e_{i2} &= \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} \xi^{j(2-i)} a^{jp^s} \quad \text{для всех } 3 \leq i \leq \frac{t+3}{2}. \end{aligned}$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\{e_1, e_2, e_{i1}, e_{i2} \mid 3 \leq i \leq (t+3)/2\}$ является множеством ненулевых ортогональных примитивных идемпотентов, и что

$$e_1 + e_2 + \sum_{i=3}^{(t+3)/2} (e_{i1} + e_{i2}) = 1.$$

Легко также доказать, что неразложимые проективные H -модули He_1 и He_2 p^s -мерны, а H -модули $He_{i1} \cong He_{i2}$ $2p^s$ -мерны. Сравнивая размерности, получаем, что все $W(\pm p^s)$ и $W(2p^s, i)$, $1 \leq i \leq (t-1)/2$, являются неразложимыми проективными H -модулями с точностью до изоморфизма.

Пусть $\{v_j \mid 1 \leq j \leq 2r\}$ – k -базис модуля $W(2r, i)$ и соответствующие матричные представления совпадают с $\Omega_{2r,i}$. Пусть W – $2m$ -мерное векторное пространство, натянутое на векторы

$$\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+m}\}$$

над k для всех $1 \leq m \leq r$. Легко доказать, что W – подмодуль модуля $W(2r, i)$, изоморфный модулю $W(2m, i)$. Нетрудно проверить также, что $\text{soc } W(2p^s, i) \cong W(2, i)$. Значит, $\text{soc } W(2r, i) \cong W(2, i)$ для всех $1 \leq i \leq (t-1)/2$ и $1 \leq r \leq p^s$. Таким образом, мы можем считать, что $W(2m, i) \subseteq W(2r, i)$ для всех $1 \leq m \leq r$ и $1 \leq i \leq (t-1)/2$. Аналогично доказывается, что $\text{soc } W(\pm r) \cong W(\pm 1)$. Мы можем считать, что $W(\pm m) \subseteq W(\pm r)$. Эти рассуждения приводят к следующему результату.

ЛЕММА 4.5. *В обозначениях, введенных выше, для всех $1 \leq i \leq (t-1)/2$ и $1 \leq r \leq p^s$ справедливы следующие утверждения:*

- (1) $\text{soc } W(\pm r) \cong W(\pm 1)$ и $\text{soc } W(2r, i) \cong W(2, i)$;
- (2) все $W(\pm p^s)$ и $W(2p^s, i)$ являются неразложимыми проективными H -модулями с точностью до изоморфизма;
- (3) имеем

$$\begin{aligned} H &= He_1 \oplus He_2 \bigoplus_{3 \leq j \leq (t+3)/2} (He_{j1} \oplus He_{j2}) \\ &\cong W(+p^s) \oplus W(-p^s) \bigoplus_{1 \leq j \leq (t-1)/2} 2W(2p^s, j) \end{aligned}$$

как H -модули.

Пусть A – произвольная конечномерная алгебра над полем k , и пусть $J = J(A)$ – радикал Якобсона алгебры A . Предположим, что M – конечномерный A -модуль. Тогда длина $l(M)$ модуля M конечна. Наименьшее неотрицательное целое i , для которого $J^i M = 0$, называется *радикальной длиной* модуля M и обозначается через $\text{rl}(M)$; ряд $0 \subset J^{i-1} M \subset \dots \subset J^2 M \subset JM \subset M$ называется *радикальным рядом* модуля M . Радикальная длина M называется также *длиной Лёви* модуля M . Для $j > 1$ пусть $\text{soc}^j M$ – прообраз множества $\text{soc}(M/\text{soc}^{j-1} M)$ в M . Наименьшее целое t , для которого $\text{soc}^t M = M$, называется *цокольной длиной* модуля M и обозначается через $\text{sl}(M)$; ряд

$$0 \subset \text{soc } M \subset \text{soc}^2 M \subset \dots \subset \text{soc}^{t-1} M \subset \text{soc}^t M = M$$

