Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. Джиао, Х. Менг, Расширения Оре коквазигрупп Хопфа, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 3, 376–384

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10427>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 17:53:47

Расширения Оре коквазигрупп Хопфа

Ж. Джао, Х. Менг

Рассматриваются расширения Оре для коквазигрупп Хопфа. Получено необходимое и достаточное условие того, что расширение Оре коквазигруппы Хопфа является коквазигруппой Хопфа.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10427

1. Введение. Квазигруппы и коквазигруппы Хопфа были введены в [1] с целью определения квазигрупповых свойств (алгебраической) семимерной сферы. Они представляют собой не(ко)ассоциативные обобщения алгебр Хопфа.

Расширение Оре – это хорошо известная конструкция расширения колец, применимая к некоммутативным кольцам. Такие кольца называются также косополиномиальными кольцами. В [2]–[6] с помощью расширений Оре были построены примеры алгебр Хопфа и исследованы некоторые структурные свойства расширений Оре. Позже расширения Оре алгебр Хопфа в общей ситуации были исследованы в [7]. Цель настоящей статьи – изучить расширения Оре коквазигрупп Хопфа по аналогии с обычными алгебрами Хопфа.

В этой статье все алгебры и коалгебры рассматриваются над полем k . Мы используем нотацию Свидлера для коумножения; а именно, для всех $h \in H$ мы полагаем $\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ (подразумевается суммирование) [8].

2. Предварительные сведения. В этом разделе мы напоминаем определение коквазигрупп Хопфа и расширений Оре алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [1]. *Коквазигруппа Хопфа* – это унитарная ассоциативная алгебра A вместе с гомоморфизмами унитарных алгебр $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ и $\varepsilon: A \rightarrow k$, а также линейным отображением $S: A \rightarrow A$, удовлетворяющими условиям

$$(m \otimes \text{id})(S \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)\Delta = 1 \otimes \text{id} = (m \otimes \text{id})(\text{id} \otimes S \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)\Delta, \quad (2.1)$$

$$(\text{id} \otimes m)(\text{id} \otimes \text{id} \otimes S)(\Delta \otimes \text{id})\Delta = \text{id} \otimes 1 = (\text{id} \otimes m)(\text{id} \otimes S \otimes \text{id})(\Delta \otimes \text{id})\Delta. \quad (2.2)$$

В терминах нотации Свидлера условия (2.1), (2.2) на коквазигруппы Хопфа принимают вид

$$S(a_{(1)})a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} = 1 \otimes a = a_{(1)}S(a_{(2)(1)}) \otimes a_{(2)(2)},$$

$$a_{(1)(1)} \otimes S(a_{(1)(2)})a_{(2)} = a \otimes 1 = a_{(1)(1)} \otimes a_{(1)(2)}S(a_{(2)})$$

для всех $a \in A$.

В случае стандартных алгебр Хопфа отображение S называется *антиподом*. В [1] было доказано, что антипод антимультимпликативен и антикомультимпликативен; каждое из отношений (2.1), (2.2) влечет равенства

$$\begin{aligned} S(h_{(1)})h_{(2)} &= h_{(1)}S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1, \\ \varepsilon(S(h)) &= \varepsilon(h) \end{aligned}$$

для любого $h \in H$, т.е. S обладает стандартными свойствами антипода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 [9]. Пусть A – k -алгебра и α – эндоморфизм алгебры A . Линейный эндоморфизм δ алгебры A называется α -дифференцированием алгебры A , если

$$\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b) \quad \text{для всех } a, b \in A.$$

Заметим, что из указанного выше условия вытекает, что $\delta(1) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 [9]. *Расширение Оре* $H = A[y; \alpha, \delta]$ k -алгебры A определяется как k -алгебра, порожденная алгеброй A и отношением

$$ya = \alpha(a)y + \delta(a) \quad \text{для любого } a \in A. \quad (2.3)$$

Каждый элемент расширения $H = A[y; \alpha, \delta]$ можно единственным образом представить в виде $\sum_i a_i y^i$.

