Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Адян, В. С. Атабемян, О хопфовости n -периодических произведений групп, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 4, 483–491

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:22:06

О хопфовости n -периодических произведений групп

С. И. Адян, В. С. Атабекян

Пусть H есть подгруппа группы G . Нормальную подгруппу N_H группы H будем называем *наследуемо нормальной*, если найдется такая нормальная подгруппа N_G группы G , что $N_H = N_G \cap H$.

В работе доказано, что подгруппа N_{G_i} множителя G_i n -периодического произведения $\prod_{i \in I} {}^n G_i$ с нетривиальными компонентами, является наследуемо нормальной подгруппой в том и только том случае, если она содержит подгруппу G_i^n . Также доказывается, что при нечетных $n \geq 665$ любая нетривиальная нормальная подгруппа n -периодического произведения $G = \prod_{i \in I} {}^n G_i$ содержит подгруппу G^n . Отсюда следует, что почти все n -периодические произведения групп являются хопфовыми, т.е. они не изоморфны никакой собственной фактор-группе. Это позволяет строить примеры не простых и не финитно аппроксимируемых хопфовых групп ограниченного периода.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Понятие периодического произведения периода n для данного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ (обозначается через $\prod_{i \in I} {}^n G_i$) было введено первым из авторов настоящей заметки в 1976 г. в работе [1]. Тем самым была решена известная проблема А. И. Мальцева о существовании операции умножения групп, отличной от классических операций свободного и прямого произведений и удовлетворяющей всем известным свойствам этих операций, включая и так называемое свойство *наследственности по подгруппам*. Последнее свойство в связи с этой проблемой Мальцева получило название *постулат Мальцева*.

Периодическое произведение данного периода n или n -периодическое произведение данного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ определяется для каждого нечетного $n \geq 665$ на основе теории Новикова–Адяна, подробно изложенной в монографии [3] (см. также [2] и [4]). Эта группа $\prod_{i \in I} {}^n G_i$ определяется на классе всех групп и является фактор-группой свободного произведения данного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ по специально выбранной системе определяющих соотношений вида $A^n = 1$. Эти операции умножения обладают основными свойствами классических операций свободного и прямого произведения групп: они являются точными, ассоциативными и

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и ГКН РА в рамках российско-армянского совместного научного проекта 13-RF-030.

наследственными по подгруппам. Последнее свойство означает, что для любых подгрупп H_i , лежащих в множителях G_i n -периодического произведения $\prod_{i \in I} G_i$ семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$, их тождественные вложения $H_i \rightarrow G_i$ продолжаются до вложения n -периодического произведения $\prod_{i \in I} H_i$ семейства подгрупп $\{H_i\}_{i \in I}$ в n -периодическое произведение $\prod_{i \in I} G_i$, т.е. подгруппы компонент порождают в $\prod_{i \in I} G_i$ свое n -периодическое произведение.

Предложенная Адяном в статье [1] конструкция n -периодического произведения нечетного периода n обладает важным свойством *условной периодичности*, которое можно рассматривать как естественный аналог коммутации элементов из разных компонент в прямых произведениях групп: *если исходные группы G_i не содержат инволюций, то новая операция умножения групп $\prod_{i \in I} G_i$ может быть построена так, чтобы в ней для любого элемента x , который не сопряжен никакому элементу исходных компонент, выполнялось равенство $x^n = 1$* . Это свойство позволило автору в 1978 г. доказать следующий интересный критерий простоты n -периодических произведений групп, не содержащих инволюций (см. [5] и [2]).

ТЕОРЕМА 1. *Периодическое произведение нечетного периода $n \geq 665$ данного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$, не содержащих инволюцию, является простой группой в том и только том случае, если каждый множитель G_i этого произведения становится единичной группой при добавлении тождества $x^n = 1$.*

Этот критерий простоты позволил автору указать новые серии конечно порожденных бесконечных простых групп в многообразиях периодических групп нечетного составного периода nk , где $k > 1$ и $n \geq 665$. Тем самым был получен положительный ответ на вопрос, поставленный в известной монографии Ханны Нейман: *может ли многообразие, отличное от многообразия всех групп, содержать бесконечное количество неизоморфных неабелевых простых групп?*

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение указанных статей [1], [5] и [2]. В ней мы исследуем некоторые свойства нормальных подгрупп n -периодических произведений групп. В частности, рассматривается интересное свойство *продолжаемости конгруэнции*, заданной на данной подгруппе G_i , до некоторой конгруэнции на всей группе G . Это означает, что фактор-группа подгруппы G_i группы G естественным образом вкладывается в некоторую фактор-группу всей группы G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Нормальную подгруппу N_H данной подгруппы H группы G назовем *наследуемо нормальной* подгруппой, если существует нормальная подгруппа N_G группы G такая, что $H \cap N_G = N_H$.

