Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Э. Гришанина, Н. Г. Иноземцева, М. Б. Садовникова, О деформационном методе исследования асимптотической устойчивости в целом, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 3, 350–358

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10425>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:02:22

УДК 517.9

О деформационном методе исследования асимптотической устойчивости в целом

Г. Э. Гришанина, Н. Г. Иноземцева, М. Б. Садовникова

В работе рассматривается однопараметрическое семейство систем

$$x' = F(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

где $F: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное векторное поле, решение $x(t) = \varphi(t, y, \lambda)$ однозначно определяется начальным условием $x(0) = y = \varphi(0, y, \lambda)$ и может быть продолжено на всей оси $(-\infty, +\infty)$ при всех $\lambda \in [0, 1]$. Получены условия, обеспечивающие сохранение свойства асимптотической устойчивости в целом стационарного решения такой системы при изменении параметра λ .

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10425

В последние десятилетия методы нелинейного анализа позволили получить существенное продвижение в ряде задач теории оптимального управления, теории колебаний, вариационном исчислении, теории устойчивости. Идеи и методы нелинейного анализа применяются [1]–[6] в экономических приложениях, при расчете оптимального управления в распределенных системах, в задачах теории негладкой оптимизации, в задачах о колебательных процессах в системах автоматического регулирования. Эти обстоятельства обуславливают актуальность и важность внедрения методов современного нелинейного анализа в различные области теории управления, оптимизации и их приложений, при этом важное значение имеет исследование вопроса об асимптотической устойчивости и устойчивости в целом нелинейных систем дифференциальных уравнений. В работах [7], [8] были найдены признаки асимптотической устойчивости и устойчивости в целом системы $x' = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, не имеющей седла в бесконечности, где $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное векторное поле.

Деформационный (гомотопический) метод исследования оптимизационных задач был предложен в работах [9], [10]. Этот метод привел к существенным результатам во многих областях математики, в частности, дал новые подходы к исследованию устойчивости градиентных, потенциальных и гамильтоновых систем. Он оказался полезным и эффективным при изучении задач математической физики, вариационного исчисления, задач математического программирования таких, как анализ устойчивости решений, алгоритма исследования вырожденных экстремалей, связи теорем единственности краевых задач с признаками минимума интегральных функционалов.

В данной работе с помощью деформационного метода получены условия, обеспечивающие сохранение свойства асимптотической устойчивости в целом стационарного решения однопараметрического семейства систем при изменении параметра.

Рассмотрим систему

$$x' = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное векторное поле. Будем предполагать, что каждое решение $x(t)$ этой системы однозначно определено начальным условием $x(0) = y$ и может быть продолжено на всей оси $(-\infty, +\infty)$. Через $\varphi(t, y)$ обозначим решение $x(t)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = y$, т.е. $\varphi(0, y) = y$. Стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ системы дифференциальных уравнений $x' = F(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, называется *устойчивым (по Ляпунову)* [11], если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\varphi(t, y) - x_0| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0 \quad \forall y, \quad |y - x_0| < \delta,$$

($|\cdot|$ — норма в пространстве $\mathbb{R}^n$).

Стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и для некоторого $\delta_0 > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t, y) - x_0| = 0 \quad \forall y, \quad |y - x_0| < \delta_0.$$

Стационарное решение $x(t) \equiv x_0$ называется *асимптотически устойчивым в целом*, если оно устойчиво и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t, y) - x_0| = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство систем

$$x' = F(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad (1)$$

где $F: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывное векторное поле. Будем предполагать, что решение $x(t) = \varphi(t, y, \lambda)$ однозначно определяется начальным условием $x(0) = y = \varphi(0, y, \lambda)$ и продолжаемо на всей оси $(-\infty, +\infty)$ при всех $\lambda \in [0, 1]$. Будем изучать условия, обеспечивающие сохранение свойства асимптотической устойчивости в целом стационарного решения системы (1) при изменении параметра $\lambda \in [0, 1]$.