3. Основная теорема. В этом разделе мы получим критерий того, что расширение Оре коквазигруппы Хопфа является коквазигруппой Хопфа с коумножением, удовлетворяющим условию (3.1) (см. ниже).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть A и $H = A[y; \alpha, \delta]$ – коквазигруппы Хопфа над полем k . Коквазигруппа Хопфа $H = A[y; \alpha, \delta]$ называется *хопфовым коквазигрупповым расширением Оре* (или, кратко, *НСQ-расширением Оре*) алгебры A , если $\Delta(y) = y \otimes r_1 + r_2 \otimes y$ для некоторых $r_1, r_2 \in A$ и A является подковквазигруппой Хопфа коквазигруппы H .

В дальнейшем обозначаем коумножение через Δ , коединицу через ε и антипод (для алгебр A и H) через S . Согласно определению 2.1 для $y \in H$ имеем

$$\begin{aligned} (m \otimes \text{id})(S \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)\Delta(y) &= 1 \otimes y = (m \otimes \text{id})(\text{id} \otimes S \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)\Delta(y), \\ (\text{id} \otimes m)(\text{id} \otimes \text{id} \otimes S)(\Delta \otimes \text{id})\Delta(y) &= y \otimes 1 = (\text{id} \otimes m)(\text{id} \otimes S \otimes \text{id})(\Delta \otimes \text{id})\Delta(y), \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} S(y)r_{1(1)} \otimes r_{1(2)} + S(r_2)y \otimes r_1 + S(r_2)r_2 \otimes y \\ = 1 \otimes y = yS(r_{1(1)}) \otimes r_{1(2)} + r_2S(y) \otimes r_1 + r_2S(r_2) \otimes y, \\ y \otimes S(r_1)r_1 + r_2 \otimes S(y)r_1 + r_{2(1)} \otimes S(r_{2(2)})y \\ = y \otimes 1 = y \otimes r_1S(r_1) + r_2 \otimes yS(r_1) + r_{2(1)} \otimes r_{2(2)}S(y). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} r_1S(r_1) &= S(r_1)r_1 = 1, & r_2S(r_2) &= S(r_2)r_2 = 1, \\ S(y)r_{1(1)} \otimes r_{1(2)} + S(r_2)y \otimes r_1 &= yS(r_{1(1)}) \otimes r_{1(2)} + r_2S(y) \otimes r_1 = 0, \\ r_2 \otimes S(y)r_1 + r_{2(1)} \otimes S(r_{2(2)})y &= r_2 \otimes yS(r_1) + r_{2(1)} \otimes r_{2(2)}S(y) = 0. \end{aligned}$$

Пусть r_1 и r_2 – группоподобные элементы алгебры A ; тогда

$$\begin{aligned} r_i^{-1} &= S(r_i), \quad i = 1, 2, \\ (S(y)r_1 + S(r_2)y) \otimes r_1 &= (yS(r_1) + r_2S(y)) \otimes r_1 = 0, \\ r_2 \otimes (S(y)r_1 + S(r_2)y) &= r_2 \otimes (yS(r_1) + r_2S(y)) = 0. \end{aligned}$$

Заменяя порождающий элемент y на $y' = yr_1^{-1}$, мы видим, что $\Delta(y') = y' \otimes 1 + r \otimes y'$, где $r = r_2r_1^{-1}$ – группоподобный элемент алгебры A . Поэтому в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что элемент y НСQ-расширения Оре удовлетворяет условию

$$\Delta(y) = y \otimes 1 + r \otimes y \quad (3.1)$$

для некоторого группоподобного элемента $r \in A$. Как обычно, $Ad_r(a) = raS(r) = rar^{-1}$.

Заметим, что доказательство леммы 1.1 в [7] не использует коассоциативность коумножения; значит, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.2. Пусть A – коквазигруппа Хопфа. Если $H = A[y; \alpha, \delta]$ является НСQ-расширением Оре алгебры A , то

$$\varepsilon(y) = 0, \quad (3.2)$$

$$S(y) = -r^{-1}y, \quad (3.3)$$

где $r^{-1} = S(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из результатов статьи [7].