Если *любая* нормальная подгруппа данной подгруппы H группы G является наследуемо нормальной, то подгруппа H называется *наследуемо факторизуемой*. Понятие наследуемо факторизуемой подгруппы было введено Б. Нейманом в работе [6], где указанные подгруппы назывались *E-подгруппами*. В работе [7] были указаны наследуемо нормальные свободные подгруппы бесконечного ранга в абсолютно свободной группе ранга 2, а в работе [8], доказано, что в каждой нециклической подгруппе свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ нечетного периода $n \geq 1003$ содержится наследуемо факторизуемая подгруппа, изоморфная свободной бернсайдовой группе бесконечного ранга $B(\infty, n)$.

В случае n -периодического произведения двух множителей будем употреблять запись $G_1 \overset{n}{*} G_2$. Известно, что все нормальные подгруппы множителей G_1 и G_2

являются наследуемо нормальными подгруппами G_1 и G_2 как в прямом произведении $G_1 \times G_2$, так и в свободном произведении $G_1 * G_2$.

В настоящей работе мы докажем необходимое и достаточное условие, при выполнении которого данная нормальная подгруппа множителя G_i нетривиального n -периодического произведения $\prod_{i \in I}^n G_i$ произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ является наследуемо нормальной подгруппой. Доказывается также, что любая нетривиальная нормальная подгруппа n -периодического произведения $G = \prod_{i \in I}^n G_i$ содержит подгруппу G^n . Отсюда следует, что если хотя бы в одном из множителей n -периодического произведения $G = \prod_{i \in I}^n G_i$ не выполняется тождество $x^n = 1$, то G хопфова группа, т.е. она не изоморфна никакой собственной фактор группе. Это, в частности, позволяет построить не простые и не финитно аппроксимируемые хопфовы группы ограниченного периода.

2. Описание наследуемо нормальных подгрупп в компонентах периодических произведений групп. Напомним, что n -периодическое произведение $G_1 *^n G_2$ получается из свободного произведения $G_1 * G_2$ в результате добавления определяющих соотношений вида $A^n = 1$ для всех элементарных периодов $A \in (G_1 * G_2)$ всевозможных рангов $\alpha \geq 1$. В частности, элементарным периодом ранга 1 является любое циклически приведенное слово A свободного произведения $G_1 * G_2$ длины $|A| > 1$, не являющееся произведением двух инволюций и не содержащее 9-степеней более коротких слов.

Нам понадобится следующая простая лемма.

ЛЕММА 1. *Если в свободном произведении $G_1 * G_2$ некоторое циклически приведенное слово длины ≥ 2 есть произведение двух инволюций, то некоторый циклический сдвиг этого произведения имеет нормальную форму вида $c_1 z c_2 z^{-1}$, где c_1 и c_2 – инволюции из G_1 или G_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что любой элемент конечного порядка из свободного произведения $G_1 * G_2$ сопряжен одному из элементов множителей G_1 или G_2 . Пусть

$$c = (a_1 \cdots a_t) c_1 (a_1 \cdots a_t)^{-1} \quad \text{и} \quad d = (h_1 \cdots h_s) c_2 (h_1 \cdots h_s)^{-1}$$

– нормальные формы двух инволюций из группы $G_1 * G_2$, где c_1 и c_2 – некоторые инволюции из множителей G_1 или G_2 . Если циклически приведенная форма элемента cd имеет длину ≥ 2 , то он сопряжен или элементу $c_1 c_2$, или некоторому элементу вида

$$c_1 z_1 z_2 \cdots z_k c_2 z_k^{-1} \cdots z_2^{-1} z_1^{-1},$$

где $z_1 z_2 \cdots z_k$ нормальная форма элемента $(a_1 \cdots a_t)^{-1} h_1 \cdots h_s$.

