Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Керян, Одна теорема единственности аддитивных функций и ее приложения к некоторым ортогональным рядам, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 382–396

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10431>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 07:35:39

Одна теорема единственности аддитивных функций и ее приложения к некоторым ортогональным рядам

К. А. Керян

В работе исследуется вопрос восстановления определенной на $\mathcal{P}$ -ичных параллелепипедах аддитивной функции по ее производной по $\mathcal{P}$ -ичным параллелепипедам. Полученная теорема применена к вопросам единственности кратных рядов по системам Хаара и Прайса.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10431

Из теории тригонометрических рядов хорошо известно, что из сходимости тригонометрического ряда почти всюду к нулю не следует, что все коэффициенты этого ряда равны нулю (см. [1; с. 804]). Такая же ситуация имеет место для других классических систем, например для рядов по системам Хаара, Уолша, Франклина.

В работах [2], [3] впервые были рассмотрены вопросы единственности для почти всюду сходящихся или суммируемых тригонометрических рядов. Понятно, что при этом были наложены дополнительные условия на ряд. Здесь мы их формулировать не будем, поскольку результаты настоящей работы касаются рядов по системам Хаара, Уолша, а также их обобщений. Отметим только, что аналогичные вопросы для кратных тригонометрических рядов рассмотрены в работах [4], [5].

Через $\mu(A)$ обозначается Лебегова мера множества A . Напомним определение A -интеграла.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ называется A -интегрируемой, если

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mu\{x \in [0, 1] : |f(x)| > \lambda\} = 0$$

и существует предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x)]_\lambda dx =: (A) \int_0^1 f(x) dx,$$

где

$$[f(x)]_\lambda = \begin{cases} f(x), & \text{при } |f(x)| \leq \lambda \\ 0, & \text{при } |f(x)| > \lambda. \end{cases}$$

Для рядов по системе Хаара Геворкяном [6], в частности, доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть ряд по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \quad (1)$$

почти всюду суммируется к $f(x)$ и

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mu\{x \in [0, 1] : S^*(x) > \lambda\} = 0, \quad (2)$$

где $S^*(x)$ мажоранта частных сумм ряда (1). Тогда ряд (1) является рядом Фурье-Хаара в смысле A -интегрирования, т.е.

$$a_n = (A) \int_0^1 f(x) \chi_n(x) dx.$$

Понятно, что из теоремы 1 следуют:

- 1) если ряд (1) п.в. сходится к нулю и выполняется (2), то все коэффициенты a_n равны нулю;
- 2) если ряд (1) п.в. сходится к интегрируемой по Лебегу функции f и выполняется (2), то (1) является рядом Фурье-Хаара функции f .

Теорема 1 была распространена Костиным [7] на ряды по обобщенной системе Хаара и системе Прайса (см. определения ниже). Допустим, что система Прайса или обобщенная система Хаара порождена последовательностью $P = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\sup p_n < \infty$. Положим $m_n = \prod_{i=1}^n p_i$ и $S^*(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_{m_n}(x)|$. Для таких систем Костин [7] доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть последовательность частных сумм $S_{m_n}(x)$ ряда по системе Прайса или по обобщенной системе Хаара почти всюду сходится к функции $f(x)$ и существует некоторая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \mu\{x \in [0, 1] : S^*(x) > \lambda_k\} = 0.$$

Тогда n -й коэффициент данного ряда восстанавливается по формуле

$$a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x) \overline{\chi_n(x)}]_{\lambda_m^n} dx,$$

где $\lambda_m^n = \lambda_m \|\chi_n\|_{\infty}$, в случае ряда по обобщенной системе Хаара $\chi_n(x)$ и

$$b_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x) \overline{\psi_n(x)}]_{\lambda_m} dx,$$

в случае ряда по системе Прайса $\psi_n(x)$.

В настоящей работе мы усиливаем эту теорему, рассматривая более широкий AH -интеграл, введенный К. Йонедой [8].

Дадим некоторые необходимые определения и введем обозначения. Для комплекснозначной функции $f(x)$ определим срезку неотрицательной функцией $\lambda(x)$ следующим образом:

$$[f(x)]_{\lambda(x)} = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq \lambda(x), \\ 0, & |f(x)| > \lambda(x). \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [8], [9]. Пусть $\mathcal{H} = \{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$ последовательность действительных интегрируемых по Лебегу на $[0, 1]$ функций такая, что п.в. выполняется

$$0 \leq h_1(x) \leq h_2(x) \leq \dots \leq h_n(x) \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \infty.$$

Тогда $f(x): [0, 1] \rightarrow C$ называется $A\mathcal{H}$ -интегрируемой на $[0, 1]$, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{x \in [0, 1]: |f(x)| \geq \alpha h_n(x)\}} h_n(x) dx = 0 \quad \text{для всех } \alpha > 0$$

и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 [f(x)]_{h_n(x)} dx =: (A\mathcal{H}) \int_0^1 f(x) dx,$$

который и называется $A\mathcal{H}$ -интегралом функции $f(x)$.

Если $h_n(x) \equiv n$, то соответственно получится обычный A -интеграл, а если же $h_n(x) \equiv \lambda_n$, где $\Lambda := \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ возрастающая к бесконечности последовательность, то получается обобщение A -интеграла, которое обозначим через $A\Lambda$ -интеграл.