Предположим, что система (1) при каждом $\lambda \in [0, 1]$ имеет единственное стационарное решение $x_0(\lambda): F(x_0(\lambda), \lambda) = 0$. Дополнительно предположим, что $x_0(\lambda)$ — ограниченная вектор-функция. Без ограничения общности можно считать, что $x_0(\lambda) = 0$, $\lambda \in [0, 1]$. Прежде чем сформулировать основной результат, выведем одно необходимое условие асимптотической устойчивости в целом стационарных решений $x_0(t, \lambda) \equiv 0$ семейства систем (1) при всех $\lambda \in [0, 1]$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть стационарное решение $x(t, \lambda) \equiv 0$ системы (1) при каждом $\lambda \in [0, 1]$ асимптотически устойчиво в целом. Тогда существует неубывающая функция $\sigma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, не зависящая от λ , такая, что

$$|x(t, \lambda)| \leq \sigma(|x(0, \lambda)| + |x(T, \lambda)|), \quad 0 \leq t \leq T,$$

для любого решения $x(t, \lambda)$ семейства систем (1), определенного на $[0, T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом $\lambda \in [0, 1]$ в силу теорем 1.1–1.4 [7] функция $\sigma(u, \lambda)$, определенная равенством

$$\sigma(u, \lambda) = \sup_{0 \leq t \leq T} \max |x(t, \lambda)|,$$

где точная верхняя грань вычисляется по всем числам T и решениям системы (1), определенным на $[0, T]$ и удовлетворяющим условию

$$|x(0, \lambda)| + |x(T, \lambda)| \leq u,$$

принимает конечное значение при $u < \infty$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$\sigma(u) = \sup_{0 \leq \lambda \leq 1} \sigma(u, \lambda) < \infty \quad \text{при } u < \infty.$$

Предположим, что для некоторого $u_0 > 0$ $\sigma(u_0) = +\infty$. Тогда существует последовательность решений $x_k(t, \lambda_k)$ такая, что

$$|x_k(0, \lambda_k)| + |x_k(T_k, \lambda_k)| \leq u_0, \quad \max_{0 \leq t \leq T_k} |x_k(t, \lambda_k)| \rightarrow \infty \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Пусть $R_0 = u_0 + 1$ и число $N > R_0$. Тогда при достаточно больших k существуют числа τ_{0k}, τ_{Nk} такие, что $0 \leq \tau_{0k} \leq \tau_{Nk}$,

$$R_0 = |x_k(\tau_{0k}, \lambda_k)| \leq |x_k(t, \lambda_k)| \leq |x_k(\tau_{Nk}, \lambda_k)| = N, \quad \tau_{0k} \leq t \leq \tau_{Nk}. \quad (2)$$

В силу ограниченности последовательностей $\lambda_k \in [0, 1]$ и $y_k = x_k(\tau_{0k}, \lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$, без ограничения общности можно считать, что $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$, $y_k \rightarrow y_0$ при $k \rightarrow \infty$. Рассмотрим решение $x(t) = \varphi(t, y_0, \lambda_0)$ системы (1) при $\lambda = \lambda_0$. В силу устойчивости в целом стационарного решения $x(t, \lambda) \equiv 0$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\varphi(t, y_0, \lambda_0)| = 0.$$

Следовательно, существует $N_0 > 0$ такое, что

$$|\varphi(t_0, y_0, \lambda_0)| \leq N_0 \quad \forall t \geq 0. \quad (3)$$

Теперь дополнительно будем предполагать, что число N удовлетворяет также неравенству $N > N_0$.