При этом элемент $c_1 z_1 z_2 \cdots z_k c_2 z_k^{-1} \cdots z_2^{-1} z_1^{-1}$ можно считать неприводимым в свободном произведении. Например, если элементы c_1 и z_1 принадлежат одной и той же группе G_j , то, используя равенство $c'_1 = z_1^{-1} c_1 z_1$, мы можем заменить элемент $c_1 z_1 z_2 \cdots z_k c_2 z_k^{-1} \cdots z_2^{-1} z_1^{-1}$ на $c'_1 z_2 \cdots z_k c_2 z_k^{-1} \cdots z_2^{-1}$. Лемма 1 доказана.

Пусть n – фиксированное целое число, удовлетворяющее неравенству $n \geq 665$.

ТЕОРЕМА 2. *Нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_i} множителя G_i нетривиального n -периодического произведения $\prod_{i \in I}^n G_i$ является наследуемо нормальной*

подгруппой группы G_i в том и только том случае, если она содержит подгруппу G_i^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно ограничиться рассмотрением n -периодического произведения двух нетривиальных множителей $G_1 * G_2$ и достаточно доказать искомое утверждение при $i = 1$.

Предположим, что N_{G_1} есть нетривиальная наследуемо нормальная подгруппа в G_1 . Это означает, что имеется такая нормальная подгруппа N группы $G = G_1 * G_2$, что выполняется равенство $N_{G_1} = N \cap G_1$. Нам нужно доказать, что для любого нетривиального элемента $g \in G_1$ имеет место включение $g^n \in N_{G_1}$.

Если порядок $|G_1|$ есть 2 или 3, то группа G_1 простая, т.е. $N_{G_1} = G_1$.

Следовательно, можем считать, что $|G_1| > 3$.

Пусть g – произвольный нетривиальный элемент группы G_1 .

Отдельно рассмотрим два случая: $|G_2| \geq 3$ и $|G_2| = 2$.

Случай 1. $|G_2| \geq 3$.

Выберем произвольные нетривиальные элементы $a \in N_{G_1}$ и $b_1, b_2 \in G_2$, где $b_1 \neq b_2$.

Рассмотрим элемент $b_1^{-1}ab_1b_2^{-1}ab_2g$. Слово $b_1^{-1}a(b_1b_2^{-1})ab_2g$ является циклически приведенным словом длины 6 в свободном произведении $G_1 * G_2$. Согласно лемме 1, перебирая все циклические сдвиги этого слова, заключаем, что оно не равно произведению двух инволюций в свободном произведении $G_1 * G_2$. Поэтому слово $b_1^{-1}a(b_1b_2^{-1})ab_2g$ является элементарным периодом ранга 1. Согласно определению n -периодического произведения в группе G выполняется $(b_1^{-1}ab_1b_2^{-1}ab_2g)^n = 1$.

Очевидно, из условий $a \in N$ и $N_{G_1} \subset N$ следует

$$(b_1^{-1}ab_1b_2^{-1}ab_2g)^n \equiv g^n \pmod{N}.$$

Следовательно, имеем $g^n \equiv 1 \pmod{N}$. Это означает, что $g^n \in N$. Но, поскольку $g \in G_1$, то $g^n \in N \cap G_1$, откуда следует $g^n \in N_{G_1}$.

Таким образом, мы доказали включение $G_1^n \subset N_{G_1}$, где G_1^n есть подгруппа, порожденная всеми n -ми степенями элементов из G_1 . В случае 1 необходимость включения $G_1^n \subset N_{G_1}$ доказана.

Случай 2. $|G_2| = 2$.

Предположим, что G_2 порождается элементом b . Допустим, что $|N_{G_1}| \geq 3$. Тогда найдутся такие нетривиальные элементы $a_1, a_2 \in N_{G_1}$, что $a_1 \neq a_2$. Если $g = a_i^{\pm 1}$ при некотором $i = 1, 2$, то имеем $g^n \in N_{G_1}$. В противном случае согласно лемме 1 элемент $ba_1ba_1ba_2bg$ не равен произведению двух инволюций в свободном произведении $G_1 * G_2$. Значит, слово $ba_1ba_1ba_2bg$ является элементарным периодом ранга 1 и в G справедливо равенство

$$(ba_1ba_1ba_2bg)^n = 1 \quad \text{в } G_1 * G_2.$$

С другой стороны, из $a_1, a_2 \in N_{G_1}$ следует $ba_1ba_1ba_2b = (ba_1b)a_1(ba_2b) \in N_{G_1}$, откуда получаем

$$(ba_1ba_1ba_2bg)^n \equiv g^n \pmod{N}.$$

Следовательно, выполнено соотношение $g^n \in (N \cap G_1) = N_{G_1}$.