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть A – коквазигруппа Хопфа. Тогда коквазигруппа Хопфа $H = A[y; \alpha, \delta]$ является НСQ-расширением Оре, если и только если

(1) существует характер $\chi: A \rightarrow k$, удовлетворяющий условию

$$\alpha(a) = \chi(a_{(1)})a_{(2)} \quad \text{для любого } a \in A; \quad (3.4)$$

(2) выполнены отношения

$$\chi(a_{(1)})a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} = Ad_r(a_{(1)})\chi(a_{(2)(1)}) \otimes a_{(2)(2)} = \chi(a_{(1)(1)})a_{(1)(2)} \otimes a_{(2)}; \quad (3.5)$$

(3) α -дифференцирование δ удовлетворяет условию

$$\Delta(\delta(a)) = \delta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} + ra_{(1)} \otimes \delta(a_{(2)}). \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится в три шага.

1. **Коумножение.** Предположим, что коумножение Δ можно продолжить с A на $H = A[y; \alpha, \delta]$ так, чтобы выполнялось соотношение (3.1). Тогда гомоморфизм алгебр Δ сохраняет отношение (2.3), т.е.

$$\Delta(y)\Delta(a) = \Delta(\alpha(a))\Delta(y) + \Delta(\delta(a)).$$

Имеем

$$\begin{aligned}
 \Delta(y)\Delta(a) &= (y \otimes 1 + r \otimes y)(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \\
 &= (\alpha(a_{(1)})y + \delta(a_{(1)})) \otimes a_{(2)} + ra_{(1)} \otimes (\alpha(a_{(2)})y + \delta(a_{(2)})) \\
 &= (\alpha(a_{(1)}) \otimes a_{(2)})(y \otimes 1) + (ra_{(1)}r^{-1} \otimes \alpha(a_{(2)}))(r \otimes y) \\
 &\quad + \delta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} + ra_{(1)} \otimes \delta(a_{(2)}), \\
 \Delta(\alpha(a))\Delta(y) + \Delta(\delta(a)) &= \Delta(\alpha(a))(y \otimes 1 + r \otimes y) + \Delta(\delta(a)) \\
 &= \Delta(\alpha(a))(y \otimes 1) + \Delta(\alpha(a))(r \otimes y) + \Delta(\delta(a)).
 \end{aligned}$$

Таким образом, Δ сохраняет (2.3) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\Delta(\alpha(a)) = \alpha(a_{(1)}) \otimes a_{(2)}, \quad (3.7)$$

$$\Delta(\alpha(a)) = Ad_r(a_{(1)}) \otimes \alpha(a_{(2)}), \quad (3.8)$$

$$\Delta(\delta(a)) = \delta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} + ra_{(1)} \otimes \delta(a_{(2)})$$

для всех $a \in A$. Последнее условие совпадает с (3.6).

Покажем теперь, что из отношений (3.7), (3.8) вытекают отношения (3.4), (3.5). Положим $\chi(a) := \varepsilon(\alpha(a))$. Очевидно, $\chi(a) \in k$. Характер χ можно рассматривать как отображение $\chi: A \rightarrow k$. Поскольку α — эндоморфизм и

$$\begin{aligned}
 \chi(ab) &= \varepsilon(\alpha(ab)) = \varepsilon(\alpha(a))\varepsilon(\alpha(b)) = \chi(a)\chi(b), \\
 \chi(a+b) &= \varepsilon(\alpha(a+b)) = \varepsilon(\alpha(a)) + \varepsilon(\alpha(b)) = \chi(a) + \chi(b),
 \end{aligned}$$

отображение χ является характером A . Согласно (3.7) для $\alpha(a) \in A$ имеем

$$(id \otimes \Delta)\Delta(\alpha(a)) = \alpha(a_{(1)}) \otimes a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)}.$$

Из (2.1) вытекает, что

$$S(\alpha(a_{(1)}))a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} = 1 \otimes \alpha(a) = \alpha(a_{(1)})S(a_{(2)(1)}) \otimes a_{(2)(2)}. \quad (3.9)$$

