Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Попов, Оценки наименьшего положительного корня суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 747–761

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10435>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 08:36:15

Оценки наименьшего положительного корня суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами

А. Ю. Попов

В статье решена экстремальная задача нахождения точной нижней грани положительных корней суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами на специальных подклассах таких рядов.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm10435

1. Введение. Предварительные результаты. В статье даются оценки наименьшего положительного корня суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_1 > 0, \quad b_{k+1} \leq b_k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0. \quad (1.1)$$

Ряды (1.1) сходятся при всех $x \in \mathbb{R}$, сумма каждого такого ряда непрерывна на $(0, 2\pi)$, обращается в нуль в точке π и положительна в некоторой правой полуокрестности нуля. Последнее сразу видно из теоремы Хартмана–Винтнера [1], которая утверждает, что для суммы ряда (1.1) справедливо предельное соотношение

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k. \quad (1.2)$$

(Предел равен $+\infty$, если $\sum_{k=1}^{\infty} k b_k = +\infty$). В силу отмеченных выше свойств суммы ряда (1.1) она имеет наименьший положительный корень, который обозначим $\xi(\{b_k\})$. Возникает задача получения неувлучшаемой в том или ином смысле оценки снизу $\xi(\{b_k\})$. Рассуждения, применявшиеся в [1], [2] для доказательства (1.2), не дают возможности конструктивного решения этой задачи. В [3; с. 9–10] дана конструктивная оценка снизу частичных сумм ряда (1.1):

$$\sum_{k=1}^n b_k \sin kx \geq \frac{x^2}{2 \sin x} \left(-\frac{1}{2} b_2 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^m k^2 (b_{k-1} - b_{k+1}) \right), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2m}, \quad n > m, \quad (1.3)$$

но никаких явных оценок снизу наименьшего положительного корня суммы ряда (1.1) из нее не выведено. Отмечено лишь, что если взять m достаточно большим, то выражение в правой части (1.3) будет положительным.

В настоящей работе выделены подклассы рядов (1.1) (их объединение охватывает все такие ряды) и на этих подклассах найдена точная нижняя грань положительных корней сумм рядов.

Насколько известно автору, такие исследования почти не проводились. Отмечались лишь случаи, в которых справедливо равенство

$$\xi(\{b_k\}) = \pi, \quad (1.4)$$

т.е. величина $\xi(\{b_k\})$ принимает максимально возможное значение. Равенство (1.4) очевидно для любой выпуклой последовательности $\{b_k\}$. Действительно, если выполнено $b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2} \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, то сумма ряда (1.1) допускает представление

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \left(\frac{1}{2} \operatorname{cosec} \left(\frac{x}{2} \right) \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2}) ((k+1) \sin x - \sin(k+1)x). \quad (1.5)$$

А так как $(k+1) \sin x - \sin(k+1)x > 0$ при любых $x \in (0, \pi)$ и $k \in \mathbb{N}$, все вторые разности $b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2}$ неотрицательны и хотя бы одна из них положительна, то сразу же получаем положительность суммы (1.5) на интервале $0 < x < \pi$.

Вьеторис [4] доказал (1.4) при условии выполнения в дополнение к (1.1) бесконечной системы неравенств

$$b_{2k} \leq \left(1 - \frac{1}{2k} \right) b_{2k-1}, \quad k \in \mathbb{N},$$

а А. С. Белов [5] получил более сильный результат, доказав (1.4) при условии

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k b_k \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Добавим к этому, что в [4], [5] была доказана положительность на $(0, \pi)$ не только суммы ряда (1.1), но и всех его частичных сумм.

Изложение результатов статьи начнем с наиболее просто формулируемого утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, и выполняется неравенство $b_n \leq (3/4)b_1$, то сумма ряда (1.1) положительна на интервале $0 < x < 2\pi/(n+1)$.