Остается рассмотреть подслучай $|N_{G_1}| = 2$ для случая 2. В этом подслучае подгруппа N_{G_1} порождается некоторой инволюцией a .

Если $g^2 \neq 1$ в G_1 , то слово $babg$ также является элементарным периодом ранга 1. Значит, имеем $(babg)^n \equiv g^n \pmod{N}$, откуда получаем соотношение $g^n \in N_{G_1}$.

Если $g = a$ в G_1 , то из $a \in N_{G_1}$ следует $g^n \in N_{G_1}$.

Для завершения доказательства остается рассмотреть случай, когда $g^2 = 1$ и $g \neq a$ в G_1 . В таком случае рассмотрим слово $E = babagbgbg$, которое в свободном произведении $G_1 * G_2$ имеет нормальную форму $E = bab(ag)bgbg$ длины 8. Так как E является элементарным периодом ранга 1, то в G выполнено равенство $E^n = 1$.

Из условий $bab, a \in N$ получаем $1 = E^n \equiv (gbgbg)^n \pmod{N}$, откуда в силу равенств $g^2 = 1$ и $b^2 = 1$ следует $g^n \in N$. Поэтому имеем $g^n \in N \cap G_1 = N_{G_1}$.

Первая часть теоремы 2 доказана.

Для доказательства второй части теоремы 2 предположим, что нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_1} группы G_1 содержит подгруппу G_1^n .

Покажем, что тогда N_{G_1} будет наследуемо нормальной подгруппой группы G_1 , т.е. найдется такая нормальная подгруппа N группы $G = G_1 *^n G_2$, что $G_1 \cap N = N_{G_1}$.

Пусть N_2 есть нормальное замыкание подгруппы G_2 в группе G . В качестве N возьмем нормальную подгруппу $N = N_{G_1} \cdot N_2$ и докажем равенство $G_1 \cap (N_{G_1} \cdot N_2) = N_{G_1}$. Фактор группа G/N_2 получается из группы $G = G_1 *^n G_2$ добавлением новых соотношений вида $g = 1$ для всех $g \in G_2$. Можно считать, что каждое определяющее соотношение $A^n = 1$ группы G заменяется новым соотношением вида $A_1^n = 1$, где A_1 – результат вычеркивания из слова A всех букв алфавита группы G_2 . Фактор группа G/N_2 изоморфна фактор группе G_1/N_1 , где N_1 есть нормальная подгруппа, которая порождается в группе G_1 всеми словами вида A_1^n . Следовательно, N_1 содержится в G_1^n . В силу очевидных соотношений $G_1/N_1 \simeq (G_1 \cdot N_2)/N_2 \simeq G_1/(G_1 \cap N_2)$ имеем $G_1 \cap N_2 = N_1$.

Так как по условию теоремы $G_1^n \subset N_{G_1}$, то получаем равенства $G_1 \cap (N_{G_1} \cdot N_2) = N_{G_1} \cdot (G_1 \cap N_2) = N_{G_1}$. Теорема 2 доказана.

Из доказательства теоремы 2 легко выводится

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G_1 – наследуемо факторизуемая подгруппа n -периодического произведения $G_1 *^n \mathbb{Z}_2$, где $n \geq 665$ – произвольное нечетное число. Если центр группы G_1 содержит некоторую инволюцию, то эта инволюция является единственной инволюцией в G_1 , принадлежащей центру G_1 .

Следующее утверждение является усилением доказанной в работе [9] второго автора теоремы 1 о наследуемо факторизуемых подгруппах n -периодических произведений групп.

СЛЕДСТВИЕ 2. В любом n -периодическом произведении $G_1 *^n G_2$ с нетривиальными компонентами множитель G_i является наследуемо факторизуемой подгруппой тогда и только тогда, когда любая нетривиальная нормальная подгруппа N_{G_i} группы G_i содержит подгруппу G_i^n , порожденную всеми n -ми степенями элементов группы G_i .