называется *цокольным рядом* модуля M . Хорошо известно, что $\text{rl}(M) = \text{sl}(M)$ [3; предложение II.4.7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. *В тех же обозначениях, что и выше, для всех $1 \leq i \leq (t-1)/2$, $1 \leq r \leq p^s$ выполнены следующие утверждения:*

- (1) $W(2r, i)/W(2m, i) \cong W(2(r-m), i)$ как H -модули для всех $1 \leq m < r$, и

$$0 \subset W(2, i) \subset W(4, i) \subset \dots \subset W(2(r-1), i) \subset W(2r, i)$$

является цокольным рядом модуля $W(2r, i)$;

- (2) $W(\pm r)/W(\pm m) \cong W(\pm(r-m))$ как H -модули для всех $1 \leq m < r$, и

$$0 \subset W(\pm 1) \subset W(\pm 2) \subset \dots \subset W(\pm(r-1)) \subset W(\pm r)$$

является цокольным рядом модуля $W(\pm r)$;

- (3) если $J = J(H)$ – радикал Якобсона модуля H , то $J^{p^s} = 0$, т.е. $\text{rl}(H) = p^s$;
- (4) H является алгеброй Накаямы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\{v_j \mid 1 \leq j \leq 2r\}$ – определенный выше k -базис модуля $W(2r, i)$ и $\{\bar{v}_j \mid 1 \leq j \leq 2r\}$ – его образ при естественном эпиморфизме $W(2r, i) \rightarrow W(2r, i)/W(2m, i)$. Как уже отмечалось перед леммой 4.5, $W(2m, i)$ является подмодулем модуля $W(2r, i)$, натянутым на векторы $\{v_1, v_2, \dots, v_m, v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+m}\}$. Значит,

$$W(2r, i)/W(2m, i) \cong \text{span}\{\bar{v}_{m+1}, \dots, \bar{v}_r, \bar{v}_{r+m+1}, \dots, \bar{v}_{2r}\}$$

как H -модуль; легко проверить, что этот H -модуль изоморфен $W(2(r-m), i)$.

Согласно лемме 4.5 $\text{soc } W(2r, i) \cong W(2, i)$. Следовательно,

$$\text{soc}(W(2r, i)/W(2m, i)) \cong \text{soc } W(2(r-m), i) \cong W(2, i)$$

как H -модули. Значит, $\text{soc}^2 W(2r, i)/\text{soc } W(2r, i) \cong W(2, i)$, откуда вытекает, что $\text{soc}^2 W(2r, i) \cong W(4, i)$. Ясно, что $W(2r, i)/\text{soc}^2 W(2r, i) \cong W(2(r-2), i)$, откуда $\text{soc}^3 W(2r, i) \cong W(6, i)$. Продолжая аналогичным образом, мы приходим к заключению, что $\text{soc}^j W(2r, i) \cong W(2j, i)$ для всех $1 \leq j \leq r$. Следовательно,

$$0 \subset W(2, i) \subset W(4, i) \subset \dots \subset W(2(r-1), i) \subset W(2r, i)$$

является цокольным рядом модуля $W(2r, i)$.

Утверждение (2) доказывается аналогично (1).

Докажем (3). Из (1) следует, что

$$\text{rl}(W(\pm p^s)) = \text{sl}(W(\pm p^s)) = p^s, \quad \text{rl}(W(2p^s, i)) = \text{sl}(W(2p^s, i)) = p^s.$$

По лемме 4.5 имеем $\text{rl}(H) = p^s$. Значит, $J^{p^s} = 0$.

(4) Из (1) и (2) вытекает, что цокольные и композиционные ряды модулей $W(\pm p^s)$ и $W(2p^s, i)$ совпадают, т.е. эти модули универсальны. Значит, H является алгеброй Накаямы.