Используя эту формулу, мы можем выразить χ через α :

$$\begin{aligned}
 \chi(a_{(1)})a_{(2)} &= \varepsilon(\alpha(a_{(1)}))a_{(2)} = \varepsilon(\alpha(a_{(1)}))\varepsilon(a_{(2)(1)})a_{(2)(2)} = \varepsilon(\alpha(a_{(1)}))\varepsilon(S(a_{(2)(1)}))a_{(2)(2)} \\
 &= \varepsilon(\alpha(a_{(1)})S(a_{(2)(1)}))a_{(2)(2)} \stackrel{(3.9)}{=} \varepsilon(1)\alpha(a) = \alpha(a).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует (3.4). Подставляя $\alpha(a)$ в (3.8), получаем

$$\chi(a_{(1)})a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} = Ad_r(a_{(1)})\chi(a_{(2)(1)}) \otimes a_{(2)(2)},$$

а подставляя $\alpha(a)$ в (3.7), получаем

$$\chi(a_{(1)})a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} = \chi(a_{(1)(1)})a_{(1)(2)} \otimes a_{(2)}.$$

Отсюда вытекает (3.5).

С другой стороны, можно доказать, что если выполнены условия (3.4)–(3.6), то выполнены и условия (3.7), (3.8). Действительно, имеем

$$\begin{aligned}\Delta(\alpha(a)) &\stackrel{(3.4)}{=} \Delta(\chi(a_{(1)})a_{(2)}) = \chi(a_{(1)})a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} \\ &\stackrel{(3.5)}{=} \chi(a_{(1)(1)})a_{(1)(2)} \otimes a_{(2)} \stackrel{(3.4)}{=} \alpha(a_{(1)}) \otimes a_{(2)}, \\ \Delta(\alpha(a)) &\stackrel{(3.4)}{=} \Delta(\chi(a_{(1)})a_{(2)}) = \chi(a_{(1)})a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} \\ &\stackrel{(3.5)}{=} Ad_r(a_{(1)}) \otimes \chi(a_{(2)(1)})a_{(2)(2)} \stackrel{(3.4)}{=} Ad_r(a_{(1)}) \otimes \alpha(a_{(2)}).\end{aligned}$$

Отсюда следуют отношения (3.7) и (3.8).

Итак, коумножение $\Delta|_A$ продолжается до гомоморфизма алгебр $\Delta: H \rightarrow H \otimes H$, не обязательно коассоциативного.

2. *Коединица.* Пусть H допускает коумножение (т.е. выполнены условия (3.4)–(3.6)). Предположим, что коединица ε удовлетворяет условию (3.2) и может быть продолжена на H . Тогда ε сохраняет (2.3) как гомоморфизм алгебры H , т.е. выполнено $\varepsilon(y)\varepsilon(a) = \varepsilon(\alpha(a))\varepsilon(y) + \varepsilon(\delta(a))$. Поскольку коединица ε удовлетворяет условию $\varepsilon(y) = 0$, ее можно продолжить на H тогда и только тогда, когда

$$\varepsilon(\delta(a)) = 0.$$

Докажем, что $\varepsilon(\delta(a)) = 0$ для всех $a \in A$. Применяя $m(\text{id} \otimes \varepsilon)$ к (3.6), видим, что

$$\begin{aligned}\delta(a) &= m(\text{id} \otimes \varepsilon)\Delta(\delta(a)) = m(\text{id} \otimes \varepsilon)(\delta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} + ra_{(1)} \otimes \delta(a_{(2)})) \\ &= \delta(a_{(1)})\varepsilon(a_{(2)}) + ra_{(1)}\varepsilon(\delta(a_{(2)})) = \delta(a) + ra_{(1)}\varepsilon(\delta(a_{(2)})).\end{aligned}$$

Следовательно, $a_{(1)}\varepsilon(\delta(a_{(2)})) = 0$. Наконец,

$$\varepsilon(\delta(a)) = \varepsilon(\delta(\varepsilon(a_{(1)})a_{(2)})) = \varepsilon(a_{(1)})\varepsilon(\delta(a_{(2)})) = \varepsilon(a_{(1)}\varepsilon(\delta(a_{(2)}))) = 0.$$

Отсюда вытекает как отношение $\varepsilon(\delta(a)) = 0$, так и существование продолжения $\varepsilon: H \rightarrow k$, удовлетворяющего условию (2.3). Для каждого $b = \sum_i a_i y^i \in H$ легко доказать, что $\varepsilon: H \rightarrow k$ – коединица H .