3. Нормальные подгруппы n -периодических произведений.

Небольшая модификация изложенного в работе [5] доказательства приведенного в теореме 1 критерия простоты n -периодических произведений нечетного периода для групп, не содержащих инволюции, позволяет получить следующее его обобщение.

В дальнейшем будем считать, что n – фиксированное нечетное число, удовлетворяющее неравенству $n \geq 665$.

ТЕОРЕМА 3. *Если компоненты G_i n -периодического произведения $F = \prod_{i \in I} G_i$ не содержат инволюций, то подгруппа F^n содержится в любой нетривиальной нормальной подгруппе N группы F .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим нетривиальную нормальную подгруппу N группы F и пусть слово E представляет неединичный элемент из N .

Согласно теореме 7 из статьи [1], слово E либо сопряжено в F некоторому элементу $a \in G_i$ при некотором $i \in I$, либо E сопряжено некоторому слову вида A^r , где A есть элементарный период некоторого ранга γ , который зависит от E .

Допустим, что слово E сопряжено в F некоторому элементу $a \in G_k$ при некотором $k \in I$. Докажем, что при любом $j \in I$ истинно включение $G_j^n \subset N$. Очевидно, $a \in N_{G_k} = N \cap G_k$. Так как N_{G_k} – нетривиальная наследуемо нормальная подгруппа в G_k , то по теореме 2, имеет место включение $G_k^n \subset N$. Согласно определению периодического произведения слово ab есть элементарный период ранга 1 для любого нетривиального элемента $b \in G_j$, где $j \neq k$. Из соотношения $a \in N$ и равенства $(ab)^n = 1$ в F следует $b^n \in N$, т.е. включение $G_j^n \subset N$ верно также для $j \neq k$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда слово $E \in N$ не сопряжено в F никакому элементу $a \in G_i$ при любом $i \in I$. В таком случае в силу леммы 4 работы [1] слово E сопряжено в некотором ранге α степени A^r некоторого элементарного периода A некоторого ранга γ , где $0 < \gamma \leq \alpha$ и $0 < r \leq (n+1)/2 + 46$. При этом можно считать, что A^q входит в некоторое слово из класса $\mathcal{M}_{\gamma-1}$.

Мы докажем, что и в оставшемся случае для любого $i \in I$ имеет место включение $G_i^n \subset N$.

Из $E \in N$ следует $A^{kr} \in N$ при любом k . Следовательно, найдется такое t , что $A^t \in N$ и $n/3 \leq t \leq 2n/3$.

Рассмотрим слово aA^t , где a – произвольный нетривиальный элемент одной из групп G_i , $i \in I$. Пусть $D = [a, A^t]_0$ есть нормальная форма слова aA^t . В силу [3; П.6.13] имеем $A^t \in \mathcal{M}_{\gamma-1}$, откуда в силу [3; IV.1.22] и [3; IV.1.21] следует $D \in \mathcal{L}_{\gamma-1}$. Так как по условию A есть элементарный период ранга γ , то из $D \in \mathcal{L}_{\gamma-1}$ в силу [3; I.4.34] следует

$$D \in (\mathcal{A}_{\gamma+1} \cap \mathcal{L}_{\gamma}) \subset \mathcal{L}_{\gamma+1}.$$

По лемме 4 работы [1] имеет место один из следующих двух случаев:

- 1) $D = SyS^{-1}$ при некотором $S \in \mathcal{A}_{\gamma+3}$, где y – элемент одной из подгрупп G_i ;
- 2) слово D сопряжено некоторой степени C^l элементарного периода C некоторого ранга.

Докажем, что случай 1) невозможен.