Аналогично можно обобщить определения $A\mathcal{H}$ интеграла для комплекснозначной функции $f(x)$, определенной на параллелепипеде $I \subset \mathbb{R}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если для функции $f: I \rightarrow C$ существует такая последовательность возрастающих функций $\mathcal{H} = \{h_n(x)\}_{n=1}^\infty$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{x \in I: |f(x)| \geq h_n(x)\}} h_n(x) dx = 0, \quad (3)$$

и существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I [f(x)]_{h_n(x)} dx,$$

то существует последовательность функций $\mathcal{G}$ такая, что функция $f(x)$ $A\mathcal{G}$ интегрируема и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I [f(x)]_{h_n(x)} dx = (A\mathcal{G}) \int_I f(x) dx. \quad (4)$$

Действительно, из условия (3) следует, что существует неубывающая последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$, сходящаяся к $+\infty$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \int_{\{x \in I: |f(x)| \geq h_n(x)\}} h_n(x) dx = 0. \quad (5)$$

Обозначив $g_n(x) = \alpha_n h_n(x)$, получим, что для любого $\alpha > 0$ $\alpha g_n(x) > h_n(x)$ при достаточно больших n и, следовательно,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{x \in I: |f(x)| \geq \alpha g_n(x)\}} g_n(x) dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \int_{\{x \in I: |f(x)| \geq h_n(x)\}} h_n(x) dx = 0.$$

Кроме того, из (5) имеем

$$\left| \int_I [f(x)]_{h_n(x)} dx - \int_I [f(x)]_{g_n(x)} dx \right| \leq \int_{\{x \in I: |f(x)| \geq h_n(x)\}} g_n(x) dx \rightarrow 0;$$

следовательно, выполняется (4).

Пусть $P^j = \{p_i^j\}_{i=1}^\infty$, $1 \leq j \leq d$, последовательности натуральных чисел, отличных от 1, и $\mathcal{P} = \{P^j\}_{j=1}^d$. Положим $m_0^j = 1$ и $m_k^j = \prod_{i=1}^k p_i^j$. Через Λ_k^d обозначим множество всех $\mathcal{P}$ -ичных параллелепипедов ранга k , т.е.

$$\Lambda_k^d = \left\{ I : I = \left[\frac{n_1}{m_k^1}, \frac{n_1+1}{m_k^1} \right] \times \cdots \times \left[\frac{n_d}{m_k^d}, \frac{n_d+1}{m_k^d} \right], n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z} \right\},$$

а также будем писать, что $r(I) = k$, если $I \in \Lambda_k^d$.

Пусть $\Lambda^d = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \Lambda_k^d$, где $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Комплекснозначную функцию Ψ , определенную на множестве Λ^d , назовем *аддитивной функцией на $\mathcal{P}$ -ичных параллелепипедах*, если для всех $I, I_1, \dots, I_n \in \Lambda^d$, для которых $I = \bigcup_{i=1}^n I_i$ и $\text{int}(I_i) \cap \text{int}(I_j) = \emptyset$, $i \neq j$, имеет место

$$\Psi(I) = \sum_{i=1}^n \Psi(I_i).$$

Точку $x \in \mathbb{R}$ назовем *иррациональной относительно последовательности $\{p_i\}_{i=1}^\infty$* , если $x \cdot \prod_{i=1}^n p_i \notin \mathbb{Z}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Точку $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ назовем *$\mathcal{P}$ -ично иррациональной*, если для всех $1 \leq j \leq d$ точка x_j иррациональна относительно последовательности P^j .

Для $\mathcal{P}$ -ично иррациональных точек $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ определим производную $\Psi'(x)$ и мажоранту $\Psi^*(x)$ следующим образом:

$$\Psi'(x) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ x \in I_k \in \Lambda_k^d}} \frac{\Psi(I_k)}{\mu(I_k)}, \quad \Psi^*(x) = \sup_{I: x \in I \in \Lambda^d} \frac{|\Psi(I)|}{\mu(I)}.$$

В настоящей работе нас будут интересовать $\mathcal{AH}$ -интегралы по системам функций, удовлетворяющих следующим условиям. Зафиксируем некоторый $I_0 \in \Lambda^d$. Пусть функции $h_i(x): I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$0 \leq h_1(x) \leq h_2(x) \leq \cdots \leq h_m(x) \leq \cdots, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(x) = \infty, \quad (6)$$

и существуют постоянная $C > 0$ и для каждого $m \in \mathbb{N}$ такие параллелепипеды $I_1^m, \dots, I_{n_m}^m \in \Lambda^d$, что $\text{int}(I_i^m) \cap \text{int}(I_j^m) = \emptyset$, $i \neq j$ и $\bigcup_{k=1}^{n_m} I_k^m = I_0$, для которых

$$\sup_{x \in I_k^m} h_m(x) \leq C \inf_{x \in I_k^m} h_m(x) \quad (7)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n_m$, и

$$\inf_{m,k} \int_{I_k^m} h_m(x) dx > 0. \quad (8)$$

Иначе говоря, для каждой функции можно параллелепипед I_0 раздробить на маленькие “кусочки”, на каждом из которых эта функция принимает значения, эквивалентные друг другу, а интегралы по этим “кусочкам” больше некоторой положительной постоянной.

ТЕОРЕМА 4. Пусть последовательность функций $h_n(x)$ удовлетворяет условиям (6)–(8), а Ψ комплекснозначная аддитивная функция, определенная на $\mathcal{P}$ -ичных параллелепипедах, где $\mathcal{P} = \{P^j\}_{j=1}^d$, $P^j = \{p_i^j\}_{i=1}^\infty$ и

$$\sup_{i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq d} p_i^j < \infty. \quad (9)$$

Если

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\{x \in I_0: \Psi^*(x) > h_m(x)\}} h_m(x) dx = 0 \quad (10)$$

и п.в. существует $\Psi'(x)$, то для всякого $I \in \Lambda^d$, $I \subset I_0$, имеет место

$$\Psi(I) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I [\Psi'(x)]_{h_m(x)} dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $I = I_0 = [0, 1]^n$. Пусть I_{ki} , $i = 1, 2, \dots$, $\prod_{j=1}^d m_k^j$, суть все параллелепипеды ранга k из $[0, 1]^n$. Обозначим

$$\Psi_k(x) = \frac{\Psi(I_{ki})}{\mu(I_{ki})} \quad \text{при } x \in \text{int}(I_{ki}). \quad (11)$$

Ясно, что п.в. существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k(x) = \Psi'(x) =: f(x). \quad (12)$$

Введем следующие обозначения:

$$M = \sup_{i \in N, 1 \leq j \leq d} p_i^j, \quad \lambda_k^m = \inf_{x \in I_k^m} h_m(x) \quad \text{и} \quad \varepsilon_0 = \inf_{m, k} \lambda_k^m \mu(I_k^m).$$

