Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кашин, Об одном специальном ортогональном разложении пространства $L^2(0, 1)$, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 4, 635–637

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10433>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 16:07:50

Об одном специальном ортогональном разложении пространства $L^2(0, 1)$

Б. С. Кашин

В заметке установлена

ТЕОРЕМА. *Существуют разложение пространства $L^2(0, 1)$ в ортогональную прямую сумму подпространств E_1 и E_2 :*

$$L^2(0, 1) = E_1 \oplus E_2$$

и абсолютная постоянная K такие, что для любой функции $f \in L^2(0, 1)$, $\|f\|_2 \leq 1$, найдутся функции $g_1 \in E_1$, $g_2 \in E_2$ с

$$\|f - g_1\|_\infty \leq K, \quad \|f - g_2\|_\infty \leq K.$$

Здесь и ниже через $\|\cdot\|_p$ мы обозначаем норму в пространстве $L^p(0, 1)$, $1 \leq p \leq \infty$. Кроме того, мы используем следующие обозначения:

- $\text{span}\{f_i\}$ – линейная оболочка набора функций $\{f_i\}$;
- D_N – N -мерное пространство кусочно-постоянных функций:

$$D_N = \left\{ f \in L^2(0, 1) : f(x) = \text{const}, x \in \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} \right), 1 \leq i \leq N \right\},$$

$\{\chi_k^i, k = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, 2^k, \chi_0^0 \equiv 1\}$ – система Хаара (см. [1; с. 70]).

Теорема представляет собой дополнение к результату, полученному в [2], [3] (см. также [4]), о существовании ортогонального разложения

$$L^2(0, 1) = G_1 \oplus G_2,$$

где для $g \in G_1 \cup G_2$ $\|g\|_1 \geq \varkappa \|g\|_2$, $\varkappa > 0$ – абсолютная постоянная. Последний результат в свою очередь выводился в [2], [3] из построенных в [5] разложений

$$\begin{aligned} D_{2N} &= G_1^{(N)} \oplus G_2^{(N)}, \quad \dim G_1^N = \dim G_2^{(N)} = N, \\ \|g\|_1 &\geq \varkappa \|g\|_2, \quad g \in G_1^{(N)} \cup G_2^{(N)}, \quad N = 1, 2, \dots, \quad \varkappa > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, что в теореме $K \geq 1$. Можно проверить, что на самом деле неравенство строгое: $K > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $H_0 = \text{span}\{\chi_0^0, \chi_0^1\}$ и при $k = 1, 2, \dots$

$$H_k = \text{span}\{\chi_k^i, 1 \leq i \leq 2^k\}.$$

Ясно, что при $k = 1, 2, \dots$

$$H_0 \oplus \dots \oplus H_k = D_{2^{k+1}}.$$

Из (1) сразу вытекает, что существует ортогональное разложение

$$H_k = E_1^{(k)} \oplus E_2^{(k)}$$

такое, что

$$\varkappa \|f\|_2 \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_2, \quad f \in E_1^{(k)} \cup E_2^{(k)}.$$

Пусть

$$E_1 = E_1^{(0)} \oplus E_1^{(1)} \oplus \dots,$$

$$E_2 = E_2^{(0)} \oplus E_2^{(1)} \oplus \dots$$

При доказательстве существования разложения (1) в [3] (см. также [4]) было фактически проверено, что

$$\alpha' \|f\|_2 \leq \|f\|_1 \leq \|f\|_2, \quad f \in E_1 \cup E_2, \quad \alpha' > 0. \quad (2)$$

Для полноты изложения приведем это рассуждение. Пусть задана функция f из $L^2(0, 1)$ вида

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k, \quad f_k \in E_k^i, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots$$

Проверим сначала, что $\|f\|_2 \leq C\|f\|_{3/2}$. Действительно, согласно классической теореме Пэли–Марцинкевича (см. [1; теорема 3.9]), примененной в случае $p = 3/2$,

$$\|f\|_{3/2} \geq c \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_{3/2}, \quad c > 0,$$

откуда, используя известное неравенство

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \right)^{1/2} \right\|_{3/2} \geq \left(\sum \|f_k\|_{3/2}^2 \right)^{1/2},$$

справедливое для любого набора функций из $L^{3/2}(0, 1)$, и оценку (1), находим

$$\|f\|_{3/2} \geq c \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_1^2 \right)^{1/2} \geq c\alpha \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_2^2 \right)^{1/2} = c\alpha \|f\|_2.$$

Из последнего соотношения и неравенства $\|f\|_1^{1/3} \|f\|_2^{2/3} \geq \|f\|_{3/2}$ следует оценка (2).