3. *Свойство антипода S .* Предположим, что H допускает коумножение и коединицу. Если H допускает антипод S , который можно продолжить с A на H так, чтобы выполнялось условие (3.3), то S удовлетворяет условиям (2.1) и (2.2) и сохраняет (2.3). Это означает, что

$$(m \otimes \text{id})(S \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)\Delta(ya) = 1 \otimes ya = (m \otimes \text{id})(\text{id} \otimes S \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)\Delta(ya), \quad (3.10)$$

$$(\text{id} \otimes m)(\text{id} \otimes \text{id} \otimes S)(\Delta \otimes \text{id})\Delta(ya) = ya \otimes 1 = (\text{id} \otimes m)(\text{id} \otimes S \otimes \text{id})(\Delta \otimes \text{id})\Delta(ya), \quad (3.11)$$

и

$$S(a)S(y) = S(y)S(\alpha(a)) + S(\delta(a)). \quad (3.12)$$

Докажем (3.10)–(3.12):

$$\begin{aligned}
 & (m \otimes \text{id})(S \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)\Delta(ya) \\
 & \stackrel{(2.3)}{=} (m \otimes \text{id})(S \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)\Delta(\alpha(a)y + \delta(a)) \\
 & \stackrel{(3.1), (3.7)}{=} (m \otimes \text{id})(S \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)(\alpha(a_{(1)})y \otimes a_{(2)} + \alpha(a_{(1)})r \otimes a_{(2)}y + \Delta(\delta(a))) \\
 & = (m \otimes \text{id})(S \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)(\alpha(a_{(1)})y \otimes a_{(2)} + \alpha(a_{(1)})r \otimes a_{(2)}y) \\
 & \quad + (m \otimes \text{id})(S \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes \Delta)\Delta(\delta(a)) \\
 & \stackrel{(2.1)}{=} S(y)S(\alpha(a_{(1)}))a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} + S(r)S(\alpha(a_{(1)}))a_{(2)(1)}y \otimes a_{(2)(2)} \\
 & \quad + S(r)S(\alpha(a_{(1)}))a_{(2)(1)}r \otimes a_{(2)(2)}y + 1 \otimes \delta(a) \\
 & \stackrel{(3.9)}{=} S(y) \otimes \alpha(a) + S(r)y \otimes \alpha(a) + S(r)r \otimes \alpha(a)y + 1 \otimes \delta(a) \\
 & = S(y) \otimes \alpha(a) + S(r)y \otimes \alpha(a) + 1 \otimes \alpha(a)y + 1 \otimes \delta(a) \\
 & = (S(y) + S(r)y) \otimes \alpha(a) + 1 \otimes (\alpha(a)y + \delta(a)) = 1 \otimes ya.
 \end{aligned}$$

Отсюда вытекает отношение (3.10). Отношение (3.11) доказывается аналогично.

Докажем (3.12). Используя (3.3) и (2.3), получаем

$$\begin{aligned}
 -S(a)r^{-1}y &= -r^{-1}yS(\alpha(a)) + S(\delta(a)), \\
 -S(a)r^{-1}y &= -r^{-1}\alpha(S(\alpha(a)))y - r^{-1}\delta(S(\alpha(a))) + S(\delta(a)).
 \end{aligned}$$

Таким образом, условие (3.12) равносильно двум условиям

$$S(a)r^{-1} = r^{-1}\alpha(S(\alpha(a))), \quad (3.13)$$

$$\delta(S(\alpha(a))) = rS(\delta(a)). \quad (3.14)$$

Докажем (3.13). Имеем

$$\begin{aligned}
 \alpha(S(\alpha(a))) & \stackrel{(3.4)}{=} \alpha(S(\chi(a_{(1)})a_{(2)})) = \alpha(\chi(a_{(1)})S(a_{(2)})) = \chi(a_{(1)})\alpha(S(a_{(2)})) \\
 & \stackrel{(3.4), (3.5)}{=} \chi(a_{(1)})Ad_r(S(a_{(2)(2)}))\chi(S(a_{(2)(1)})) \\
 & = \chi(a_{(1)}S(a_{(2)(1)}))Ad_r(S(a_{(2)(2)})) \stackrel{(2.1)}{=} Ad_r(S(a)).
 \end{aligned}$$