Из (7), (8) вытекает, что $\varepsilon_0 > 0$. Возьмем $\varepsilon < M^{-d} \varepsilon_0$. Из условия (10) следует, что для достаточно большого m имеет место

$$\int_{E_m} h_m(x) dx < \varepsilon, \quad \text{где } E_m = \{x \in [0, 1]^d : \Psi^*(x) > h_m(x)\}. \quad (13)$$

Следовательно, из (7) имеем

$$\sum_{k=1}^{n_m} \lambda_k^m \mu\{x \in I_k^m, \Psi^*(x) > C \lambda_k^m\} < \varepsilon. \quad (14)$$

Зафиксируем m и через k_0 обозначим наибольший ранг параллелепипедов I_k^m , т.е.

$$k_0 = \max_{1 \leq k \leq n_m} r(I_k^m).$$

Обозначим $\tilde{\Psi}_{k_0}(x) = \Psi_{r(I_{k_0}^m)}(x)$, при $x \in I_{k_0}^m$. Нетрудно убедиться, что $|\tilde{\Psi}_{k_0}(x)| \leq C \lambda_{k_0}^m$, когда $x \in I_{k_0}^m$. Действительно, в противном случае существует k' , $1 \leq k' \leq n_m$, такой, что $|\tilde{\Psi}_{k_0}(x)| > C \lambda_{k'}^m$ для всех $x \in I_{k'}^m$, так как $\tilde{\Psi}_{k_0}(x)$ является постоянной на каждом I_k^m . Следовательно, из (14) и определения ε_0 будем иметь $\varepsilon > \lambda_{k'}^m \mu(I_{k'}^m) \geq \varepsilon_0$, что противоречит выбору ε .

Пусть I_1^m представлено в виде объединения параллелепипедов $I_1, \dots, I_s$ ранга $r(I_1^m) + 1$. Если $|\Psi_{r(I_1^m)+1}(x)|$ не превосходит $C \lambda_1^m$ на каждом I_j , $j = 1, \dots, s$, то на параллелепипеде I_1^m положим $\tilde{\Psi}_{k_0+1}(x) = \Psi_{r(I_1^m)+1}(x)$, и каждый из параллелепипедов $I_1, \dots, I_s$ назовем *параллелепипедом первого класса* для $\tilde{\Psi}_{k_0+1}(x)$. В противном случае положим $\tilde{\Psi}_{k_0+1}(x) = \Psi_{r(I_1^m)}(x)$ на I_1^m , и назовем I_1^m *параллелепипедом второго класса* для $\tilde{\Psi}_{k_0+1}(x)$. Аналогично определим класс каждого параллелепипеда

$I_2^m, \dots, I_{n_m}^m$, а также определим $\tilde{\Psi}_{k_0+1}(x)$ на каждом из этих параллелепипедов, т.е. на $I_2^m, \dots, I_{n_m}^m$.

Допустим $\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)$ определено. Определим $\tilde{\Psi}_{k_0+l+1}(x)$ следующим образом. Параллелепипеды второго класса для $\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)$, останутся параллелепипедами второго класса также для $\tilde{\Psi}_{k_0+l+1}(x)$, и положим $\tilde{\Psi}_{k_0+l+1}(x) = \tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)$ на этих параллелепипедах. А если I является параллелепипедом первого класса для $\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)$, то действуем следующим образом. Допустим I представлено в виде объединения параллелепипедов $I_1, \dots, I_s$ ранга $r(I) + 1$. Без ограничения общности будем считать, что $I \subset I_1^m$. Если на каждом I_j , $j = 1, \dots, s$ модуль от $\Psi_{r(I)+1}(x)$ не превосходит $C\lambda_1^m$, то положим $\tilde{\Psi}_{k_0+l+1}(x) = \Psi_{r(I)+1}(x)$ на I , и каждый из параллелепипедов $I_1, \dots, I_s$ назовем параллелепипедом первого класса для $\tilde{\Psi}_{k_0+l+1}(x)$. В противном случае назовем I параллелепипедом второго класса для $\tilde{\Psi}_{k_0+l+1}(x)$, и положим $\tilde{\Psi}_{k_0+l+1}(x) = \Psi_{r(I)}(x)$ на I .

Итак, функция $\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)$ является константой на $\mathcal{P}$ -ичных параллелепипедах $I_1, \dots, I_t$ (вообще говоря, разных рангов) и

$$\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x) = \frac{\Psi(I_j)}{\mu(I_j)}, \quad \text{при } x \in \text{int}(I_j). \quad (15)$$

По определению функции $\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)$ удовлетворяют

$$|\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)| \leq C\lambda_k^m, \quad \text{при } x \in \text{int}(I_k^m). \quad (16)$$

Через $A_{k_0,l}$ обозначим объединение всех параллелепипедов, которые являются параллелепипедами второго класса для $\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)$, и пусть $A_{k_0,l}^k = A_{k_0,l} \cap I_k^m$. Докажем, что

$$\mu(A_{k_0,l}^k) \leq M^d \mu\{x \in I_k^m : \Psi^*(x) > C\lambda_k^m\}. \quad (17)$$

Заметим, что множество $A_{k_0,l}^k$ это объединение параллелепипедов второго класса для $\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)$, которые являются подмножеством I_k^m . Следовательно, в каждом из этих параллелепипедов I есть хоть один параллелепипед J_I такой, что $r(J_I) = r(I) + 1$ и $|\Psi_{r(J_I)}(x)| > C\lambda_k^m$ при $x \in J_I$. Следовательно, $\Psi^*(x) > C\lambda_k^m$ при $x \in J_I$. Заметим также, что из определения величины M следует, что $\mu(I) \leq M^d \mu(J_I)$, откуда получим

$$\mu(A_{k_0,l}^k) = \sum \mu(I) \leq M^d \sum \mu(J_I) \leq M^d \mu\{x \in I_k^m : \Psi^*(x) > C\lambda_k^m\}.$$