В силу двойственности поперечников Колмогорова и Гельфанда (см., например, [6; с. 147]) из (2) следует, что для любой функции $F \in D_{2k+1}$, $k = 0, 1, \dots$, найдутся функции $g_j \in E_j^{(0)} \oplus \dots \oplus E_j^{(k)}$, $j = 1, 2$, с

$$\|F - g_1\|_{\infty} \leq \tilde{K} \|F\|_2, \quad \|F - g_2\|_{\infty} \leq \tilde{K} \|F\|_2 \quad (3)$$

($\tilde{K}$ – абсолютная постоянная).

Проверим, что пространства E_1, E_2 удовлетворяют требованиям теоремы. Для произвольной функции $f \in L^2(0, 1)$, $\|f\|_2 \leq 1$, рассмотрим ее ряд Фурье–Хаара

$$f = a_0^0 \chi_0^0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^k} a_k^i \chi_k^i. \quad (4)$$

Для возрастающей последовательности натуральных чисел k_{ν} , $\nu = 1, 2, \dots$, рассмотрим также сгруппированный ряд (4):

$$f = \sum_{\nu=1}^{\infty} w_{\nu},$$

где

$$w_1 = a_0^0 + \sum_{k=0}^{k_1} \sum_{i=1}^{2^k} a_k^i \chi_k^i,$$

$$w_{\nu} = \sum_{k=k_{\nu-1}+1}^{k_{\nu}} \sum_{i=1}^{2^k} a_k^i \chi_k^i, \quad \nu > 1.$$

Последовательность $\{k_\nu\}$ выберем растущей так быстро, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \|w_\nu\|_2 < 2. \quad (5)$$

Так как $w_\nu \in D_{2k_\nu+1}$, то в силу (3) найдутся

$$g_\nu^{(j)} \in E_j^{(0)} \oplus E_j^{(1)} \oplus \dots \oplus E_j^{(k_\nu)}, \quad j = 1, 2,$$

с

$$\|w_\nu - g_\nu^{(j)}\|_\infty \leq \tilde{K} \|w_\nu\|_2, \quad j = 1, 2, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Тогда

$$\|g_\nu^{(j)}\|_2 \leq \|w_\nu\|_2 + \|w_\nu - g_\nu^{(j)}\|_2 \leq (\tilde{K} + 1) \|w_\nu\|_2, \quad j = 1, 2.$$

Поэтому при $j = 1, 2$ ряды

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu^{(j)}$$

сходятся абсолютно в $L^2(0, 1)$ к функциям $g_j \in E_j$. При этом (см. (6)) при $j = 1, 2$

$$\|f - g_j\|_\infty \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \|w_\nu - g_\nu^{(j)}\|_\infty \leq \tilde{K} \sum_{\nu=1}^{\infty} \|w_\nu\|_2 < 2\tilde{K} \equiv K,$$

что и требовалось доказать.

Построенные в теореме подпространства E_1, E_2 можно рассматривать как пару пространств “состояний” с возможностью достаточно хорошего равномерного приближения каждого “состояния” из E_1 каким-то “состоянием” из “зазеркального” пространства E_2 . В этой связи интересно выяснить, имеется ли физический смысл у наилучшей возможной постоянной K в теореме.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
 [2] J.-L. Krivine, *Seminaire d'Analyse Fonctionnelle* 1983–1984, Publ. Math. Univ. Paris VII, **20**, Univ. Paris VII, Paris, 1984, 21–26. [3] Б. С. Кашин, *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, **38**:12 (1985), 1613–1615. [4] G. Pisier, *Factorization of Linear Operators and Geometry of Banach Spaces*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **60**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986. [5] Б. С. Кашин, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:2 (1977), 334–351. [6] В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближений*, МГУ, М., 1976.

Б. С. Кашин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kashin@mi.ras.ru

Поступило

26.12.2013