Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Лосев, О поведении ограниченных решений уравнения $\Delta u - c(x)u = 0$ на римановом многообразии специального вида, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 215–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1043>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 12:39:45

УДК 517.95

О ПОВЕДЕНИИ

ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\Delta u - c(x)u = 0$ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А. Г. Лосев

В статье рассматриваются решения уравнения $\Delta u - c(x)u = 0$, где $c(x) \geq 0$, на полных римановых многообразиях, устроенных таким образом: внешность некоторого компакта изометрична прямому произведению полуоси на некоторое компактное многообразие с метрикой $ds^2 = h^2(r) dr^2 + g^2(r) d\theta^2$. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых ограниченные решения уравнения имеют предел при $r \rightarrow \infty$, не зависящий от θ , и условия, при которых выполнена двусторонняя теорема Лиувилля.

Библиография: 4 названия.

Классическая теорема Лиувилля утверждает, что всякое ограниченное решение уравнения

$$\Delta u = 0 \quad (1)$$

в $\mathbb{R}^n$ является тождественной постоянной. Вместе с тем класс многообразий, на которых существуют нетривиальные ограниченные гармонические функции, достаточно обширен и включает, например, многообразия строго отрицательной секционной кривизны.

В данной статье рассматривается более общее, чем (1), уравнение

$$\Delta u - c(x)u = 0, \quad (2)$$

где $c(x) \geq 0$. Так как ненулевая константа не является решением уравнения (2), теорема Лиувилля для него формулируется несколько иначе. В частности, известно, что в $\mathbb{R}^n$ всякое ограниченное решение уравнения

$$\Delta u - \lambda u = 0,$$

где $\lambda = \text{const} > 0$, равно 0.

В статье рассматривается поведение ограниченных решений уравнения (2) на римановом многообразии, устроенном некоторым специальным образом.

Пусть M – полное риманово многообразие, представимое в виде объединения $M = B \cup D$, где B – некоторый компакт, множество D изометрично прямому произведению $\mathbb{R}_+ \times K$ ($\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, K – компактное риманово многообразие) с метрикой $ds^2 = h^2(r) dr^2 + g^2(r) d\theta^2$. Здесь $h(r)$ и $g(r)$ – положительные, гладкие на $\mathbb{R}_+$ функции, а $d\theta^2$ – метрика на K . Примерами таких многообразий могут служить евклидово пространство, пространство Лобачевского, поверхность, полученная вращением графика функции $f(r)$ вокруг луча Or в $\mathbb{R}^n$, и другие.

В дальнейшем будем считать, что $c(r, \theta) = c(r)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $0 \leq c(r) \leq Ac_1(r, \theta)$, где $A = \text{const} > 0$, $c \not\equiv 0$. Тогда если выполнена двусторонняя теорема Лиувилля для уравнения $\Delta v - cv = 0$, то она выполнена и для уравнения $\Delta v - c_1 v = 0$ (см. [1]).

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть на многообразии M выполнено условие

$$I = \int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{r_0}^t (1 + c(\xi)g^2(\xi))g^{n-3}(\xi)h(\xi) d\xi \right) dt = \infty,$$

где $r_0 = \text{const}$, $n = \dim M$, а $c(\xi)$ из уравнения (2). Тогда для любого ограниченного решения уравнения (2) существует $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r, \theta)$, не зависящий от θ .

Более того, если на M выполнено одно из условий:

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} dt < \infty, \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{r_0}^t c(\xi)g^{n-1}(\xi)h(\xi) d\xi \right) dt = \infty; \quad (3)$$

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} dt = \infty, \quad \int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_t^{\infty} c(\xi)g^{n-1}(\xi)h(\xi) d\xi \right) dt = \infty; \quad (4)$$

то всякое ограниченное решение уравнения (2) равно 0.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если выполнено условие

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} dt = \infty,$$

то M – многообразие параболического типа, т.е. емкостный потенциал тождественно равен константе. В противном случае M – многообразие гиперболического типа (см. [2]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Как известно (см., например, [3]), в локальных координатах $x_1, \dots, x_n$ лапласиан имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right),$$

где g^{ij} – контравариантные компоненты метрического тензора (в отличие от ковариантных компонент g_{ij}), $g = \det \|g_{ij}\|$. Отсюда легко показать, что в координатах (r, θ) оператор Лапласа–Бельтрами на D имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{h^2(r)} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{h^2(r)} \left((n-1) \frac{g'(r)}{g(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{g^2(r)} \Delta_{\theta}, \quad (5)$$

где Δ_{θ} – внутренний лапласиан на K .