Перейдем к оцениванию следующей величины:

$$\begin{aligned} & \left| \Psi(I_0) - \int_{I_0} [\Psi'(x)]_{h_m(x)} dx \right| \leq \sum_{k=1}^{n_m} \left| \int_{I_k^m} \tilde{\Psi}_{k_0+l}(x) dx - \int_{I_k^m \setminus E_m} \Psi'(x) dx \right| + \int_{E_m} h_m(x) dx \\ & \leq \sum_{k=1}^{n_m} \left| \int_{(I_k^m \setminus E_m) \cap A_{k_0,l}^c} (\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x) - \Psi'(x)) dx \right| + \int_{E_m} |\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)| dx \\ & \quad + \sum_{k=1}^{n_m} \int_{(I_k^m \setminus E_m) \cap A_{k_0,l}^c} (|\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)| + |\Psi'(x)|) dx + \int_{E_m} h_m(x) dx \\ & = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Из (16) и определения λ_k^m имеем, что $I_2 \leq CI_4$; следовательно, из (13) получим

$$I_2 + I_4 < (C + 1)\varepsilon. \quad (18)$$

При $x \in I_k^m \setminus E_m$ имеем

$$|\Psi'(x)| \leq \Psi^*(x) \leq h_m(x) \leq C\lambda_k^m. \quad (19)$$

Следовательно, из (16) и (17) получим

$$I_3 \leq \sum_{k=1}^{n_m} 2C\lambda_k^m \mu(A_{k_0,l}^k) \leq 2CM^d \sum_{k=1}^{n_m} \lambda_k^m \mu\{x \in I_k^m : \Psi^*(x) > C\lambda_k^m\},$$

откуда, применив (14), получим следующую оценку для I_3 :

$$I_3 \leq 2CM^d \varepsilon. \quad (20)$$

Осталось оценить I_1 . Из (12) следует, что существует l_0 такое, что для всякого $l' > l_0$ имеет место

$$\mu\{x \in I_k^m : |\Psi_{k_0+l'}(x) - \Psi'(x)| \geq \varepsilon\} < \frac{\varepsilon}{\lambda_k^m n_m}. \quad (21)$$

Выберем l так, чтобы для любого k выполнялось неравенство $r(I_k^m) + l > k_0 + l_0$ для всех $k = 1, 2, \dots, n_m$. Обозначим

$$B_{k_0,l}^k = \{x \in I_k^m : |\Psi_{r(I_k^m)+l}(x) - \Psi'(x)| \geq \varepsilon\}, \quad B_{k_0,l} = \bigcup_{k=1}^{n_m} B_{k_0,l}^k.$$

Заметим, что из (21) следует неравенство $\mu(B_{k_0,l}^k) < \varepsilon/(\lambda_k^m n_m)$, откуда, учитывая, что $\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x) = \Psi_{r(I_k^m)+l}(x)$ при $x \in I_k^m \cap A_{k_0,l}^c$ и неравенства (16), (19), получим

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{k=1}^{n_m} \int_{((I_k^m \setminus E_m) \cap A_{k_0,l}^c) \setminus B_{k_0,l}^k} |\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x) - \Psi'(x)| dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n_m} \int_{((I_k^m \setminus E_m) \cap A_{k_0,l}^c) \cap B_{k_0,l}^k} (|\tilde{\Psi}_{k_0+l}(x)| + |\Psi'(x)|) dx \\ &\leq \varepsilon \mu(I_0) + \sum_{k=1}^{n_m} 2C\lambda_k^m \frac{\varepsilon}{\lambda_k^m n_m}. \end{aligned}$$

Итак, имеем $I_1 \leq (2C + 1)\varepsilon$. Объединяя эту оценку вместе с оценками (18), (20), получим, что для достаточно больших m

$$\left| \Psi(I_0) - \int_{I_0} [\Psi'(x)]_{h_m(x)} dx \right| < (3C + 2 + 2CM^d)\varepsilon.$$

Теорема 4 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Любую комплекснозначную адитивную функцию Ψ , определенную на $\mathcal{P}$ -ичных параллелепипедах, можно продолжить следующим образом. Пусть

$$I = \left[\frac{n_1}{m_{k_1}^1}, \frac{n_1 + 1}{m_{k_1}^1} \right] \times \dots \times \left[\frac{n_d}{m_{k_d}^d}, \frac{n_d + 1}{m_{k_d}^d} \right].$$

Тогда существуют такие $I_1, \dots, I_s \in \Lambda^d$, что $\text{int}(I_i) \cap \text{int}(I_j) = \emptyset$ при $i \neq j$, и $I = \bigcup_{i=1}^s I_i$. Положим $\Psi(I) = \sum_{i=1}^s \Psi(I_i)$. Очевидно, что результат теоремы 4 останется верным для таких I .

ЗАМЕЧАНИЕ 6. При выполнении условия (9) имеем, что последовательность функций $\Psi_k(x)$, определенная в (11), является регулярным мартингалом. Следовательно, согласно теореме Шоу (см. [10; с. 242] и [11]) последовательность $\Psi_k(x)$ будет сходиться п.в. на множестве, где

$$\text{либо } \limsup_{k \rightarrow \infty} \Psi_k(x) < +\infty, \quad \text{либо } \liminf_{k \rightarrow \infty} \Psi_k(x) > -\infty,$$

тем более на множестве, где $\sup_k |\Psi_k(x)| < +\infty$. Отсюда будем иметь, что при выполнении условия (10) последовательность $\Psi_k(x)$ сходится п.в., т.е. условие существования п.в. $\Psi'(x)$ в теореме 4 и п.в. сходимость ряда в теореме 8 ниже не существенно.

Заметим, что взяв в теореме 4 $p_i^j = 2$ для всех $i \in N$, $1 \leq j \leq d$, а функции $h_m(x) \equiv \lambda_m$, получим следующую теорему, доказанную Геворкяном в [6].