Рассмотрим последовательность решений $\varphi(t, y_k, \lambda_k)$, $k = 1, 2, \dots$, системы (1) при $\lambda = \lambda_k$. Так как $\varphi(t, y_k, \lambda_k) = x_k(\tau_{0k} + t, \lambda_k)$, из неравенства (2) имеем

$$R_0 = |y_k| \leq |\varphi(t, y_k, \lambda_k)| \leq N, \quad 0 \leq t \leq t_k = \tau_{Nk} - \tau_{0k}, \quad |\varphi(t_k, y_k, \lambda_k)| = N. \quad (4)$$

Проводя рассуждения, как и при доказательстве теоремы 1.1 [7], нетрудно установить, что последовательность $\{t_k\}$ ограничена. Пусть t_0 – предельная точка последовательности $\{t_k\}$. Тогда из (4), переходя к пределу в соответствующей последовательности, в силу теоремы о непрерывной зависимости решений от параметра и начальных условий получим

$$|\varphi(t_0, y_0, \lambda_0)| = N, \quad t_0 > 0. \quad (5)$$

Равенство (5) противоречит неравенству (3) в силу выбора $N > N_0$. Полученное противоречие доказывает, что $\sigma(u_0) < +\infty$. Теорема доказана.

Теперь сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть семейство систем (1) удовлетворяет следующим условиям:

- 1) при $\lambda = 0$ стационарное решение $x_0(t, 0) \equiv 0$ системы (1) устойчиво;
- 2) системы (1) при всех $\lambda \in [0, 1]$ не имеют ограниченных на всей оси решений, отличных от стационарного решения $x_0(t, \lambda) \equiv 0$;
- 3) системы (1) при всех $\lambda \in [0, 1]$ не имеют седла в бесконечности.

Тогда стационарное решение $x_0(t, \lambda) \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво в целом при всех $\lambda \in [0, 1]$.

Теорема 2 будет доказана, если, согласно теореме 1.3 [7], стационарное решение системы (1) будет устойчиво при всех $\lambda \in [0, 1]$. Поэтому теорема 2 следует из следующей более общей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть семейство систем (1) удовлетворяет условиям:

- 1) при $\lambda = 0$ стационарное решение $x_0(t, 0) \equiv 0$ системы (1) устойчиво;
- 2) системы (1) при всех $\lambda \in [0, 1]$ не имеют ограниченных на всей оси решений в шаре $\{x : |x| \leq 1\}$, отличных от стационарного решения $x_0(t, \lambda) \equiv 0$.

Тогда стационарное решение $x_0(t, \lambda) \equiv 0$ системы (1) устойчиво при всех $\lambda \in [0, 1]$.

Для удобства изложения основные этапы доказательства теоремы 3 выделим в виде отдельных лемм. Положим

$$A = \left\{ (y, \lambda) : 0 \leq \lambda \leq 1, \sup_{t \geq 0} |\varphi(t, y, \lambda)| \leq 1 \right\},$$

$$B = \left\{ (y, \lambda) : 0 \leq \lambda \leq 1, |y| = 1, \sup_{t \leq 0} |\varphi(t, y, \lambda)| \leq 1 \right\}.$$

Очевидно, множества A и B ограничены. На множестве A определим функцию

$$\eta(y, \lambda) = \sup_{t \geq 0} |\varphi(t, y, \lambda)|, \quad (y, \lambda) \in A.$$

ЛЕММА 1. Множества A и B замкнуты в $\mathbb{R}^n \times [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{(y_k, \lambda_k)\} \subset A$ и $(y_k, \lambda_k) \rightarrow (y_0, \lambda_0)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда в силу непрерывной зависимости решения $\varphi(t, y, \lambda)$ от начальных данных и от параметра λ , переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ и фиксированном $t \geq 0$ в неравенстве

$$|\varphi(t, y_k, \lambda_k)| \leq 1, \quad t \in [0, \infty),$$

получим

$$|\varphi(t, y_0, \lambda_0)| \leq 1, \quad t \in [0, \infty).$$

Это означает, что $(y_0, \lambda_0) \in A$. Замкнутость множества B доказывается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть семейство систем (1) в шаре $|x| \leq 1$ не имеет ограниченных на всей оси решений, отличных от стационарного решения $x_0(t, \lambda) \equiv 0$. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{(y, \lambda) \in A} |\varphi(t, y, \lambda)| = 0. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что равенство (6) не имеет места. Тогда существуют последовательности $\{t_k\}$, $t_k \rightarrow \infty$, и $(y_k, \lambda_k) \in A$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что

$$|\varphi(t_k, y_k, \lambda_k)| \geq \varepsilon_0 > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Рассмотрим последовательность решений

$$\varphi(t, z_k, \lambda_k) = \varphi(t + t_k, y_k, \lambda_k), \quad z_k = \varphi(t_k, y_k, \lambda_k), \quad t \geq -t_k.$$