Пусть

$$D = SyS^{-1} \quad \text{в группе } F, \tag{1}$$

где $S \in \mathcal{A}_{\gamma+3}$ и $y \in G_i$ при некотором $i \in I$. Так как $|y| = 1$, то можно считать, что $SyS^{-1} \in \mathcal{R}_0$. При этом в силу [3; IV.2.20] можем считать, что $S \in \mathcal{M}_{\gamma+1}$. Тогда имеем

$$S \in (\mathcal{A}_{\gamma+3} \cap \mathcal{M}_{\gamma+3}). \quad (2)$$

Сначала докажем, что SyS^{-1} есть абсолютно приведенное слово. Допустим, что при некотором β имеет место $SyS^{-1} \notin \mathcal{K}_\beta$. Выберем минимальное β . Тогда в силу [3; IV.1.19] найдется некоторое нормированное вхождение $W \in \text{Норм}(\beta, SyS^{-1}, n - 217)$. Пусть $W = P * H * Q$. Так как $S \in \mathcal{M}_{\gamma+1}$ можем считать, что $\beta \leq \gamma$.

В силу леммы [3; IV.1.18] элементарные подслова S и S^{-1} не могут содержать более $(n+1)/2 + 42$ участков. Поэтому, элементарное слово H ранга β имеет вид $H = S_1 y S_2$, где выделена центральная буква y слова SyS^{-1} , S_1 является концом слова S , а S_2 – началом обратного слова S^{-1} . При этом каждое из подслов S_1 и S_2 слова H содержит не более $(n+1)/2 + 42$, а значит, и не менее

$$n - 217 - \left(\frac{n+1}{2} + 43 \right) = \frac{n-1}{2} - 260 \geq 2p$$

участков. Эти вхождения элементарных p -степеней S_1 и S_2 согласованы, так как W является их общим продолжением. Тогда в силу леммы [3; II.5.17] подслов S_1 и S_2 родственны. Без ограничения общности, можем считать, что длина S_1 не больше длины S_2 . Поэтому S_1^{-1} будет началом S_2 . Мы получаем, что элементарные p -степени S_1 и S_1^{-1} родственны, а это противоречит [3; II.5.22]. Из полученного противоречия следует

$$SyS^{-1} \in \mathcal{K}_i \quad \text{для любого ранга } i. \quad (3)$$

Это означает, что SyS^{-1} есть приведенное слово во всех рангах.

В силу соотношений $D \in \mathcal{A}_\gamma$ и (3) и леммы [3; VI.2.8] из равенства (1) следует

$$D \sim SyS^{-1} \quad (4)$$

В силу [3; IV.1.7] единственное активное ядро V ранга γ с периодом A в слове D содержит $\geq n/3 - 42$ и $\leq 2n/3$ периодов. В силу [3; IV.2.2] слово SyS^{-1} также должно иметь одно активное ядро ранга γ $V_1 = f_\gamma(V; D, SyS^{-1})$, которое в силу [3; IV.2.12] содержит не менее $n/3 - 86 > q + 4p$ участков. В силу [3; II.5.21] и [3; II.5.2] это ядро V_1 должно содержаться либо в $*S*yS^{-1}$, либо в $Sy*S^{-1}*$. Но в таком случае в силу [3; III.3.24] и [3; IV.1.5] слово SyS^{-1} должно было бы иметь еще одно активное ядро ранга γ , лежащее в другом подслове $S^{\pm 1}$. Но это противоречит эквивалентности (4). Следовательно, случай 1) невозможен.

Рассмотрим случай 2). В этом случае слово $D = aA^t$ сопряжено некоторой степени C^l элементарного периода C некоторого ранга, причем, a есть произвольным образом выбранный элемент одной из групп G_i . Пусть $D = TC^lT^{-1}$.

Используя равенства $aA^t = D$ и $C^n = 1$ получим $(aA^t)^n = D^n = TC^{ln}T^{-1} = 1$ в F . Так как $A^t \in N$, то имеем $a^n \in N$, где a произвольный нетривиальный элемент любой из групп G_i , ($i \in I$).

Таким образом, мы доказали включение $G_i^n \subset N$ для всех $i \in I$. Более того, из предположения $G_i \cap N = \{1\}$ для любого $i \in I$ следует $G_i^n = \{1\}$.

Остается еще раз воспользоваться теоремой 7 работы [2], согласно которой произвольный элемент g группы F либо сопряжен некоторому элементу одной из компонент G_i , либо сопряжен некоторой степени элементарного периода некоторого ранга.

В первом случае элемент g сопряжен некоторому элементу a одной из компонент G_i и по доказанному выше имеем $a^n \in N$, откуда следует $g^n \in N$.

Во втором случае получим $g^n = 1$ по определению F , т.е. $g^n \in N$. Теорема 3 доказана.