ТЕОРЕМА 7. Пусть Φ – аддитивная функция, определенная на двоичных кубах. Если существует такая последовательность $\lambda_m \uparrow \infty$, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m \mu\{x \in I_0 : \Phi^*(x) > \lambda_m\} = 0, \quad (22)$$

и п.в. существует $\Phi'(x)$, то для всякого двоичного куба $I \subset I_0$ имеет место следующая формула:

$$\Phi(I) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_I [\Phi'(x)]_{\lambda_m} dx.$$

Приведем пример аддитивной функции, определенной на $[0, 1]$, для которой удовлетворяются условия теоремы 4 для некоторой последовательности функций $\mathcal{H}$, однако мажоранта которой не удовлетворяет условию (22) теоремы 7, более того, невозможно разделить отрезок $[0, 1]$ на несколько отрезков, на каждом из которых удовлетворялось бы (22).

Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – система Хаара (см. [12; с. 70]). Принята также двухиндексная нумерация этой системы по следующему правилу. Если $n = 2^k + i$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$, $k \geq 0$, то полагается $\chi_k^{(i)}(x) := \chi_n(x)$ и $\chi_0^{(0)}(x) := \chi_1(x)$. В таких обозначениях для $\chi_k^{(i)}(x)$ имеем

$$\chi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \notin \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]; \\ 2^{k/2}, & \text{при } x \in \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^k}\right); \\ -2^{k/2}, & \text{при } x \in \left(\frac{2i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right). \end{cases}$$

Значения функции $\chi_k^{(i)}(x)$ в точках разрыва равняются полусумме односторонних пределов, однако для нас не важны значения в этих точках, так как в совокупности эти точки образуют множество меры нуль.

ПРИМЕР 1. Обозначим

$$k_n = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \alpha(n, i) = \left(1 - \frac{1}{2^{i-1}}\right) 2^{k_n+i} + 1.$$

Рассмотрим следующий ряд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n 2^{(k_n+i)/2} \chi_{k_n+i}^{\alpha(n,i)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x). \quad (23)$$

Фиксируем $j \in \mathbb{N}$. Ясно, что

$$2S^*f(x) \geq |2^{(k_n+i)/2} \chi_{k_n+i}^{\alpha(n,i)}(x)| \quad \text{для любых } i = 1, \dots, n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $S^*(x)$ мажоранта частных сумм ряда (23). Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu \left\{ x \in \left[1 - \frac{1}{2^j}, 1\right] : S^*(x) > 2^m \right\} \\ \geq \mu \left\{ x \in \left[1 - \frac{1}{2^j}, 1\right] : |2^{(k_n+i)/2} \chi_{k_n+i}^{\alpha(n,i)}(x)| > 2^{m+1} \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

для любых $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим также, что

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}\right) \supset \text{supp } \chi_{k_n+n}^{\alpha(n,n)} \supset \text{supp } \chi_{k_{n+1}+n}^{\alpha(n+1,n)} \\ \supset \text{supp } \chi_{k_{n+2}+n}^{\alpha(n+2,n)} \dots \supset \text{supp } \chi_{k_{n+l}+n}^{\alpha(n+l,n)} \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Из определения k_n следует, что любое натуральное число, в частности $m+2$, может быть представлено в виде $k_n + i$, где $1 \leq i \leq n$. Обозначив $i' = \max(i, j+1)$, из (25) получим

$$\text{supp } \chi_{k_n+i'}^{\alpha(n,i')}(x) \subset \left[1 - \frac{1}{2^j}, 1\right] \quad \text{и} \quad \|2^{(k_n+i')/2} \chi_{k_n+i'}^{\alpha(n,i')}\|_{\infty} = 2^{k_n+i'} \geq 2^{m+2}.$$

Из последнего и (24) получим, что

$$\mu \left\{ x \in \left[1 - \frac{1}{2^j}, 1\right] : S^*(x) > 2^m \right\} \geq \mu(\text{supp } \chi_{k_n+i'}^{\alpha(n,i')}) = \frac{1}{2^{k_n+i'}} \geq \frac{1}{2^{k_n+i+j}}.$$

Следовательно,

$$2^m \mu \left\{ x \in \left[1 - \frac{1}{2^j}, 1\right] : S^*(x) > 2^m \right\} \geq \frac{1}{2^{j+2}}.$$

Поэтому для любого $\lambda > 1$ будем иметь

$$\lambda \mu \left\{ x \in \left[1 - \frac{1}{2^j}, 1\right] : S^*(x) > \lambda \right\} \geq \frac{1}{2^{j+3}},$$

что означает

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mu \left\{ x \in \left[1 - \frac{1}{2^j}, 1\right] : S^*(x) > \lambda \right\} > 0,$$

для всех $j \in \mathbb{N}$. Из этого следует, что невозможно отрезок $[0, 1]$ разделить на конечное число отрезков I_k , $k = 1, \dots, s$, так, чтобы для любого k имело место

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \mu\{x \in I_k : S^*(x) > \lambda\} = 0,$$

так как можно выбрать j настолько большим, чтобы $[1 - 1/2^j, 1]$ являлся подмножеством того отрезка I_k , которому принадлежит 1.

Для всякого двоичного отрезка I , т.е. отрезка вида $[m/2^k, (m+1)/2^k]$, обозначим

$$\Psi(I) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_I \sum_{n \leq N} a_n \chi_n(x) dx.$$

Правосторонний предел существует для всех двоичных интервалов I , так как для достаточно большого N (зависящего от I) интегралы от n -й функции Хаара по I будут равняться нулю при всех $n \geq N$. Заметим также, что для двоично иррациональной точки x будем иметь, что $\Psi'(x) = f(x)$, а $\Psi^*(x) = S^*(x)$. Следовательно, для каждого разбиения отрезка $[0, 1]$ существует такой отрезок I_k , что

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \lambda \mu \{x \in I_k : \Psi^*(x) > \lambda\} > 0.$$

Поэтому теорема 7 не может быть применена для восстановления аддитивной функции Ψ из $\Psi'(x)$.