Тем самым явно указан интервал положительности суммы ряда (1.1). Покажем, что этот результат не допускает существенного усиления: положительность суммы ряда (1.1) на интервале $0 < x < 2\pi/(n+0.5)$ при условии $b_n \leq (3/4)b_1$ может не иметь места. Обозначим

$$\tilde{D}_p(x) = \sum_{k=1}^p \sin kx = \frac{\cos(x/2) - \cos(p+1/2)x}{2 \sin(x/2)}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Здесь и далее примерами рядов (1.1), имеющих “небольшой” положительный корень, будут тригонометрические полиномы

$$\mathcal{P}_{m,N}(x; c) = \sum_{k=1}^m \sin kx + c \sum_{k=m+1}^N \sin kx = (1-c)\tilde{D}_m(x) + c\tilde{D}_N(x), \quad N > m. \quad (1.7)$$

Нетрудно убедиться в том, что при любом фиксированном значении параметра $c \in [0, 1]$ полином $\mathcal{P}_{m,N}(x; c) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ является рядом (1.1) и для его коэффициентов выполняется неравенство $b_n \leq cb_m$, каков бы ни был номер $n > m$.

Зафиксируем натуральное число n и рассмотрим тригонометрический полином $\mathcal{P}_{n-1,n}(x; 3/4)$. Его коэффициенты удовлетворяют условию предложения 1, и в точке $x = 2\pi/(n + 0.5)$ он отрицателен. Действительно, согласно (1.6), (1.7) имеем

$$\mathcal{P}_{n-1,n}\left(x; \frac{3}{4}\right) = \tilde{D}_{n-1}(x) + \frac{3}{4} \sin nx$$

и, следовательно,

$$T_n(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \mathcal{P}_{n-1,n}\left(x; \frac{3}{4}\right) = \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)x - \frac{3}{4} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x.$$

Отсюда находим

$$T_n\left(\frac{2\pi}{n+0.5}\right) = \cos \alpha_n - \frac{1}{4} \cos 2\alpha_n - \frac{3}{4}, \quad \alpha_n = \frac{\pi}{n+0.5}.$$

А так как функция $\cos \alpha - (1/4) \cos 2\alpha - 3/4$ отрицательна на интервале $0 < \alpha < 2\pi$ и знаки $T_n(x)$ и $\mathcal{P}_{n-1,n}(x; 3/4)$ на интервале $0 < x < 2\pi$ совпадают, то приходим к неравенству

$$\mathcal{P}_{n-1,n}\left(\frac{2\pi}{n+0.5}, \frac{3}{4}\right) < 0,$$

которое и требовалось доказать.

Заметим, что при больших n нельзя значительно увеличить данную в предложении 1 границу положительности суммы ряда (1.1), если неравенство $b_n \leq (3/4)b_1$ заменить на $b_n \leq cb_1$, взяв какое-либо число $c \in [0, 3/4)$. Это показывает пример тригонометрического полинома $\tilde{D}_{n-1}(x)$ (в нем коэффициент при $\sin nx$ равен 0), обращающегося в нуль в точке $x = 2\pi/n$. Но можно ли в условии предложения 1 увеличить множитель $3/4$, оставив таким же заключение? В случае $n = 2$ нельзя (см. следствие 1 в п. 5), но при $n > 2$ это возможно.

Положим

$$c_n = \sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{n+1}\right) \operatorname{cosec}^2\left(\frac{3\pi}{2n+2}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2. \quad (1.8)$$

Имеем

$$c_2 = \frac{3}{4}, \quad c_3 = \sqrt{8} - 2, \quad c_4 = \frac{5 + \sqrt{5}}{4 + 2\sqrt{5}}, \quad c_5 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Несложно проверить, что последовательность c_n возрастает и $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 8/9$. Следующее предложение уточняет предложение 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ и выполняется неравенство $b_n \leq c_n b_1$, то сумма ряда (1.1) положительна на интервале $0 < x < 2\pi/(n+1)$.