Докажем (3.14). Из (3.4) вытекает, что

$$S(\alpha(a)) = S(\chi(a_{(1)})a_{(2)}) = \chi(a_{(1)})S(a_{(2)}).$$

Следовательно, (3.14) можно представить в эквивалентной форме

$$\chi(a_{(1)})\delta(S(a_{(2)})) = rS(\delta(a)). \quad (3.15)$$

Применяя $m(\text{id} \otimes S)$ к (3.6), получаем

$$\begin{aligned}
 m(\text{id} \otimes S)(\Delta(\delta(a))) &= m(\text{id} \otimes S)(\delta(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} + ra_{(1)} \otimes \delta(a_{(2)})), \\
 0 &= \varepsilon(\delta(a)) = \delta(a_{(1)})S(a_{(2)}) + ra_{(1)}S(\delta(a_{(2)})).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_{(1)}S(\delta(a_{(2)})) = -r^{-1}\delta(a_{(1)})S(a_{(2)}). \quad (3.16)$$

Имеем

$$\begin{aligned} rS(\delta(a)) &= rS(a_{(1)})a_{(2)(1)}S(\delta(a_{(2)(2)})) \stackrel{(3.16)}{=} -rS(a_{(1)})r^{-1}\delta(a_{(2)(1)})S(a_{(2)(2)}) \\ &= -Ad_r S(a_{(1)})\delta(a_{(2)(1)})S(a_{(2)(2)}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Применяя δ к обеим сторонам отношения $\varepsilon(a) = a_{(1)}S(a_{(2)})$, получаем

$$0 = \delta(a_{(1)})S(a_{(2)}) + \alpha(a_{(1)})\delta(S(a_{(2)})),$$

т.е.

$$\alpha(a_{(1)})\delta(S(a_{(2)})) = -\delta(a_{(1)})S(a_{(2)}). \quad (3.18)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \chi(a_{(1)})\delta(S(a_{(2)})) &= \chi(a_{(1)})\alpha(S(a_{(2)(1)})a_{(2)(2)(1)})\delta(S(a_{(2)(2)(2)})) \\ &= \chi(a_{(1)})\alpha(S(a_{(2)(1)}))\alpha(a_{(2)(2)(1)})\delta(S(a_{(2)(2)(2)})) \\ &\stackrel{(3.18)}{=} -\chi(a_{(1)})\alpha(S(a_{(2)(1)}))\delta(a_{(2)(2)(1)})S(a_{(2)(2)(2)}) \\ &= -\alpha(S(\chi(a_{(1)})a_{(2)(1)}))\delta(a_{(2)(2)(1)})S(a_{(2)(2)(2)}) \\ &\stackrel{(3.5)}{=} -\alpha(S(\chi(a_{(1)(1)})a_{(1)(2)}))\delta(a_{(2)(1)})S(a_{(2)(2)}) \\ &= -\chi(a_{(1)(1)})\alpha(S(a_{(1)(2)}))\delta(a_{(2)(1)})S(a_{(2)(2)}) \\ &= -\chi(a_{(1)(1)})Ad_r S(a_{(1)(2)(2)})\chi(S(a_{(1)(2)(1)}))\delta(a_{(2)(1)})S(a_{(2)(2)}) \\ &= -\chi(a_{(1)(1)})S(a_{(1)(2)(1)})Ad_r S(a_{(1)(2)(2)})\delta(a_{(2)(1)})S(a_{(2)(2)}) \\ &\stackrel{(2.1)}{=} -Ad_r S(a_{(1)})\delta(a_{(2)(1)})S(a_{(2)(2)}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Сравнивая (3.17) и (3.19), заключаем, что выполнено (3.15).

