Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Подвигин, Об экспоненциальной скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 4, 638–640

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 17:39:09

Об экспоненциальной скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа

И. В. Подвигин

Пусть (Ω, λ) – пространство с вероятностной мерой, T – его эндоморфизм. Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$A_n f(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega).$$

Эргодическая теорема Биркгофа утверждает, что для таких средних существует λ -п.в. предел $f^* = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n f$; в случае эргодичности эндоморфизма этот предел λ -п.в. равен среднему значению $\lambda(f) = \int_{\Omega} f d\lambda$.

Скорость сходимости в этой теореме будем измерять скоростью убывания при $n \rightarrow \infty$ для каждого $\varepsilon > 0$ величин

$$P_n^\varepsilon = \lambda \left\{ \sup_{k \geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon \right\}.$$

Оценки для этих величин можно получать с помощью оценок для вероятностей больших уклонений, т.е. для величин $p_n^\varepsilon = \lambda \{|A_n f - f^*| \geq \varepsilon\}$ (см. [1], [2]). Оказывается, что если для некоторой существенно ограниченной функции f известна не только верхняя оценка, но и точная экспоненциальная асимптотическая формула для вероятностей больших уклонений, то такая же формула верна и для скорости сходимости в теореме Биркгофа (теорема 1 ниже). В качестве примера мы применяем этот результат к транзитивному диффеоморфизму Аносова.

Пусть $f \in L_\infty(\Omega)$, $\Delta = \|f - f^*\|_\infty$. Будем предполагать, что функция $f \neq f^*$ п.в., иначе оценивать нечего: $P_n^\varepsilon = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$. Для любых действительных $\varepsilon > 0$ и $d > 1$ положим

$$r = r(\varepsilon, d) = 1 + \frac{\varepsilon(d-1)}{\Delta}.$$

ЛЕММА 1. Пусть $f \in L_\infty(\Omega)$. Тогда для любых действительных $\varepsilon > 0$ и $d > 1$

$$P_n^{d\varepsilon} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \left\{ \sup_{nr^k \leq m < nr^{k+1}} |A_m f - f^*| \geq d\varepsilon \right\} \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_{n_k}^\varepsilon \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N},$$

где n_k – минимальное целое число, не меньшее nr^k .

ЛЕММА 2. Пусть $f \in L_\infty(\Omega)$. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ найдутся такие константы $C(\varepsilon) > 0$, $\gamma(\varepsilon) > 0$, что для всех $n > n_0(\varepsilon)$, $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{Z}^+$, справедливо неравенство $p_n^\varepsilon \leq C(\varepsilon)e^{-\gamma(\varepsilon)n}$, то для всех $n > n_0(\varepsilon)$ и $d > 1$

$$P_n^{d\varepsilon} \leq C(\varepsilon) \left(1 + \frac{\ln(1 + 1/\gamma(\varepsilon))}{\ln r(\varepsilon, d)} \right) e^{-\gamma(\varepsilon)n}.$$

Лемма 1 доказана в [1], [2] для случая $d = 2$; для произвольного действительного $d > 1$ доказательство аналогично. Лемма 2 доказывается с помощью леммы 1 таким же образом, как в [2; теорема 3, пункт 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-5998.2012.1).

DOI: 10.4213/mzm10430

© И. В. Подвигин, 2014

ТЕОРЕМА 1. Если для $f \in L_\infty(\Omega)$ найдется непрерывная функция $\gamma_f(t): \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ такая, что $\gamma_f(t) = 0$, если и только если $t = 0$, и для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_n^\varepsilon = -\gamma_f(\varepsilon),$$

то для такой функции f при этих же $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_n^\varepsilon = -\gamma_f(\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$. Для любого $\delta > 0$ найдется такое $N_1 = N_1(\delta, \gamma_f(\varepsilon))$, что для всех $n \geq N_1$

$$e^{-(\gamma_f(\varepsilon)+\delta)n} \leq \mathbf{P}_n^\varepsilon \leq e^{-(\gamma_f(\varepsilon)-\delta)n}. \quad (1)$$

Аналогично, для любого $d > 1$ (такого, что $d\varepsilon$ оставалось бы малым) и $\delta > 0$ найдется такое $N_2 = N_2(\delta, \gamma_f(d\varepsilon))$, что для всех $n \geq N_2$

$$e^{-(\gamma_f(d\varepsilon)+\delta)n} \leq \mathbf{P}_n^{d\varepsilon} \leq e^{-(\gamma_f(d\varepsilon)-\delta)n}. \quad (2)$$

Используя правую часть неравенства (1) для $\delta < \gamma_f(\varepsilon)$ и лемму 2 с константами $C(\varepsilon) = 1$, $\gamma(\varepsilon) = \gamma_f(\varepsilon) - \delta$ и $n_0(\varepsilon) = N_1$, получаем для всех $n \geq N_1$ и $d > 1$

$$\mathbf{P}_n^{d\varepsilon} \leq \left(1 + \frac{\ln(1 + 1/(\gamma_f(\varepsilon) - \delta))}{\ln r(\varepsilon, d)}\right) e^{-(\gamma_f(\varepsilon)-\delta)n}. \quad (3)$$

Левая часть неравенства (2) при любых $\delta > 0$, $d > 1$ и всех $n \geq N_2$ дает очевидную оценку

$$e^{-(\gamma_f(d\varepsilon)+\delta)n} \leq \mathbf{P}_n^{d\varepsilon} \leq \mathbf{P}_n^{d\varepsilon}. \quad (4)$$