Заслуживает внимания то, что если рассмотреть класс последовательностей $\{b_k\}$, удовлетворяющих условию (1.1) и неравенству $b_n \leq (8/9)b_1$ при каком-либо фиксированном n (т.е. число c_n в предложении 2 заменить пределом $\{c_n\}$), то точная нижняя

грань положительных корней сумм рядов (1.1), взятая по такому классу последовательностей коэффициентов, окажется равной нулю. К этому выводу можно прийти, заметив, что тригонометрический полином

$$\mathcal{P}_{1,N}\left(x; \frac{8}{9}\right) = \sin x + \frac{8}{9} \sum_{k=2}^N \sin kx = \frac{\cos(x/2) - (1/9)\cos(3x/2) - (8/9)\cos(N+1/2)x}{2\sin(x/2)}$$

принимает отрицательное значение в точке $x_N = 2\pi/(N+0.5)$, каково бы ни было натуральное число $N \geq 2$. Отрицательность $\mathcal{P}_{1,N}(x_N; 8/9)$ следует из равенства $\cos((N+1/2)x_N) = 1$ и отрицательности функции $\cos(x/2) - (1/9)\cos(3x/2) - 8/9$ на интервале $0 < x < 2\pi$.

В заключение введения скажем несколько слов о структуре статьи. В п. 2 ставится экстремальная задача об отыскании точной нижней грани положительных корней сумм рядов (1.1) на подклассах таких рядов. Формулируется теорема о решении этой задачи, которая является основным результатом работы. Перед теоремой 1 приведены леммы 1, 2, необходимые для понимания теоремы. В п. 3 доказываются леммы 1, 2 и еще три леммы об оценках снизу отрезка ряда с монотонными коэффициентами и остатка ряда. П. 4 посвящен доказательству основного результата. В п. 5 из теоремы 1 получены различные следствия. В частности, доказано предложение 2 (предложение 1 автоматически из него следует).

2. Постановка экстремальной задачи и основные результаты. Поставим экстремальную задачу. Множество всех последовательностей $\{b_k\}$, удовлетворяющих условию (1.1), обозначим $\mathfrak{M}$. Рассмотрим его подмножества

$$\mathfrak{M}_{m,n}(c) = \{\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{M} \mid b_n \leq cb_m\}. \quad (2.1)$$

В (2.1) предполагается, что $c \in [0, 1)$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из (2.1) и (1.1) сразу же видно, что при любом фиксированном значении $m \in \mathbb{N}$ множества $\mathfrak{M}_{m,n}(c)$ возрастают в смысле вложения как по n , так и по c . При любой фиксированной паре значений $m \in \mathbb{N}$ и $c \in (0, 1)$ верно равенство $\mathfrak{M} = \bigcup_{n=m+1}^{\infty} \mathfrak{M}_{m,n}(c)$.

ЗАДАЧА. При любых допустимых значениях параметров m, n, c требуется найти величину

$$X_{m,n}(c) = \inf\{\xi(\{b_k\}) \mid \{b_k\} \in \mathfrak{M}_{m,n}(c)\}. \quad (2.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из (2.2) и замечания 1 следует, что при любом фиксированном значении $m \in \mathbb{N}$ функция $X_{m,n}(c)$ является невозрастающей, как по $n \geq m+1$, так и по $c \in [0, 1)$. В дальнейшем выяснится, что эта функция имеет промежутки постоянства по переменным $n \in \mathbb{N}$ и $c \in [0, 1)$.

В работе найдены все величины (2.2). Для формулировки результата понадобятся функции

$$\Phi_p(x) = \frac{\cos(x/2) - \cos(p-1/2)x}{1 - \cos(p-1/2)x}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad p \geq 2, \quad (2.3)$$

и леммы о поведении этих функций и обратных к ним.

ЛЕММА 1. При любом $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$, функция $\Phi_p(x)$ непрерывна, убывает и вогнута на отрезке $0 \leq x \leq 2\pi/p$. Справедливы равенства

$$\Phi_p(0) = 1 - \frac{1}{(2p-1)^2}, \quad \Phi_p\left(\frac{2\pi}{p}\right) = 0. \quad (2.4)$$

Функция Φ_p имеет обратную (обозначим ее ϕ_p), которая определена на отрезке $[0, 1 - (2p-1)^{-2}]$, непрерывна, убывает, вогнута на этом отрезке и отображает его на $[0, 2\pi/p]$, ($\phi_p(0) = 2\pi/p$, $\phi_p(1 - (2p-1)^{-2}) = 0$).