4. Не финитно аппроксимируемые хопфовы группы, удовлетворяющие нетривиальному тождеству. Группа называется *хопфовой*, если всякий ее эпиморфизм на себя является автоморфизмом. Согласно известной теореме Мальцева (1958) все конечно порожденные финитно аппроксимируемые группы хопфовы.

Примеры относительно свободных (разрешимых) не финитно аппроксимируемых хопфовых групп впервые были построены Ю.Г.Клейманом в [10].

Вопрос о том являются ли хопфовыми свободные бернсайдовы группы $\mathbf{B}(m, n)$ нечетного периода $n \geq 665$ пока остается открытым. Мы даем положительный ответ на более общий вопрос о том, существуют ли не простые, не финитно аппроксимируемые, конечно порожденные хопфовы группы, удовлетворяющие тождеству вида $x^n = 1$?

ТЕОРЕМА 4. *Если в n -периодическом произведении $G = \prod_{i \in I} G_i$ групп без инволюций при нечетном $n \geq 665$ хотя бы в одном из множителей не выполняется тождество $x^n = 1$, то G является хопфовой группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть данное периодическое произведение G удовлетворяет условию теоремы 4. Если ядро N некоторого гомоморфизма группы G в себя нетривиально, то по теореме 3 оно содержит подгруппу G^n . Образ такого гомоморфизма будет изоморфен некоторой фактор группе группы G/G^n , т.е. в нем выполняется тождество $x^n = 1$. Это означает, что рассматриваемый гомоморфизм не может быть эпиморфизмом, т.е. группа G хопфова.

Теорема 4 позволяет строить не простые и не финитно аппроксимируемые хопфовы группы ограниченного периода.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если нечетное число $n \geq 665$ является собственным делителем числа $r = kn$, то n -периодическое произведение конечного числа $m > 1$ циклических групп периода r есть не простая хопфова группа, которая не финитно аппроксимируема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть группа F есть n -периодическое произведение m циклических групп периода r , где n делит r . Очевидно, свободная бернсайдова группа $\mathbf{B}(m, n)$ является гомоморфным образом группы F , причем, обе эти группы не простые.

Согласно теореме 3 всякий гомоморфизм группы F на себя с нетривиальным ядром можно “пропустить” через $\mathbf{B}(m, n)$.

Из известных результатов Адяна [3] и Зельманова [11] следует, что при нечетных $n \geq 665$ группы $\mathbf{B}(m, n)$ не являются финитно аппроксимируемыми. Отсюда следует, что и группа F не является финитно аппроксимируемой. Хопфовость группы F следует из теоремы 4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Адян, “Периодические произведения групп”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **142**, 1976, 3–21.
- [2] С. И. Адян, “Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева”, *Матем. заметки*, **88:6** (2010), 803–810.
- [3] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975.
- [4] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32:1** (1968), 212–244; “О бесконечных периодических группах. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32:2** (1968), 251–524; “О бесконечных периодических группах. III”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32:3** (1968), 709–731.
- [5] С. И. Адян, “О простоте периодических произведений групп”, *Докл. АН СССР*, **241:4** (1978), 745–748.
- [6] B. H. Neumann, “An essay on free products of groups with amalgamations”, *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A*, **246**:919 (1954), 503–554.
- [7] B. H. Neumann, H. Neumann, “Embedding theorems for groups”, *J. London Math. Soc.*, **34** (1959), 465–479.
- [8] В. С. Атабекян, “О нормальных подгруппах в периодических произведениях С. И. Адяна”, *Алгоритмические вопросы алгебры и логики*, Тр. МИАН, **274**, МАИК, М., 2011, 15–31.
- [9] В. С. Атабекян, “О СЕР-подгруппах n -периодических произведений”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **46:5** (2011), 15–24.
- [10] Ю. Г. Клейман, “О тождествах в группах”, Тр. ММО, **44**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1982, 62–108.
- [11] Е. И. Зельманов, “Решение ослабленной проблемы Бернсайда для групп нечетного показателя”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54:1** (1990), 42–59.

С. И. Адян

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: sia@mi.ras.ru

Поступило

25.10.2013

В. С. Атабекян

Ереванский государственный университет

E-mail: varujan@atabekyan.com