По определению множества A для этой последовательности решений имеем

$$|\varphi(t, z_k, \lambda_k)| = |\varphi(t + t_k, y_k, \lambda_k)| \leq 1, \quad t \geq -t_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

В силу ограниченности последовательности $\{(z_k, \lambda_k)\}$ без ограничения общности можно считать, что $(z_k, \lambda_k) \rightarrow (z_0, \lambda_0)$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ и фиксированном t в неравенствах (7) и (8), имеем

$$|z_0| \geq \varepsilon_0, \quad |\varphi(t, z_0, \lambda_0)| \leq 1 \quad \forall t.$$

Отсюда следует, что $\varphi(t, z_0, \lambda_0)$ является ограниченным на всей оси решением системы (1) в шаре $|x| \leq 1$, отличным от нулевого решения при $\lambda = \lambda_0$. Это противоречит нашему предположению. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства (6). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда функция

$$\eta(y, \lambda) = \sup_{t \geq 0} |\varphi(t, y, \lambda)|, \quad (y, \lambda) \in A,$$

непрерывна на множестве A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(y, \lambda), (y_0, \lambda_0) \in A$. В неравенстве

$$|\varphi(t, y, \lambda)| \leq |\varphi(t, y, \lambda) - \varphi(t, y_0, \lambda_0)| + |\varphi(t, y_0, \lambda_0)|$$

перейдем к точной верхней грани по $t \geq 0$. Имеем

$$\eta(y, \lambda) \leq \sup_{t \geq 0} |\varphi(t, y, \lambda) - \varphi(t, y_0, \lambda_0)| + \eta(y_0, \lambda_0)$$

или

$$\eta(y, \lambda) - \eta(y_0, \lambda_0) \leq \sup_{t \geq 0} |\varphi(t, y, \lambda) - \varphi(t, y_0, \lambda_0)|.$$

Меняя местами точки (y, λ) и (y_0, λ_0) в этом неравенстве, получим оценку

$$|\eta(y_0, \lambda_0) - \eta(y, \lambda)| \leq \sup_{t \geq 0} |\varphi(t, y, \lambda) - \varphi(t, y_0, \lambda_0)|. \quad (9)$$

В силу леммы 2 для $\varepsilon > 0$ существует $T > 0$ такое, что

$$\sup_{t \geq T} |\varphi(t, y, \lambda) - \varphi(t, y_0, \lambda_0)| \leq \sup_{t \geq T} |\varphi(t, y, \lambda)| + \sup_{t \geq T} |\varphi(t, y_0, \lambda_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\forall (y, \lambda), (y_0, \lambda_0) \in A. \quad (10)$$

Для точки $(y_0, \lambda_0) \in A$ в силу непрерывной зависимости решений от начальных данных и от параметра, существует $\delta > 0$ такое, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\varphi(t, y, \lambda) - \varphi(t, y_0, \lambda_0)| < \varepsilon, \quad (11)$$

если $|y - y_0| < \delta$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$.

Из (9) в силу (10) и (11) имеем

$$|\eta(y_0, \lambda_0) - \eta(y, \lambda)| < \varepsilon$$

при $|y - y_0| < \delta$, $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, $(y, \lambda), (y_0, \lambda_0) \in A$. Лемма доказана.