Пусть $w_i(\theta)$ – собственная функция оператора Лапласа Δ_{θ} , соответствующая i -му собственному числу λ_i компакта K с условием нормировки

$$\int_K w_i^2(\theta) d\theta = 1.$$

Тогда для любого r имеет место разложение в ряд Фурье

$$u(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(r) w_i(\theta),$$

где

$$\Delta_{\theta} w_i(\theta) + \lambda_i w_i(\theta) = 0, \quad (6)$$

$$v_i(r) = \int_K u(r, \theta) w_i(\theta) d\theta. \quad (7)$$

С другой стороны, подставляя в (5) функцию $u_i(r, \theta) = v_i(r) w_i(\theta)$, получаем, что для любого номера i функция $v_i(r)$ является решением следующего обыкновенного дифференциального уравнения:

$$v''(r) + \left((n-1) \frac{g'(r)}{g(r)} - \frac{h'(r)}{h(r)} \right) v'(r) - \left(\lambda \frac{h^2(r)}{g^2(r)} + c(r) h^2(r) \right) v(r) = 0, \quad (8)$$

где $\lambda = \lambda_i$.

Докажем сначала, что в условиях теоремы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_i(r) = 0 \quad (9)$$

для любого номера $i \geq 1$.

Из ограниченности $u(r, \theta)$ и (7) следует ограниченность $v_i(r)$ для любого номера i . Дважды интегрируя уравнение (8), получаем равенство

$$\begin{aligned} v_i(r) = & \int_{r_1}^r \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{r_1}^t (\lambda_i + c(\xi) g^2(\xi)) g^{n-3}(\xi) h(\xi) v_i(\xi) d\xi \right) dt \\ & + \frac{g^{n-1}(r_1)}{h(r_1)} v'_i(r_1) \int_{r_1}^r \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} dt + v_i(r_1), \end{aligned} \quad (10)$$

где числа $r, r_0, r_1, r > r_1 \geq r_0$, любые.

Легко показать, что если при каком-то $r_1 \geq r_0$ выполнено $v'_i(r_1) v_i(r_1) \geq 0$, причем $v'_i(r_1)$ и $v_i(r_1)$ не равны 0 одновременно, то из (10) следует, что $|v_i(r)| \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда из ограниченности $v_i(r)$ следует, что для любого $r \in (r_0, \infty)$ либо $v_i(r) = v'_i(r) = 0$, либо $v'_i(r) v_i(r) < 0$. В первом случае по теореме единственности $v_i(r) \equiv 0$. Покажем, что во втором случае имеет место (9). Домножив при необходимости на -1 , можно считать, что при всех $r \in (r_0, \infty)$ $v_i(r) < 0, v'_i(r) > 0$. Таким образом, $v_i(r)$ монотонно возрастает и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_i(r) \leq 0.$$

Пусть

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_i(r) < 0.$$

Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ и всех $r > r_0$ выполнено

$$v_i(r) \leq -\varepsilon. \quad (11)$$

Покажем, что условие (11) противоречит расходимости интеграла I . Пусть сначала

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} dt < \infty.$$

Тогда из (10) и (11) следует, что

$$\begin{aligned} v_i(r) \leq & -\varepsilon \int_{r_1}^r \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{r_1}^t (\lambda_i + c(\xi)g^2(\xi)) g^{n-3}(\xi) h(\xi) d\xi \right) dt \\ & + \frac{g^{n-1}(r_1)}{h(r_1)} v'_i(r_1) \int_{r_1}^r \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} dt + v_i(r_1), \end{aligned}$$

где правая часть стремится к $-\infty$ при $r \rightarrow \infty$ в силу расходимости I , что противоречит ограниченности $v_i(r)$.