С другой стороны, назначив

[illegible]

нетрудно заметить, что функции $h_n(x)$ удовлетворяют условиям (6)–(8). Так как при $x \in [1 - 1/2^{j-1}, 1 - 1/2^j]$, $1 \leq j \leq n$, имеет место

$$\sum_{n=1}^m \sum_{i=1}^n |2^{(k_n+i)/2} \chi_{k_n+i}^{\alpha(n,i)}(x)| \leq 2^{k_m+j+1} = h_m(x),$$

использовав (25) получим, что

$$E := \{x \in [0, 1] : S^*(x) > h_m(x)\} \subset \bigcup_{i=1}^m \text{supp } \chi_{k_{m+1}+i}^{\alpha(m+1,i)} \cup \bigcup_{i=m+1}^{\infty} \text{supp } \chi_{k_i+i}^{\alpha(i,i)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_E h_m(x) dx &\leq \sum_{i=1}^m \int_{\text{supp } \chi_{k_{m+1}+i}^{\alpha(m+1,i)}} h_m(x) dx + \sum_{i=m+1}^{\infty} \int_{\text{supp } \chi_{k_i+i}^{\alpha(i,i)}} h_m(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m 2^{k_m+i+1} \cdot \frac{1}{2^{k_{m+1}+i}} + 2^m \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k_{i+1}}} \leq \frac{2m}{2^m} + \frac{2^{m+1}}{2^{k_{m+1}}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Последнее означает, что для аддитивной функции Ψ выполняются все условия теоремы 4 и, следовательно, она может быть восстановлена из $\Psi'(x)$ посредством $A\mathcal{H}$ -интеграла.

Пусть $P = \{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ последовательность натуральных чисел, отличных от единицы, $m_0 = 1$, $m_j = \prod_{i=1}^j p_i$. Тогда P -ичное разложение точки $x \in [0, 1)$ будет иметь вид

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{m_j}, \quad 0 \leq x_j \leq p_j - 1, \quad x_j \in \mathbb{Z}, \quad (26)$$

и для того, чтобы каждой точке $x \in [0, 1)$ соответствовал единственный P -ичный ряд для P -ично рациональных точек, т.е. для точек вида l/m_n , где $l = 0, 1, \dots, m_n - 1$, выбираем суммы (26), которые состоят из конечного числа ненулевых слагаемых. Напомним определения системы *мультипликативных функций Прайса* $\{\psi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ и системы *обобщенных функций Хаара*. Система Прайса определяется по формулам

$$\psi_k(x) = \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j x_j}{p_j}\right),$$

где $k = \sum_{j=1}^n \alpha_j m_{j-1}$, $0 \leq \alpha_j \leq p_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, n$. Система обобщенных функций Хаара $\{\chi_n^P(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется по формулам

$$\chi_0(x) \equiv 1,$$

а для $n \geq 1$

$$\chi_n(x) = \chi_{r,s}^k(x) = \begin{cases} \sqrt{m_k} e^{2\pi i x_{k+1} s / p_{k+1}}, & x \in \left[\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right), \\ 0, & x \in [0, 1) \setminus \left[\frac{r}{m_k}, \frac{r+1}{m_k}\right), \end{cases}$$

где $n = m_k + r(p_{k+1} - 1) + s - 1$, $0 \leq r \leq m_k - 1$, $1 \leq s \leq p_{k+1} - 1$.

Заметим, что система Хаара соответствует последовательности $p_i = 2$, $i \in \mathbb{N}$. Для всякого $\mathcal{P} = \{P_j\}_{j=1}^d$ рассмотрим ряд

$$\sum_{\bar{n} \in Z_+^d} a_{\bar{n}} \chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x) = \sum_{\substack{n_j \in Z_+ \\ j=1, \dots, d}} a_{n_1 \dots n_d} \chi_{n_1}^1(x_1) \dots \chi_{n_d}^d(x_d) \quad (27)$$

и $\mathcal{P}$ -ичные частные суммы этого ряда, т.е.

$$\sum_{\bar{n} < \tilde{N}} a_{\bar{n}} \chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x),$$

где под $\bar{n} < \tilde{k}$ будем понимать $0 \leq n_j < m_{k_j}^j$ для всех $j = 1, 2, \dots, d$, а $\tilde{N} = (N, \dots, N) \in \mathbb{R}^d$, для любого натурального N . Нетрудно заметить, что существует ряд по системе Прайса

$$\sum_{\bar{n} \in Z_+^d} b_{\bar{n}} \psi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x) \quad (28)$$

такой, что для всех $k \in \mathbb{N}^d$ имеет место

$$\sum_{\bar{n} < \bar{k}} a_{\bar{n}} \chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x) = \sum_{\bar{n} < \bar{k}} b_{\bar{n}} \psi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x). \quad (29)$$

В частности, из этого следует, что $\mathcal{P}$ -ичные частные суммы этого ряда совпадают $\mathcal{P}$ -ичными частными суммами ряда (27):

$$S_N^{\chi}(x) := \sum_{\bar{n} < \tilde{N}} a_{\bar{n}} \chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x) = \sum_{\bar{n} < \tilde{N}} b_{\bar{n}} \psi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x) =: S_N^{\psi}(x). \quad (30)$$

Итак, каждому ряду (27) можно сопоставить ряд (28), и наоборот. Каждому ряду (27) поставим в соответствие аддитивную функцию Ψ следующим образом:

$$\Psi(I) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_I \sum_{\bar{n} < \tilde{N}} a_{\bar{n}} \chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x) dx \quad \text{при} \quad I \in \Lambda^d. \quad (31)$$

Правосторонний предел существует для всех $I \in \Lambda^d$, так как для достаточно большого N (зависящего от I) имеет место

$$\int_I a_{\bar{n}} \chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad \max_{1 \leq j \leq d} \left\{ \frac{n_j}{m_N^j} \right\} \geq 1.$$

Из (31) будем иметь, что для каждой $\mathcal{P}$ -ично иррациональной точки x

$$\Psi'(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\bar{n} < \tilde{N}} a_{\bar{n}} \chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x) \quad \text{и} \quad \Psi^*(x) = \sup_N \left| \sum_{\bar{n} < \tilde{N}} a_{\bar{n}} \chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x) \right|. \quad (32)$$

Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\mathcal{P}$ -ичные суммы кратного ряда Хаара (27) п.в. сходятся к функции $f(x)$, а для $\mathcal{P}$ выполняется (9). Если существует последовательность функций $\{h_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям (6)–(8), для которой