Пусть $0 < r < 1$. Рассмотрим решения $\varphi(t, y, \lambda)$ системы (1), для которых существуют числа t_1, t_2 , удовлетворяющие условиям:

$$r = |\varphi(t_1, y, \lambda)| \leq |\varphi(t, y, \lambda)| \leq |\varphi(t_2, y, \lambda)| = 1 \quad (12)$$

при $t \in [t_1, t_2]$, если $t_1 < t_2$, и $t \in [t_2, t_1]$, если $t_1 > t_2$. Через $T_0(r)$ обозначим точную нижнюю грань множества чисел $|t_1 - t_2|$ по всем решениям $\varphi(t, y, \lambda)$, удовлетворяющим условиям (12), и по всем $\lambda \in [0, 1]$.

ЛЕММА 4. *Функция $T_0(r)$ определена на $(0, 1)$ и удовлетворяет условию*

$$\lim_{r \rightarrow 0} T_0(r) = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что в силу теоремы о единственности решения нестационарное решение может приближаться к стационарному лишь при $|t| \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. По условию нулевое решение системы (1) при $\lambda = 0$ устойчиво. Поэтому существует $0 < \delta_0 < 1$ такое, что

$$\eta(y, 0) \equiv \sup_{t \geq 0} |\varphi(t, y, 0)| < 1 \quad \text{при} \quad |y| \leq \delta_0. \quad (13)$$

Следовательно, точки $(y, 0)$, $|y| \leq \delta_0$, принадлежат множеству A , и поэтому в силу леммы 2 нулевое решение системы (1) при $\lambda = 0$ асимптотически устойчиво. В силу (6) существует $T_1 > 0$ такое, что

$$\sup_{t \geq T_1} |\varphi(t, y, \lambda)| < \frac{1}{2} \quad \forall (y, \lambda) \in A.$$

Выберем число $r_0 \in (0, \delta_0)$ такое, что

$$T_0(r_0) > T_1. \quad (14)$$

Существование r_0 следует из леммы 4. По числу r_0 определим множество $A_{r_0} = \{(y, \lambda) : 0 \leq \lambda \leq 1, |y| \leq r_0\}$ и докажем справедливость включения $A_{r_0} \subset A$. Рассмотрим два случая: $B = \emptyset$ и $B \neq \emptyset$.

1. Пусть $B = \emptyset$. Для фиксированного y , $|y| \leq r_0$, определим число

$$\lambda'(y) = \sup\{\mu : (y, \lambda) \in A, 0 \leq \lambda \leq \mu\}.$$

В силу замкнутости A точка $(y, \lambda'(y))$ принадлежит множеству A . Включение $A_{r_0} \subset A$ будет доказано, если мы покажем что $\lambda'(y) = 1$ для любого y , $|y| \leq r_0$.

а) Сначала покажем, что $\lambda'(y) > 0$. Действительно, если $\lambda'(y) = 0$, то существует последовательность $\{\lambda_k\}$, $0 \leq \lambda_k \leq 1$, такая, что $(y, \lambda_k) \notin A$ и $\lambda_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Согласно определению множества A для решения $\varphi(t, y, \lambda_k)$ справедливо $\sup_{t \geq 0} |\varphi(t, y, \lambda_k)| > 1$. Следовательно, существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$ такая, что

$$|\varphi(t_k, y, \lambda_k)| = 1, \quad |\varphi(t, y, \lambda)| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_k. \quad (15)$$

Пусть последовательность $\{t_k\}$ имеет конечную предельную точку: существует подпоследовательность $\{t_{k_j}\}$, $t_{k_j} \rightarrow t_0 < +\infty$ при $j \rightarrow \infty$. В силу непрерывной зависимости решения от параметра, переходя к пределу при $k = k_j$ и $j \rightarrow \infty$, из (15) получим

$$\varphi(t_0, y, 0) = 1, \quad t_0 > 0.$$

Но это противоречит выбору $r_0 < \delta_0$ (неравенство (13)).