В дальнейшем будут важны числа

$$c_{m,n} = \frac{\cos(\pi/(n+m)) - \cos(\pi(2m+1)/(n+m))}{1 - \cos(\pi(2m+1)/(n+m))}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m < n, \quad (2.5)$$

и функции

$$\Psi_{m,n}(y) = \begin{cases} \min(\phi_{m+1}(y), \phi_n(y)), & 0 \leq y < 1 - (2m+1)^{-2}, \\ 0, & 1 - (2m+1)^{-2} \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (2.6)$$

ЛЕММА 2. Последовательность $c_{m,n}$ возрастает по $n \in [m+1, +\infty)$ при любом фиксированном m и возрастает по $m \in [1, n-1]$ при любом фиксированном n . Верны предельное соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{m,n} = 1 - (2m+1)^{-2}$ и двойное неравенство

$$c_{m,m+1} = \cos^2\left(\frac{\pi}{4m+2}\right) \leq c_{m,n} < 1 - \frac{1}{(2m+1)^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m < n. \quad (2.7)$$

При любых фиксированных значениях $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, функция $\Psi_{m,n}(y)$ непрерывна на $[0, 1]$ и убывает на отрезке $0 \leq y \leq 1 - (2m+1)^{-2}$. Справедливы следующие равенства:

$$\Psi_{m,n}(y) = \begin{cases} \phi_n(y), & 0 \leq y < c_{m,n}, \\ \frac{2\pi}{m+n}, & y = c_{m,n}, \\ \phi_{m+1}(y), & c_{m,n} < y \leq 1 - (2m+1)^{-2}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Сформулируем основной результат статьи.

ТЕОРЕМА 1. При любых $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $c \in [0, 1)$ справедливо равенство

$$X_{m,n}(c) = \Psi_{m,n}(c). \quad (2.9)$$

3. Доказательства лемм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Аналитичность функции $\Phi_p(z)$ в полосе $|\operatorname{Re} z| < 2\pi/(p+0.5)$ видна сразу. Это влечет за собой бесконечную гладкость $\Phi_p(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq 2\pi/p$. Докажем отрицательность $\Phi'_p(x)$ и $\Phi''_p(x)$ на интервале $0 < x < 2\pi/p$. Поскольку

$$\Phi_p(x) \equiv 1 - F_N^2(t), \quad \text{где} \quad F_N(t) = \frac{\sin t}{\sin Nt}, \quad t = \frac{x}{4}, \quad N = 2p-1, \quad (3.1)$$

достаточно доказать неравенства

$$F_N^{(k)}(t) > 0, \quad k = 0, 1, 2, \quad 0 < t < \frac{\pi}{N+1}. \quad (3.2)$$

Положительность $F_N(t)$ очевидна. Имеем далее

$$U_N(t) \equiv \frac{F'_N(t)}{F_N(t)} = \operatorname{ctg} t - N \operatorname{ctg} Nt > 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < \frac{\pi}{N}, \quad (3.3)$$

$$U'_N(t) \equiv \frac{F''_N(t)F_N(t) - (F'_N(t))^2}{F_N^2(t)} = \frac{N^2}{\sin^2 Nt} - \frac{1}{\sin^2 t} = \frac{N^2}{\sin^2 t} \left(F_N^2(t) - \frac{1}{N^2} \right). \quad (3.4)$$