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\{x \in [0,1]^d : \Psi^*(x) > h_m(x)\}} h_m(x) dx = 0,$$

то для всякого $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ имеем

$$a_{\bar{n}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} [f(x) \overline{\chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x)}]_{h_{\bar{n}}^{\bar{n}}(x)} dx,$$

где $h_{\bar{n}}^{\bar{n}}(x) = \|\chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x)\|_{\infty} h_m(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично рассуждениям для кратного ряда Хаара из [6]. Зафиксируем $\bar{n} \in N^d$. Функция $\chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x)$ принимает постоянные значения на параллелепипедах $I_1, \dots, I_s$ (не обязательно $\mathcal{P}$ -ичных), равные по модулю $\|\chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x)\|_{\infty}$ и равняется нулю вне $\bigcup_{i=1}^s I_i$. Для $\mathcal{P}$ -ичного параллелепипеда $I \subset I_i$ положим

$$\Psi_i(I) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_I \overline{\chi_{\bar{n}}^{\mathcal{P}}(x)} \sum_{\bar{k} < \tilde{N}} a_{\bar{k}} \chi_{\bar{k}}^{\mathcal{P}}(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (33)$$

Ясно, что функции $\Psi_i(x)$ являются аддитивными на $\mathcal{P}$ -ичных параллелепипедах I_i ,

$$\Psi'_i(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\bar{k} < \tilde{N}} a_{\bar{k}} \chi_k^{\mathcal{P}}(x) \overline{\chi_n^{\mathcal{P}}(x)} = f(x) \overline{\chi_n^{\mathcal{P}}(x)} \quad \text{п.в.}, \quad (34)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\{x \in I_i : \Psi_i^*(x) > \|\chi_n^{\mathcal{P}}(x)\|_{\infty} h_m(x)\}} \|\chi_n^{\mathcal{P}}(x)\|_{\infty} h_m(x) dx = 0. \quad (35)$$

Применяя теорему 4 и замечание 5, из (34) и (35) получим

$$\Psi_i(I_i) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{I_i} [f(x) \overline{\chi_n^{\mathcal{P}}(x)}]_{h_m^{\bar{n}}(x)} dx, \quad i = 1, \dots, s.$$

Суммируя по i и приняв во внимание аддитивность интеграла и определение функций Ψ_i (см. (33)), получим

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} [f(x) \overline{\chi_n^{\mathcal{P}}(x)}]_{h_m^{\bar{n}}(x)} dx &= \sum_{i=1}^s \Psi_i(I_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} \overline{\chi_n^{\mathcal{P}}(x)} \sum_{\bar{k} < \tilde{N}} a_{\bar{k}} \chi_k^{\mathcal{P}}(x) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\bar{k} < \tilde{N}} a_{\bar{k}} \int_{[0,1]^d} \chi_k^{\mathcal{P}}(x) \overline{\chi_n^{\mathcal{P}}(x)} dx = a_{\bar{n}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Заметим, что из равенства соответствующих $\mathcal{P}$ -ичных частных сумм рядов (30) и определения $\Psi(I)$ следует, что

$$\Psi(I) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_I S_N^{\psi}(x) dx,$$

а также для каждой $\mathcal{P}$ -ично иррациональной точки x из (30) и (32) будем иметь $\Psi'(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N^{\psi}(x)$ и $\Psi^*(x) = \sup_N |S_N^{\psi}(x)|$.

Аналогичная теорема может быть доказана также для системы Прайса. А именно имеет место следующая

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\mathcal{P}$ -ичные частные суммы ряда (28) п.в. сходятся к функции $f(x)$, а для $\mathcal{P}$ выполняется (9). Если существует последовательность функций $\{h_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям (6)–(8), для которой

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\{x \in [0,1]^d : \Psi^*(x) > h_m(x)\}} h_m(x) dx = 0,$$

то для всякого $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ имеем

$$b_{\bar{n}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} [f(x) \overline{\psi_n^{\mathcal{P}}(x)}]_{h_m(x)} dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично рассуждениям для системы Прайса теоремы 1 из [7]. Для каждого P^j функции Прайса и соответствующие обобщенные функции Хаара одинакового ранга n связаны друг с другом при помощи линейных зависимостей, т.е. для всякого k , $m_{n-1}^j \leq k < m_n^j$, и j , $1 \leq j \leq d$, имеем

$$\psi_k^j = \sum_{l=m_{n-1}^j}^{m_n^j-1} \gamma_k^{j,l} \chi_l^j. \quad (36)$$

Покажем, что для каждого j , $1 \leq j \leq d$, векторы $\Gamma_k^j = (\gamma_k^{j,m_{n-1}}, \dots, \gamma_k^{j,m_{n-1}})$, $m_{n-1} \leq k \leq m_n - 1$, ортогональны друг другу, воспользовавшись ортогональностью систем Прайса и обобщенного Хаара:

$$\begin{aligned} \delta_{k,p} &= (\psi_k^j, \overline{\psi_p^j}) = \left(\sum_{l=m_{n-1}}^{m_n-1} \gamma_k^{j,l} \chi_l^j, \sum_{s=m_{n-1}}^{m_n-1} \overline{\gamma_p^{j,s} \chi_s^j} \right) = \sum_{l,s=m_{n-1}}^{m_n-1} \gamma_k^{j,l} \overline{\gamma_p^{j,s}} (\chi_l^j, \overline{\chi_s^j}) \\ &= \sum_{l,s=m_{n-1}}^{m_n-1} \gamma_k^{j,l} \overline{\gamma_p^{j,s}} \delta_{l,s} = \sum_{l=m_{n-1}}^{m_n-1} \gamma_k^{j,l} \overline{\gamma_p^{j,l}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (29) следует, что для любого $\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^d$

$$\sum_{\bar{s} \leq \bar{l} < \bar{s} + \bar{1}} a_{\bar{l}} \chi_{\bar{l}}^{\mathcal{P}} = \sum_{\bar{s} \leq \bar{k} < \bar{s} + \bar{1}} b_{\bar{k}} \psi_{\bar{k}}^{\mathcal{P}}, \quad (38)$$