Пусть $t_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. В этом случае рассмотрим последовательность решений $\varphi(t, z_k, \lambda_k)$, где $z_k = \varphi(t_k, y_k, \lambda_k)$. В силу (15) имеем

$$|z_k| = 1, \quad |\varphi(t, z_k, \lambda_k)| \leq 1, \quad -t_k \leq t \leq 0. \quad (16)$$

Без ограничения общности можно считать, что $z_{k_j} \rightarrow z_0$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда переходя к пределу в (16) при $k \rightarrow \infty$ и фиксированном t , $t \leq 0$, получим

$$|z_0| = 1, \quad |\varphi(t, z_0, 0)| \leq 1, \quad \forall t \leq 0,$$

т.е. $(z_0, 0) \in B$. Это противоречит предположению $B = \emptyset$. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства $\lambda'(y) > 0$.

б) Теперь покажем, что $\lambda'(y) = 1$. Действительно, если $\lambda'(y) < 1$, то существует последовательность $\{\lambda_k\}$, $\lambda'(y) < \lambda_k \leq 1$, $\lambda_k \rightarrow \lambda'(y)$ при $k \rightarrow \infty$ и $(y, \lambda_k) \notin A$. Как и в пункте а), для решений $\varphi(t, y, \lambda)$ существуют числа $t_k > 0$ такие, что имеют место соотношения (15).

Пусть последовательность $\{t_k\}$ имеет конечную предельную точку t_0 и $t_{k_j} \rightarrow t_0$ при $j \rightarrow \infty$. Тогда из (15), переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, получим

$$|\varphi(t_0, y, \lambda')| = 1, \quad |\varphi(t, y, \lambda')| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq t_0.$$

Положим

$$r_1 = \min_{0 \leq t \leq t_0} |\varphi(t, y, \lambda')| = |\varphi(t_0, y, \lambda')| \leq |\varphi(t, y, \lambda')| \leq 1, \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq t_0.$$

Очевидно $r_1 \leq |y| \leq r_0$. Так как $(y, \lambda') \in A$, то $|\varphi(t, y, \lambda')| \leq 1/2$ при $t \geq T_1$ и, следовательно, $t_0 < T_1$. По определению функция $T_0(r)$ не возрастает, и поэтому

$$T_0(r_0) \leq T_0(r_1) \leq t_0 - t_0 \leq t_0 < T_1.$$

Это противоречит неравенству (14). Таким образом, возможен лишь случай $t_k \rightarrow +\infty$. Тогда, как и в пункте а), докажем, что предельная точка (z_0, λ') последовательности (z_k, λ_k) , $z_k = \varphi(t_k, y, \lambda_k)$ принадлежит множеству B . Это противоречит предположению $B = \emptyset$. Полученное противоречие доказывает, что $\lambda'(y) = 1$.

В случае $B = \emptyset$ включение $A_{r_0} \subset A$ доказано.

2. Покажем, что случай $B \neq \emptyset$ невозможен. Предположим, что $B \neq \emptyset$. В силу леммы 1 множество B замкнуто. Поэтому для числа

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda : \exists y, (y, \lambda) \in B\}$$

существует y_0 такое, что $(y_0, \lambda_0) \in B$. Если $\lambda_0 = 0$, то в силу выбора δ_0 решение $\varphi(t, y_0, 0)$ удовлетворяет неравенству

$$\delta_0 < |\varphi(t, y_0, 0)| \leq 1 \quad \forall t \leq 0.$$

Пусть z_0 – предельная точка последовательности $z_k = \varphi(-k, y_0, 0)$. Тогда $\varphi(t, z_0, 0)$ удовлетворяет неравенству

$$\delta_0 \leq |\varphi(t, z_0, 0)| \leq 1 \quad \forall t$$

и, следовательно, является ненулевым ограниченным решением системы (1) при $\lambda = 0$. Это противоречит условию 2 теоремы.