Из (3.3) следует положительность $F'_N(t)$ на интервале $0 < t < \pi/N$, а значит и положительность разности $F_N(t) - F_N(0) = F_N(t) - 1/N$. Отсюда и из (3.4) заключаем, что $F''_N(t) > 0$ при $0 < t < \pi/N$. Неравенства (3.2) доказаны, а вместе с ними доказана и отрицательность $\Phi'_p(x)$ и $\Phi''_p(x)$ на интервале $0 < x < 2\pi/p$, а также гладкость и отрицательность производной обратной функции $\phi_p(y)$ на интервале $0 < y < 1 - 2(2p - 1)^{-2}$. Формула для второй производной

$$\phi''_p(y) = -\Phi''_p(x)(\Phi'_p(x))^{-3}, \quad x = \phi_p(y),$$

вместе с отрицательностью $\Phi'_p(x)$ дает вогнутость $\phi_p(y)$. Справедливость равенств (2.4) проверяется элементарно. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Возрастание по n чисел $c_{m,n} = \Phi_{m+1}(2\pi/(n+m))$ при любом фиксированном m следует из убывания функции Φ_{m+1} и последовательности $2\pi/(n+m)$. Возрастание чисел $c_{n,m} = \Phi_n(2\pi/(n+m))$ по $m \in [1, n-1]$ следует также из убывания Φ_{m+1} и $2\pi/(n+m)$. Справедливость предельного соотношения $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{m,n} = 1 - (2m+1)^{-2}$ элементарно проверяется, а неравенство (2.7) следует из монотонности последовательности $c_{m,n}$ и этого соотношения.

Выше уже отмечались равенства $c_{m,n} = \Phi_{m+1}(2\pi/(n+m)) = \Phi_n(2\pi/(n+m))$, из которых по определению обратной функции находим

$$\phi_{m+1}(c_{m,n}) = \phi_n(c_{m,n}) = \frac{2\pi}{m+n}. \quad (3.5)$$

Поэтому для доказательства (2.8) остается проверить справедливость неравенств

$$\begin{aligned} \phi_n(y) &< \phi_{m+1}(y), & 0 \leq y < c_{m,n}, \\ \phi_{m+1}(y) &< \phi_n(y), & c_{m,n} < y \leq 1 - (2m+1)^{-2}, \quad 1 \leq m < n-1. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Верны неравенства

$$\begin{aligned} \sin(2m+1)t &< \sin(2n-1)t, & 0 < t < \frac{\pi}{2(n+m)}, \\ \sin(2n-1)t &< \sin(2m+1)t, & \frac{\pi}{2(n+m)} < t < \frac{\pi}{2n-1}. \end{aligned}$$

Эти неравенства с учетом (3.1) дают

$$\begin{aligned} F_{2n-1}(t) &< F_{2m+1}(t), & 0 < t < \frac{\pi}{2(n+m)}, \\ F_{2m+1}(t) &< F_{2n-1}(t), & \frac{\pi}{2(n+m)} < t < \frac{\pi}{2n-1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.1) находим

$$\begin{aligned}\Phi_{m+1}(x) &< \Phi_n(x), & 0 < x < \frac{2\pi}{n+m}, \\ \Phi_n(x) &< \Phi_{m+1}(x), & \frac{2\pi}{n+m} < x < \frac{2\pi}{n-0.5}.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Из (3.7), убывания функции Φ_p , определения обратной функции получаем (3.6). Лемма 2 полностью доказана.

В дальнейшем требуются оценки снизу различных отрезков ряда (1.1) и его остатка.

ЛЕММА 3. *Для остатка ряда (1.1) верна оценка снизу*

$$\sum_{k=n}^{\infty} b_k \sin kx \geq b_n \frac{\cos(n-1/2)x - 1}{2 \sin(x/2)}, \quad 0 < x < 2\pi. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив преобразование Абеля и воспользовавшись неотрицательностью всех разностей $b_k - b_{k-1}$, находим (см. выше (1.6))