Из доказанного предложения немедленно вытекает такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4.7. В тех же обозначениях, что и выше, для всех $1 \leq i \leq (t-1)/2$, $1 \leq r \leq p^s$ и $1 \leq j \leq r-1$ верны равенства

$$J^j W(\pm r) = W(\pm(r-j)), \quad J^j W(2r, i) = W(2(r-j), i).$$

Следующая лемма принадлежит Ауслендеру [3; предложение IV.2.6].

ЛЕММА 4.8. Предположим, что M – универсальный непроективный модуль длины t над алгеброй Накаямы A . Если $P \rightarrow M$ – проективное накрытие, то $D \text{Tr } M \cong JP/J^{m+1}P$.

Для $1 \leq r \leq p^s - 1$ и $1 \leq i \leq (t-1)/2$ пусть $f_r: W(2r, i) \rightarrow W(2(r+1), i)$ – естественное включение и $p_r: W(2(r+1), i) \rightarrow W(2r, i)$ – естественный эпиморфизм. Рассмотрим последовательность

$$\delta 1: 0 \rightarrow W(2r, i) \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_r \\ p_r \end{pmatrix}} W \xrightarrow{(-p_{r+1}, f_{r-1})} W(2r, i) \rightarrow 0,$$

где $W = W(2(r+1), i) \oplus W(2(r-1), i)$ и $W(0, i) = 0$. Рассматривая длины, нетрудно проверить, что эта последовательность точна. Из следствия 4.7 и леммы 4.8 вытекает, что $\mathcal{D} \operatorname{Tr} W(2r, i) = W(2r, i)$ и каждый не являющийся изоморфизмом морфизм из модуля $W(2r, i)$ в себя факторизуется через f_{r-1} , а значит, и через $(-p_{r+1}, f_{r-1})$. Следовательно, $\delta 1$ – почти расщепляющая последовательность по предложению 2.5. Общий метод вычисления почти расщепляющей последовательности для произвольной алгебры Накаямы описан в доказательстве теоремы VI.2.1 в [3].

Для $1 \leq r \leq p^s - 1$ пусть $h_r: W(\pm r) \rightarrow W(\pm(r+1))$ – естественное включение и $q_r: W(\pm(r+1)) \rightarrow W(\pm r)$ – естественный эпиморфизм. Тем же путем, что и выше, получаем почти расщепляющую последовательность

$$\delta 2: 0 \rightarrow W(\pm r) \xrightarrow{\begin{pmatrix} h_r \\ q_r \end{pmatrix}} W \xrightarrow{(-q_{r+1}, h_{r-1})} W(\pm r) \rightarrow 0,$$

где $W = W(\pm(r+1)) \oplus W(\pm(r-1))$ и $W(\pm 0) = 0$.

4.3. Почти расщепляющая последовательность для групповой алгебры kC_n . В этом подразделе через $H = kC_n$ мы обозначаем групповую алгебру циклической группы $C_n = \langle a \rangle$ порядка n . Пусть

$$e_i = \frac{1}{t} \sum_{j=0}^{t-1} (\xi^i a^{p^s})^j, \quad 1 \leq i \leq t.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $\{e_i \mid 1 \leq i \leq t\}$ – множество ненулевых ортогональных примитивных идемпотентов, и что $\sum_{i=1}^t e_i = 1$. Легко проверить, что неразложимые проективные H -модули He_i p^s -мерны. Следовательно, модули $V(p^s, i)$, $0 \leq i \leq t-1$, исчерпывают все неразложимые проективные H -модули с точностью до изоморфизма.

Тем же методом, что и в предыдущем подразделе, можно доказать следующие утверждения и построить почти расщепляющую последовательность для H .