Пусть теперь

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} dt = \infty. \quad (12)$$

Перепишем равенство (10) в виде

$$v_i(r) = \int_{r_1}^r \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} F(t) dt + v_i(r_1), \quad (13)$$

где

$$F(t) = \int_{r_1}^t (\lambda_i + c(\xi)g^2(\xi)) g^{n-3}(\xi) h(\xi) v_i(\xi) d\xi + \frac{g^{n-1}(r_1)}{h(r_1)} v'_i(r_1)$$

— монотонно убывающая функция в силу отрицательности $v_i(r)$. Если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) \neq 0,$$

то из (12) и (13) следует, что $|v_i(r)| \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 0,$$

и, стало быть, выполнено равенство

$$v'_i(r_1) \frac{g^{n-1}(r_1)}{h(r_1)} = - \int_{r_1}^{\infty} (\lambda_i + c(\xi)g^2(\xi)) g^{n-3}(\xi) h(\xi) v_i(\xi) d\xi.$$

Тогда из (13) следует, что

$$v_i(r) = - \int_{r_1}^r \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_t^{\infty} (\lambda_i + c(\xi)g^2(\xi)) g^{n-3}(\xi) h(\xi) v_i(\xi) d\xi \right) dt + v_i(r_1).$$

Так как многообразие M полное, то

$$\int_{r_1}^{\infty} h(t) dt = \infty. \quad (14)$$

Легко показать (см. [2]), что если выполнены условия (12) и (14), то

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_t^{\infty} h(\xi) g^{n-3}(\xi) d\xi \right) dt = \infty.$$

Тем самым, для любого $i \geq 1$ выполнено

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_t^{\infty} (\lambda_i + c(\xi) g^2(\xi)) g^{n-3}(\xi) h(\xi) d\xi \right) dt = \infty.$$

Тогда из предположения (11) получаем, что $v_i(r) \rightarrow -\infty$ при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, справедливо (9).

Докажем далее, что для любой константы N выполнено

$$\sum_{i=1}^{\infty} |v_i(r_0)| i^N < \infty.$$

Используя формулу Грина и равенства (6) и (7), получаем

$$\begin{aligned} |v_i(r_0)| &= \left| \int_K u(r_0, \theta) w_i(\theta) d\theta \right| = \frac{1}{\lambda_i} \left| \int_K u(r_0, \theta) \Delta_{\theta} w_i(\theta) d\theta \right| \\ &= \frac{1}{\lambda_i} \left| \int_K \Delta_{\theta} u(r_0, \theta) w_i(\theta) d\theta \right|. \end{aligned}$$

Применяя аналогичные действия p раз, где p – произвольное натуральное число, получаем

$$|v_i(r_0)| = \frac{1}{\lambda_i^p} \left| \int_K \Delta_{\theta}^p u(r_0, \theta) w_i(\theta) d\theta \right|. \quad (15)$$

Далее, применяя к правой части равенства (15) неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|v_i(r_0)| \leq \frac{1}{\lambda_i^p} \left(\int_K (\Delta_{\theta}^p u(r_0, \theta))^2 d\theta \right)^{1/2} \left(\int_K w_i^2(\theta) d\theta \right)^{1/2} = \frac{c_1}{\lambda_i^p}, \quad (16)$$

где c_1 – константа, зависящая от компакта K и p . Так как K – компакт, то (см., например, [4])

$$\lambda_i \sim c_n i^{2/n} |K|^{-2/n} \quad \text{при } i \rightarrow \infty,$$

где c_n – универсальная постоянная, зависящая только от n . Отсюда $\lambda_i \geq c_2 i^{2/n}$, где c_2 – константа, зависящая от компакта K и n . Поэтому, учитывая неравенство (16), получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty} |v_i(r_0)| i^N \leq c_3 \sum_{i=1}^{\infty} i^{N-2p/n}, \quad (17)$$

где c_3 – константа, зависящая от K и p . Заметим, что для достаточно больших p ряд, стоящий в правой части неравенства (17), сходится.