Записывая оценки (3) и (4) вместе, для любых $0 < \delta < \gamma_f(\varepsilon)$ и $d > 1$ при всех $n \geq N_3$, $N_3 = N_3(\delta, \gamma_f(\varepsilon), \gamma_f(d\varepsilon)) = \max\{N_1, N_2\}$, получаем неравенства

$$e^{-(\gamma_f(d\varepsilon)+\delta)n} \leq \mathbf{P}_n^{d\varepsilon} \leq \left(1 + \frac{\ln(1 + 1/(\gamma_f(\varepsilon) - \delta))}{\ln r(\varepsilon, d)}\right) e^{-(\gamma_f(\varepsilon)-\delta)n}.$$

Полагая

$$k(\varepsilon, \delta, d) = \ln \left(1 + \frac{\ln(1 + 1/(\gamma_f(\varepsilon) - \delta))}{\ln(1 + \varepsilon(d-1)/\Delta)}\right)$$

и логарифмируя последнее неравенство, получаем

$$-\gamma_f(d\varepsilon) - \delta \leq \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_n^{d\varepsilon} \leq \frac{k(\varepsilon, \delta, d)}{n} - \gamma_f(\varepsilon) + \delta.$$

После замены εd на ε получаем для любых $\varepsilon > 0$, $d > 1$ и $0 < \delta < \gamma_f(\varepsilon/d)$ и при всех $n \geq N_3(\delta, \gamma_f(\varepsilon/d), \gamma_f(\varepsilon))$

$$-\gamma_f(\varepsilon) - \delta \leq \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_n^\varepsilon \leq \frac{k(\varepsilon/d, \delta, d)}{n} - \gamma_f\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) + \delta. \quad (5)$$

Воспользуемся теперь непрерывностью γ_f . Для любого $\nu > 0$ найдется $\tau = \tau(\nu, \varepsilon) > 0$ такое, что $|\gamma_f(\varepsilon) - \gamma_f(\varepsilon/d)| < \nu$ при всех $1 < d \leq \tau$.

Взяв $1 < d \leq \tau$, неравенство (5) перепишем в виде

$$-\gamma_f(\varepsilon) - \delta \leq \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_n^\varepsilon \leq \frac{k(\varepsilon/d, \delta, d)}{n} - \gamma_f(\varepsilon) + \nu + \delta.$$

Отсюда получаем, что для любых $\nu > 0$ и $0 < \delta < \min_{1 \leq d \leq \tau} \gamma_f(\varepsilon/d)$

$$-\delta \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln P_n^\varepsilon + \gamma_f(\varepsilon) \right) \leq \nu + \delta,$$

$$-\delta \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln P_n^\varepsilon + \gamma_f(\varepsilon) \right) \leq \nu + \delta.$$

Ввиду произвольности ν и δ заключаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n^\varepsilon = -\gamma_f(\varepsilon).$$

Ясно, что получившийся предел справедлив для всех $\varepsilon > 0$, при которых верно аналогичное соотношение для больших уклонений. Теорема доказана.

Применим теперь полученный результат к транзитивному C^2 -гладкому диффеоморфизму Аносова T , определенному на компактном C^∞ -гладком римановом многообразии Ω . Хорошо известно (см, например, [3]), что для всякого гиббсовского состояния $\lambda = \lambda_g$, порожденного гёльдеровской функцией g , и для всякой гёльдеровской функции f , не когомологичной константе (т.е. не существует такой непрерывной функции ϕ и константы c , что $f = \phi \circ T - \phi + c$ п.в.), найдутся интервал $[a, b]$ и вещественно аналитическая функция $I(t) : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^+$ такие, что

- (i) $\lambda(f) \in (a, b)$;
- (ii) $I(t) = 0$, если и только если $t = \lambda(f)$;
- (iii) для любого борелевского множества $J \subset \mathbb{R}$ такого, что

$$\inf\{I(t) : t \in [a, b] \cap \text{cl}J\} = \inf\{I(t) : t \in [a, b] \cap \text{int}J\}$$

будет справедлив принцип больших уклонений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda\{A_n f \in J\} = -\inf\{I(t) : t \in [a, b] \cap J\}.$$

Обсуждение этого последнего свойства в более общем контексте принципа больших уклонений можно найти, например, в [4; предложение 3.3].

Взяв $J = \{t : |\lambda(f) - t| \geq \varepsilon\}$ для $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \min\{\lambda(f) - a, b - \lambda(f)\}$, и применив теорему 1 к указанной динамической системе для гёльдеровской f , не когомологичной константе, и непрерывной на интервале $[0, \varepsilon_0]$ функции

$$\gamma_f(t) = \inf\{I(s) : s \in [a, \lambda(f) - t] \cup [\lambda(f) + t, b]\},$$

получим для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ точную асимптотику скорости сходимости:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln P_n^\varepsilon = -\gamma_f(\varepsilon).$$

Для гёльдеровской же f , когомологичной константе, легко проверяется, что при любом $\varepsilon > 0$ будет $P_n^\varepsilon = 0$ для всех достаточно больших n .

В заключение заметим, что аналог теоремы 1 справедлив и для случая непрерывного времени.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Качуровский, *УМН*, **51:4** (1996), 73–124. [2] А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин, *Матем. заметки*, **94:4** (2013), 569–577. [3] M. Pollicott, R. Sharp, *Comm. Math. Phys.*, **290:1** (2009), 321–334. [4] R. S. Ellis, *Scand. Actuarial J.*, **1995:1** (1995), 97–142.

И. В. Подвигин

Новосибирский государственный университет

E-mail: ivan_podvigin@ngs.ru

Поступило

18.11.2013