ЛЕММА 4.9. *В тех же обозначениях, что и выше, для всех $0 \leq i \leq t-1$, $1 \leq r \leq p^s$ справедливы следующие утверждения:*

- (1) $\operatorname{soc} V(r, i) \cong V(1, i)$;
- (2) модули $V(p^s, i)$ исчерпывают все неразложимые проективные H -модули с точностью до изоморфизма;
- (3) имеем

$$H = \bigoplus_{1 \leq j \leq t} He_j \cong \bigoplus_{0 \leq j \leq t-1} V(p^s, j)$$

как H -модули.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. *В тех же обозначениях, что и выше, для всех $0 \leq i \leq t-1$ и $1 \leq r \leq p^s$ справедливы следующие утверждения:*

- (1) для любых $1 \leq m < r$ модуль $V(r, i)$ содержит единственный подмодуль, изоморфный $V(m, i)$ (т.е. можно считать, что $V(m, i) \subset V(r, i)$);
- (2) $V(r, i)/V(m, i) \cong V(r-m, i)$ как H -модули для всех $1 \leq m < r$, и

$$0 \subset V(1, i) \subset V(2, i) \subset \cdots \subset V(r-1, i) \subset V(r, i)$$

– цокольный ряд модуля $V(r, i)$;

- (3) пусть $J = J(H)$ – радикал Якобсона алгебры H ; тогда $J^{p^s} = 0$, т.е. $\text{rl}(H) = p^s$;
 (4) H является алгеброй Накаямы.

СЛЕДСТВИЕ 4.11. В тех же обозначениях, что и выше, для всех $0 \leq i \leq t-1$, $1 \leq r \leq p^s$ и $1 \leq j \leq r-1$ выполнено равенство

$$J^j V(r, i) = V(r-j, i).$$

Для $1 \leq r \leq p^s-1$ и $0 \leq i \leq t-1$ пусть $f_r: V(r, i) \rightarrow V(r+1, i)$ – естественное включение и $p_r: V(r+1, i) \rightarrow V(r, i)$ – естественный эпиморфизм, удовлетворяющий условию $\text{Ker } p_r = V(1, i)$. Тогда последовательность

$$\delta 3: 0 \rightarrow V(r, i) \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_r \\ p_r \end{pmatrix}} V \xrightarrow{(-p_{r+1}, f_{r-1})} V(r, i) \rightarrow 0,$$

где $V = V(r+1, i) \oplus V(r-1, i)$ и $V(0, i) = 0$, является почти расщепляющей.

4.4. Основные результаты. Из теорем 3.6 и 4.4 и почти расщепляющих последовательностей $\delta 1$, $\delta 2$ и $\delta 3$ получаем следующие связные компоненты AR-колчана $\Gamma_{D(kD_n)}$, $0 \leq i \leq t-1$, $1 \leq j \leq (t-1)/2$, $1 \leq l \leq (n-1)/2$:

$$\begin{aligned} [W(+1)] &\xrightarrow{\curvearrowright} [W(+2)] \xrightarrow{\curvearrowright} \cdots \xrightarrow{\curvearrowright} [W+(p^s-1)] \xrightarrow{\curvearrowright} [W(+p^s)] , \\ [W(-1)] &\xrightarrow{\curvearrowright} [W(-2)] \xrightarrow{\curvearrowright} \cdots \xrightarrow{\curvearrowright} [W(-(p^s-1))] \xrightarrow{\curvearrowright} [W(-p^s)] , \\ [W(2, j)] &\xrightarrow{\curvearrowright} [W(4, j)] \xrightarrow{\curvearrowright} \cdots \xrightarrow{\curvearrowright} [W(2p^s-2, j)] \xrightarrow{\curvearrowright} [W(2p^s, j)] , \\ [D(V_i(1, i))] &\xrightarrow{\curvearrowright} [D(V_i(2, i))] \xrightarrow{\curvearrowright} \cdots \xrightarrow{\curvearrowright} [D(V_i(p^s-1, i))] \xrightarrow{\curvearrowright} [D(V_i(p^s, i))] , \end{aligned}$$

где каждая стрелка имеет норму $(1, 1)$, а пунктирные стрелки обозначают сдвиг.