Из теоремы вложения Соболева и стандартных эллиптических оценок следует, что $|w_i(\theta)| < c_4 i^N$, где c_4 и N – константы, зависящие от компакта K .

Учитывая монотонное убывание функции $|v_i(r)|$, получаем следующие неравенства:

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} v_i(r) w_i(\theta) \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |v_i(r)| \cdot |w_i(\theta)| \leq c_3 \sum_{i=1}^{\infty} |v_i(r_0)| i^N,$$

где последний ряд уже исследован. Таким образом, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} v_i(r) w_i(\theta)$ абсолютно и равномерно сходится. Учитывая (9), получаем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} v_i(r) w_i(\theta) = 0.$$

А так как $w_0(\theta) \equiv \text{const}$, то $v_0(r) w_0(\theta)$ имеет предел при $r \rightarrow \infty$. Тогда и функция $u(r, \theta)$ имеет предел при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, первая часть теоремы 1 доказана.

Перейдем к доказательству второй части теоремы 1. Пусть на M выполнены условия (3) или (4). Докажем, что при этих условиях $v_0(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Как и выше, получаем

$$\begin{aligned} v_0(r) &= \int_{r_0}^r \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{r_0}^t c(\xi) g^{n-1}(\xi) h(\xi) v_0(\xi) d\xi \right) dt \\ &\quad + \frac{g^{n-1}(r_0)}{h(r_0)} v_0'(r_0) \int_{r_0}^r \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} dt + v_0(r_0). \end{aligned}$$

Доказательство того, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_0(r) = 0$$

дословно совпадает с приведенными выше рассуждениями для $v_i(r)$, $i \geq 1$. Таким образом, $u(r, \theta) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Применяя принцип максимума, получаем, что $u \equiv 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Интегрируя уравнение (8) с краевыми условиями $v_i(r_0) = 1$ и $v_i'(r_0) = 0$, а также учитывая монотонное возрастание функции $v_i(r)$ в этом случае, получаем

$$v_i'(r) \leq \frac{h(r)v(r)}{g^{n-1}(r)} \int_{r_0}^r (\lambda_i + c(t)g^2(t)) g^{n-3}(t) h(t) dt.$$

Интегрируя данное неравенство, имеем

$$v_i(r) \leq \exp \left\{ \int_{r_0}^r \frac{h(t)}{g^{n-1}(t)} \left(\int_{r_0}^t (\lambda_i + c(\xi)g^2(\xi)) g^{n-3}(\xi) h(\xi) d\xi \right) dt \right\}. \quad (18)$$

Если интеграл $I < \infty$, то из (18) следует, что для любого номера i функция $v_i(r)$ ограничена. В таком случае мы можем построить бесконечное число нетривиальных ограниченных решений $v_i(r) w_i(\theta)$ уравнения (2) на D , не имеющих предела при $r \rightarrow \infty$. Таким образом, условие расходимости интеграла I в теореме является существенным.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В [2] показано, что если $I = \infty$, то всякое положительное решение уравнения (1) на многообразии M равно константе. Для положительных решений уравнения (2) это не так. Действительно, выбирая на многообразии соответствующим образом функцию $c(r)$, мы можем построить положительное решение $v_0(r)$ уравнения (8), имеющее предел при $r \rightarrow \infty$. Для этого необходимо, чтобы выполнялось $I = \infty$, но не выполнялись условия второй части теоремы 1. С другой стороны, функция $v_0(r)$ является решением уравнения (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Григорьян А. А., Надирашвили Н. С. Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи // Изв. вузов. Матем. 1987. № 5. С. 25–33.
- [2] Лосев А. Г. Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида // Изв. вузов. Матем. 1991. № 12. С. 15–24.
- [3] Sario L., Nakai M., Wang C., Chung L. O. Classification Theory of Riemannian Manifolds. Lecture Notes in Math. V. 605. New York: Springer, 1977.
- [4] Berger M., Ganduchon P., Mazet E. Le Spectre d'une Variété Riemannienne. Lecture Notes in Math. V. 194. New York: Springer, 1971.

Волгоградский государственный университет

Поступило
17.02.93