С другой стороны, если выполнены условия (3.10)–(3.12), то, очевидно, S можно продолжить с A на H .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если A – алгебра Хопфа, то отношение (1.7) в [7; Theorem 1.3] равносильно отношению (3.5) в теореме 3.3. Итак, теорему 3.3 можно переформулировать в терминах алгебр Хопфа (см. детали в [7; Theorem 1.3]).

СЛЕДСТВИЕ 3.5. Если $H = A[y; \alpha, \delta]$ – HCQ -расширение Оре и алгебра A кокоммутативна, то r принадлежит центру A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя $m(\text{id} \otimes \varepsilon)$ к

$$\chi(a_{(1)})a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} = Ad_r(a_{(1)})\chi(a_{(2)(1)}) \otimes a_{(2)(2)},$$

получаем

$$\chi(a_{(1)})a_{(2)} = Ad_r(a_{(1)})\chi(a_{(2)}).$$

Поскольку алгебра A кокоммутативна, имеем

$$\alpha(a) = \chi(a_{(1)})a_{(2)} = Ad_r(a_{(1)})\chi(a_{(2)}) = \chi(a_{(1)})Ad_r(a_{(2)}). \quad (3.20)$$

Значит,

$$\begin{aligned} \chi(S(a_{(1)}))\chi(a_{(2)(1)})a_{(2)(2)} &\stackrel{(3.20)}{=} \chi(S(a_{(1)}))\chi(a_{(2)(1)})Ad_r(a_{(2)(2)}) \\ &= \chi(S(a_{(1)})a_{(2)(1)})Ad_r(a_{(2)(2)}) \stackrel{(2.1)}{=} Ad_r(a). \end{aligned}$$

$$\chi(S(a_{(1)}))\chi(a_{(2)(1)})a_{(2)(2)} = \chi(S(a_{(1)})a_{(2)(1)})a_{(2)(2)} \stackrel{(2.1)}{=} \chi(1)a = a.$$

Таким образом, $a = Ad_r(a)$, т.е. $ra = ar$, для всех $a \in A$.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Если $H = A[y; \alpha, \delta]$ является НСQ-расширением Оре, то

$$\Delta(\delta(r)r^{-1}) = \delta(r)r^{-1} \otimes 1 + r \otimes \delta(r)r^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\Delta(r) = r \otimes r$, отношение (3.6) влечет

$$\begin{aligned} \Delta(\delta(r)r^{-1}) &= \Delta(\delta(r))\Delta(r^{-1}) = (\delta(r) \otimes r + r^2 \otimes \delta(r))(r^{-1} \otimes r^{-1}) \\ &= \delta(r)r^{-1} \otimes 1 + r \otimes \delta(r)r^{-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Два НСQ-расширения Оре H и H' коквазигрупп Хопфа A и A' называются изоморфными, если существует изоморфизм $\varphi: H \rightarrow H'$, переводящий A в A' .

Аналогично теореме 3 из [7] доказывается следующее предложение для коквазигрупп Хопфа.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть A и A' – коквазигруппы Хопфа, $H = A[y; \alpha, \delta]$ – НСQ-расширение Оре коквазигруппы A , для которого $\Delta(y) = y \otimes 1 + r \otimes y$, где $r \in G(A)$, и $H' = A'[y'; \alpha', \delta']$ – НСQ-расширение Оре коквазигруппы A' , для которого $\Delta(y') = y' \otimes 1 + r' \otimes y'$, где $r' \in G(A')$. Тогда расширение H изоморфно расширению H' , если существует изоморфизм $\varphi: A \rightarrow A'$, удовлетворяющий условиям

$$\varphi(r) = r', \quad \alpha'(\varphi(a)) = \varphi(\alpha(a)), \quad \delta'(\varphi(a)) = \varphi(\delta(a)) + \varphi(\alpha(a))d - d\varphi(a),$$