5. Приложение

В случае, когда $n = p^s t$ четно, аналогичным образом можно получить связные компоненты AR-колчана $\Gamma_{D(kD_n)}$. Однако вычисления очень громоздки, поэтому ниже мы лишь формулируем основные результаты.

Предположим, что $n = p^s t$ четно. Тогда D_n имеет классы сопряженности

$$\{1\}, \quad \{a^i, a^{n-i}\}, \quad 1 \leq i \leq \frac{n}{2},$$

$$\left\{ a^{2i}b \mid 0 \leq i \leq \frac{n-2}{2} \right\}, \quad \left\{ a^{2i+1}b \mid 0 \leq i \leq \frac{n-2}{2} \right\}$$

с представителями $1, a^i, 1 \leq i \leq n/2, b$ и ab , где $1, b, ab, a^{p^s}, a^{2p^s}, \dots, a^{(t/2)p^s}$ p -регулярны.

Согласно [11; Theorem 3.21] групповая алгебра $kC_{D_n}(1) = kC_{D_n}(a^{n/2}) = kD_n$ имеет $p^s(t+6)/2$ неразложимых представлений $\Phi_{r,0}, \Phi'_{r,0}, \Phi_{r,t/2}, \Phi'_{r,t/2}$ и $\Omega_{2r,i}, 1 \leq$

$r \leq p^s$, $1 \leq i \leq t/2 - 1$. Мы обозначаем соответствующие неразложимые модули через $W(+r)$, $W(-r)$, $U(+r)$, $U(-r)$ и $W(2r, i)$.

Пусть $C_{D_n}(b) = \langle b, a^{n/2} \rangle$ – четверная группа Клейна, порожденная элементами b и $a^{n/2}$, а $C_{D_n}(ab) = \langle ab, a^{n/2} \rangle$ – четверная группа Клейна, порожденная элементами ab и $a^{n/2}$. Алгебры $kC_{D_n}(b)$ и $kC_{D_n}(ab)$ полупросты, потому что $p \nmid 4$.

Группа $C_{D_n}(a^l) = C_n$, $1 \leq l \leq n/2 - 1$, является циклической группой порядка n . Для $1 \leq r \leq p^s$ и $0 \leq i \leq t - 1$ используем обозначение $V_l(r, i)$ для $kC_{D_n}(a^l)$ -модулей, построенных аналогично случаю нечетного n .

В случае группы $C_{D_n}(a^{n/2}) = D_n$ дубли

$$D(W(+r)), \quad D(W(-r)), \quad D(U(+r)), \quad D(U(-r)), \quad D(W(2r, i))$$

являются неизоморфными неразложимыми kD_n -модулями Йеттера–Дринфельда, причем

$$\begin{aligned} D(W(+r)) &= W(+r), & D(W(-r)) &= W(-r), & D(U(+r)) &= U(+r), \\ D(U(-r)) &= U(-r), & D(W(2r, i)) &= W(2r, i) \end{aligned}$$

как kD_n -модули. Структуры комодулей определяются отображениями

$$\varphi: D(V) \rightarrow D(V) \otimes kD_n, \quad \varphi(v) = v \otimes a^{n/2} \quad \text{для } v \in V,$$

где $V = W(+r)$, $W(-r)$, $U(+r)$, $U(-r)$ или $W(2r, i)$, заметим, что эти kD_n -модули Йеттера–Дринфельда отличаются от kD_n -модулей Йеттера–Дринфельда, индуцированных из $kC_{D_n}(1) = kD_n$.