а из (36) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{s} \leq \bar{k} < \bar{s} + \bar{1}} b_{\bar{k}} \psi_{\bar{k}}^{\mathcal{P}} &= \sum_{\bar{s} \leq \bar{k} < \bar{s} + \bar{1}} b_{k_1, \dots, k_d} \left(\sum_{l=m_{s_1}}^{m_{s_1+1}-1} \gamma_{k_1}^{1,l} \chi_l^1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\sum_{l=m_{s_d}}^{m_{s_d+1}-1} \gamma_{k_1}^{d,l} \chi_l^d \right) \\ &= \sum_{\bar{s} \leq \bar{k} < \bar{s} + \bar{1}} b_{\bar{k}} \cdot \left(\sum_{\bar{s} \leq \bar{l} < \bar{s} + \bar{1}} \gamma_{\bar{k}}^{\bar{l}} \chi_{\bar{l}}^{\mathcal{P}} \right) = \sum_{\bar{s} \leq \bar{l} < \bar{s} + \bar{1}} \left(\sum_{\bar{s} \leq \bar{k} < \bar{s} + \bar{1}} b_{\bar{k}} \gamma_{\bar{k}}^{\bar{l}} \right) \chi_{\bar{l}}^{\mathcal{P}}, \end{aligned}$$

где $\gamma_{\bar{k}}^{\bar{l}} = \gamma_{k_1}^{1,l_1} \dots \gamma_{k_d}^{d,l_d}$. Используя (38), получим следующее соотношение между коэффициентами $a_{\bar{l}}$ и $b_{\bar{k}}$:

$$a_{\bar{l}} = \sum_{\bar{s} \leq \bar{k} < \bar{s} + \bar{1}} b_{\bar{k}} \gamma_{\bar{k}}^{\bar{l}}.$$

Отсюда, используя равенства (36), (37) и теорему 8, получим

$$\begin{aligned} b_{\bar{p}} &= \sum_{\bar{s} \leq \bar{k} < \bar{s} + \bar{1}} b_{k_1, \dots, k_d} \cdot \delta_{k_1, p_1} \dots \delta_{k_d, p_d} = \sum_{\bar{s} \leq \bar{k} < \bar{s} + \bar{1}} b_{\bar{k}} \sum_{\bar{s} \leq \bar{l} < \bar{s} + \bar{1}} \gamma_{\bar{k}}^{\bar{l}} \overline{\gamma_{\bar{p}}^{\bar{l}}} \\ &= \sum_{\bar{s} \leq \bar{l} < \bar{s} + \bar{1}} \overline{\gamma_{\bar{p}}^{\bar{l}}} \sum_{\bar{s} \leq \bar{k} < \bar{s} + \bar{1}} b_{\bar{k}} \gamma_{\bar{k}}^{\bar{l}} = \sum_{\bar{s} \leq \bar{l} < \bar{s} + \bar{1}} \overline{\gamma_{\bar{p}}^{\bar{l}}} a_{\bar{l}} \\ &= \sum_{\bar{s} \leq \bar{l} < \bar{s} + \bar{1}} \overline{\gamma_{\bar{p}}^{\bar{l}}} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} [f(x) \overline{\chi_{\bar{l}}^{\mathcal{P}}(x)}]_{h_{\bar{m}}(x)} dx \\ &= \sum_{\bar{s} \leq \bar{l} < \bar{s} + \bar{1}} \overline{\gamma_{\bar{p}}^{\bar{l}}} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} [f(x)]_{h_m(x)} \overline{\chi_{\bar{l}}^{\mathcal{P}}(x)} dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} [f(x)]_{h_m(x)} \sum_{\bar{s} \leq \bar{l} < \bar{s} + \bar{1}} \overline{\gamma_{\bar{p}}^{\bar{l}}} \chi_{\bar{l}}^{\mathcal{P}}(x) dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} [f(x)]_{h_m(x)} \psi_{\bar{p}}^{\mathcal{P}}(x) dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^d} [f(x) \psi_{\bar{p}}^{\mathcal{P}}(x)]_{h_m(x)} dx. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В последней теореме, взяв $d = 1$ и $h_m(x) \equiv \lambda_m$, получим теорему 2 доказанную Костиным в [7].

Автор благодарен Г. Г. Геворкяну за обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [2] А. Б. Александров, “Об A -интегрируемости граничных значений гармонических функций”, *Матем. заметки*, **30**:1 (1981), 59–72.
- [3] Г. Г. Геворкян, “О единственности тригонометрических рядов”, *Матем. сб.*, **180**:11 (1989), 1462–1474.
- [4] Г. Г. Геворкян, “О единственности кратных тригонометрических рядов”, *Матем. сб.*, **184**:11 (1993), 93–130.
- [5] С. М. Галстян, “О единственности аддитивных функций сегмента и тригонометрических рядов”, *Матем. заметки*, **56**:4 (1994), 38–47.
- [6] Г. Г. Геворкян, “О единственности двоичных кубов и рядов по системе Хаара”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **30**:5 (1995), 7–21.
- [7] В. В. Костин, “К вопросу о восстановлении коэффициентов рядов по некоторым ортогональным системам функций”, *Матем. заметки*, **73**:5 (2003), 704–723.
- [8] K. Yoneda, “On generalized A -integrals. I”, *Proc. Japan Acad.*, **45**:3 (1969), 159–163.
- [9] K. Yoneda, “On generalized (A) -integrals. II”, *Math. Japon.*, **18**:2 (1973), 149–167.
- [10] R. F. Gundy, “Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **124**:2 (1966), 228–248.
- [11] Y. S. Chow, “Convergence theorems of martingales”, *Z. Wahrsch. und Verw. Gebiete*, **1**:4 (1963), 340–346.
- [12] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
- [13] В. А. Скворцов, “О нуль рядах по некоторой мультипликативной системе”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1979, № 6, 63–67.

К. А. Керян

Ереванский государственный университет

E-mail: karenkeryan@yahoo.com

Поступило

23.12.2013

Исправленный вариант

06.04.2014