Таким образом, $\lambda_0 > 0$ и $|\varphi(t, y_0, 0)| \leq 1$ при всех $t \leq 0$. В силу отсутствия ограниченного отличного от нулевого решения в шаре $|x| < 1$, имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |\varphi(t, y_0, \lambda_0)| = 0. \quad (17)$$

Чтобы доказать, что имеет место включение

$$\{(y, \lambda) : |y| \leq r_0, 0 \leq \lambda < \lambda_0\} \subset A,$$

нужно повторить рассуждения, проведенные в случае $B = \emptyset$, и учесть замкнутость множества A .

В силу (17) существует $t_1 < 0$ такое, что $|\varphi(t_1, y_0, \lambda_0)| \leq 1$ при всех $t < t_1$. Это снова противоречит условию, что $B = \emptyset$.

Итак, включение

$$A_{r_0} = \{(y, \lambda) : |y| \leq r_0, 0 \leq \lambda < \lambda_0\} \subset A$$

справедливо. Из непрерывности функции $\eta(y, \lambda)$ на A и равенства $\eta(0, \lambda) = 0$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\eta(y, \lambda) - \eta(0, \lambda) = \eta(y, \lambda) < \varepsilon \quad \text{при} \quad |y| < \delta,$$

или, что то же самое,

$$|\varphi(t, y, \lambda)| < \varepsilon \quad \forall t \geq 0, \quad |y| < \delta.$$

Это означает устойчивость нулевого решения системы (1) при фиксированном $\lambda \in [0, 1]$. Из леммы 2 следует асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1) при всех $\lambda \in [0, 1]$. Теорема 3 доказана.

Итак, если системы (1) при всех значениях $\lambda \in [0, 1]$ не имеют седла в бесконечности и не имеют ограниченных на всей оси решений, отличных от стационарного нулевого решения, и при одном значении λ стационарное решение устойчиво, тогда при всех значениях $\lambda \in [0, 1]$ стационарное решение асимптотически устойчиво в целом.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974.
- [2] А. В. Борисов, В. В. Козлов, И. С. Мамаев, “Асимптотическая устойчивость и родственные задачи динамики падающего тяжелого твердого тела”, *Нелинейная динам.*, **3**:3 (2007), 255–296.
- [3] A. V. Borisov, V. V. Kozlov, I. S. Mamaev, “Asymptotic stability and associated problems of dynamics of falling rigid body”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **12**:5 (2007), 531–565.
- [4] Б. И. Садовников, Н. Г. Иноземцева, В. И. Иноземцев, “Корреляционная функция и термодинамические величины в смешанной модели”, *ЭЧАЯ*, **41** (2010), 1982–1989.
- [5] B. I. Sadovnikov, N. G. Inozemtseva, V. I. Inozemtsev, “The correlation function and the thermodynamic quantities of the mixed system”, *The International Bogolyubov Conference*, Book of Abstracts, Moscow–Dubna, 2009, 247.
- [6] Е. А. Барабашин, Н. Н. Красовский, “О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом”, *ПММ*, **18**:3 (1954), 345–350.
- [7] Г. Э. Гришанина, Н. Г. Иноземцева, Б. И. Садовников, “Об асимптотической устойчивости в целом и седле в бесконечности”, *Матем. заметки*, **93**:4 (2013), 624–629.
- [8] Г. Э. Гришанина, “Асимптотическая устойчивость в целом и седло на бесконечности”, *Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна*, Тезисы докладов, Воронеж, 2010, 47–48.
- [9] Н. А. Бобылев, “О деформации функционалов, имеющих единственную критическую точку”, *Матем. заметки*, **34**:3 (1983), 387–398.
- [10] Н. А. Бобылев, Г. В. Кондаков, “Деформационный метод исследования негладких оптимизационных задач”, *Автомат. и телемех.*, 1991, № 5, 46–57.
- [11] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Гостехиздат, М., 1949.

Г. Э. Гришанина

Международный университет природы, общества
и человека “Дубна”

E-mail: anora66@mail.ru

Поступило

20.05.2013

Н. Г. Иноземцева

Международный университет природы, общества
и человека “Дубна”

E-mail: nginozv@mail.ru

М. Б. Садовникова

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: sadovnikov@phys.msu.ru