Используя теорему 4.2 из [11], теорему 3.6 и рассуждения из четвертого раздела, мы получаем следующие связанные компоненты AR-колчана $\Gamma_{D(kD_n)}$, $0 \leq i \leq t - 1$, $1 \leq j \leq t/2 - 1$, $1 \leq l \leq n/2 - 1$:

$$\begin{aligned} & [W(+1)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [W(+2)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} \cdots \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [W(+p^s - 1)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [W(+p^s)], \\ & [W(-1)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [W(-2)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} \cdots \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [W(-(p^s - 1))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [W(-p^s)], \\ & [U(+1)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [U(+2)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} \cdots \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [U(+p^s - 1)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [U(+p^s)], \\ & [U(-1)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [U(-2)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} \cdots \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [U(-(p^s - 1))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [U(-p^s)], \\ & [W(2, j)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [W(4, j)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} \cdots \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [W(2p^s - 2, j)] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [W(2p^s, j)], \\ & [D(W(+1))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(W(+2))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} \cdots \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(W(+p^s - 1))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(W(+p^s))], \\ & [D(W(-1))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(W(-2))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} \cdots \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(W(-(p^s - 1)))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(W(-p^s))], \\ & [D(U(+1))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(U(+2))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} \cdots \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(U(+p^s - 1))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(U(+p^s))], \\ & [D(U(-1))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(U(-2))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} \cdots \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(U(-(p^s - 1)))] \xrightleftharpoons{\curvearrowright} [D(U(-p^s))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [D(W(2, j))] \xrightarrow{\curvearrowright} [D(W(4, j))] \xrightarrow{\curvearrowright} \cdots \xrightarrow{\curvearrowright} [D(W(2p^s - 2, j))] \xrightarrow{\curvearrowright} [D(W(2p^s, j))], \\
& [D(V_l(1, i))] \xrightarrow{\curvearrowright} [D(V_l(2, i))] \xrightarrow{\curvearrowright} \cdots \xrightarrow{\curvearrowright} [D(V_l(p^s - 1, i))] \xrightarrow{\curvearrowright} [D(V_l(p^s, i))],
\end{aligned}$$

где каждая стрелка имеет норму $(1, 1)$ и пунктирные стрелки обозначают сдвиг.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. J. Witherspoon, “The representation ring of the quantum double of a finite group”, *J. Algebra*, **179**:1 (1996), 305–329.
- [2] S. Majid, “Doubles of quasitriangular Hopf algebras”, *Comm. Algebra*, **19**:11 (1991), 3061–3073.
- [3] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Stud. Adv. Math., **36**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [4] L. A. Lambe, D. E. Radford, “Algebraic aspects of the quantum Yang–Baxter equation”, *J. Algebra*, **154**:1 (1993), 228–288.
- [5] U. Oberst, H. J. Schneider, “Über Untergruppen Endlicher Algebraischer Gruppen”, *Manuscripta Math.*, **8**:3 (1973), 217–241.
- [6] D. E. Radford, “Minimal quasitriangular Hopf algebras”, *J. Algebra*, **157**:2 (1993), 285–315.
- [7] M. A. Hennings, “Invariants of links and 3-manifolds obtained from Hopf algebras”, *J. London Math. Soc.* (2), **54**:3 (1996), 594–624.
- [8] H. Chen, G. Hiss, “Notes on the Drinfeld double of finite dimensional group algebras”, *Algebra Colloq.*, **19**:3 (2012), 483–492.
- [9] D. G. Higman, “Indecomposable modules at characteristic p ”, *Duke Math. J.*, **21**:2 (1954), 377–381.
- [10] G. J. Janusz, “Indecomposable modules of groups with a cyclic Sylow subgroup”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **125**:2 (1966), 288–295.
- [11] J. Dong, H. Chen, “The Representations of quantum double of dihedral groups”, *Algebra Colloq.*, **20**:1 (2013), 95–108.

Дж. Донг

Nanjing Agricultural University, China

E-mail: dongjc@njau.edu.cn

Поступило

26.08.2011

Исправленный вариант

31.10.2012

Х. Чен

Yangzhou University, China

E-mail: hxchen@yzu.edu.cn