где элемент $d \in A'$ таков, что $\Delta(d) = d \otimes 1 + r' \otimes d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi(y) = y' + d$. Тогда отображение $\varphi: A \rightarrow A'$ можно продолжить до отображения $\varphi: H \rightarrow H'$. Для каждого $a \in A$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi(ya) &= \varphi(\alpha(a)y + \delta(a)) = \varphi(\alpha(a))\varphi(y) + \varphi(\delta(a)) = \varphi(\alpha(a))(y' + d) + \varphi(\delta(a)), \\ \varphi(y)\varphi(a) &= (y' + d)\varphi(a) = \alpha'(\varphi(a))y' + \delta'(\varphi(a)) + d\varphi(a) \\ &= \alpha'(\varphi(a))y' + \varphi(\delta(a)) + \varphi(\alpha(a))d - d\varphi(a) + d\varphi(a) \\ &= \alpha(\varphi(a))y' + \varphi(\alpha(a))d + \varphi(\delta(a)) = \varphi(\alpha(a))(y' + d) + \varphi(\delta(a)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi(ya) = \varphi(y)\varphi(a).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi(y)) &= \Delta(y' + d) = \Delta(y') + \Delta(d) = y' \otimes 1 + r' \otimes y' + d \otimes 1 + r' \otimes d \\ &= (y' + d) \otimes 1 + r' \otimes (y' + d), \\ (\varphi \otimes \varphi)\Delta(y) &= (\varphi \otimes \varphi)(y \otimes 1 + r \otimes y) = (y' + d) \otimes 1 + r' \otimes (y' + d). \end{aligned}$$

Получаем

$$\Delta(\varphi(y)) = (\varphi \otimes \varphi)\Delta(y).$$

Значит, $H \cong H'$.

Комбинируя следствие 3.6 с предложением 3.8, получаем следующий результат для коквазигрупп Хопфа.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. Пусть A – коквазигруппа Хопфа, а $H = A[y; \alpha, \delta]$ и $H' = A[y'; \alpha, \delta]$, где $y = y'$, – HCQ-расширения Ore коквазигруппы A , для которых $\Delta(y) = y \otimes 1 + r \otimes y$, $r \in G(A)$ и $\Delta(y') = y' \otimes 1 + r' \otimes y'$, $r' \in G(A)$ соответственно. Тогда H и H' изоморфны, если существует изоморфизм $\varphi: A \rightarrow A$, удовлетворяющий условиям

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= r', & \alpha(\varphi(a)) &= \varphi(\alpha(a)), \\ \delta(\varphi(a)) &= \varphi(\delta(a)) + \varphi(\alpha(a))\delta(r')r'^{-1} - \delta(r')r'^{-1}\varphi(a).\end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Klim, S. Majid, “Hopf quasigroups and the algebraic 7-sphere”, *J. Algebra*, **323**:11 (2010), 3067–3110.
- [2] M. Beattie, S. Dăscălescu, L. Grünenfelder, “Constructing pointed Hopf algebras by Ore extensions”, *J. Algebra*, **225**:2 (2000), 743–770.
- [3] L. Delvaux, “Pairing and Drinfel’d-double of Ore-extensions”, *Comm. Algebra*, **29**:7 (2001), 3167–3177.
- [4] M. Beattie, “An isomorphism theorem for Ore extension Hopf algebras”, *Comm. Algebra*, **28**:2 (2000), 569–584.
- [5] A. Nenciu, “Quasitriangular structures for a class of pointed Hopf algebras constructed by Ore extensions”, *Comm. Algebra*, **29**:8 (2001), 3419–3432.
- [6] A. Nenciu, “Cleft extensions for a class of pointed Hopf algebras constructed by Ore extensions”, *Comm. Algebra*, **29**:5 (2001), 1959–1981.
- [7] А. Н. Панов, “Расширения Ore алгебр Хопфа”, *Матем. заметки*, **74**:3 (2003), 425–434.
- [8] М. Е. Sweedler, *Hopf Algebras*, Math. Lecture Note Ser., W. A. Benjamin, New York, 1969.
- [9] C. Kassel, *Quantum Groups*, Grad. Texts in Math., **155**, Springer-Verlag, New York, 1995.

Ж. Джиао

Henan Normal University, China

E-mail: zmjiao@htu.cn

Поступило

07.11.2011

Х. Менг

Henan Normal University, China

E-mail: mh1198745@163.com