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty} b_k \sin kx &= \sum_{k=n}^{\infty} b_k (\tilde{D}_k(x) - \tilde{D}_{k-1}(x)) = -b_n \tilde{D}_{n-1}(x) + \sum_{k=n}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \tilde{D}_k(x) \\ &\geq -b_n \tilde{D}_{n-1}(x) + \left(\inf_{k \geq n} \tilde{D}_k(x) \right) \sum_{k=n}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_n \left(\inf_{k \geq n} \tilde{D}_k(x) - \tilde{D}_{n-1}(x) \right).\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.6) получаем неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} b_k \sin kx \geq b_n \inf_{k \geq n} \frac{\cos(n-1/2)x - \cos(k+1/2)x}{2 \sin(x/2)} \geq b_n \frac{\cos(n-1/2)x - 1}{2 \sin(x/2)}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Если $m, n \in \mathbb{N}$, $m+1 < n$, то для отрезка ряда (1.1) $\sum_{k=m+1}^{n-1} b_k \sin kx$ верны оценки снизу*

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} b_k \sin kx \geq b_{n-1} \sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx, \quad 0 < x < \frac{2\pi}{n+m}, \quad (3.9)$$

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} b_k \sin kx \geq b_{m+1} \sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx, \quad \frac{2\pi}{n+m} \leq x \leq \frac{2\pi}{n-1}. \quad (3.10)$$

Для начального отрезка ряда (1.1) верна оценка снизу

$$\sum_{k=1}^m b_k \sin kx \geq b_m \sum_{k=1}^m \sin kx, \quad 0 < x < \frac{2\pi}{m+1}. \quad (3.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $x \in (0, 2\pi/(n-1))$. Для набора чисел

$$\{\sin kx\}_{k=m+1}^{n-1} \quad (3.12)$$

реализуется одна из трех возможностей:

- 1) $\sin(n-1)x > 0$; тогда в силу ограничения $0 < x < 2\pi/(n-1)$ имеем $0 < x < \pi/(n-1)$ и все числа набора (3.12) положительны;
- 2) $\sin(n-1)x \leq 0$ и все числа набора (3.12) ≤ 0 ;
- 3) $\sin(n-1)x \leq 0$, $\sin(m+1)x > 0$; тогда, учитывая ограничение $0 < x < 2\pi/(n-1)$ и поведение функции $\operatorname{sgn}(\sin t)$ на интервале $0 < t < 2\pi$, получаем существование такого номера $\nu \in [m+1, n-1]$, что числа $\{\sin kx\}_{k=m+1}^{\nu}$ положительны, а числа $\{\sin kx\}_{k=\nu+1}^{n-1}$ все ≤ 0 (ясно, что нулю может оказаться равным только первое из них).

Рассмотрим случай 1). Так как $\sin kx > 0$, $0 \leq b_{n-1} \leq b_k$ при $m+1 \leq k \leq n-1$, то $b_{n-1} \sin kx \leq b_k \sin kx$, $m+1 \leq k \leq n-1$. Сложив эти неравенства, получим (3.9). Заметим, что в этом случае ограничение $x < 2\pi/(n+m)$ заведомо выполняется, так как $\pi/(n-1) \leq 2\pi/(n+m)$ при $m < n-1$, $m, n \in \mathbb{N}$.

В случае 2) выполняется двойное неравенство $\pi/(m+1) \leq x \leq 2\pi/(n-1)$, а значит и стоящее в (3.10) ограничение на x , поскольку $2\pi/(n+m) \leq \pi/(m+1)$ при $m \leq n-2$. В этом случае имеем $\sin kx \leq 0$, $0 \leq b_k \leq b_{m+1}$, а следовательно, $b_{m+1} \sin kx \leq b_k \sin kx$, $m+1 \leq k \leq n-1$. Сложив эти неравенства, получим (3.10).

В случае 3) распределение знаков чисел (3.12) дает неравенства

$$\begin{aligned} b_{\nu} \sin kx &\leq b_k \sin kx, & m+1 \leq k \leq \nu, \\ b_{\nu} \sin kx &\leq b_k \sin kx, & \nu+1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

Сложив их, получим

$$\sum_{k=m+1}^{n-1} b_k \sin kx \geq b_{\nu} \sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx. \quad (3.13)$$

Согласно (1.6) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx &= \frac{\cos(m+1/2)x - \cos(n-1/2)x}{2 \sin x/2} \\ &= \frac{\sin((n+m)/2)x \sin((n-m-1)/2)x}{\sin x/2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Из (3.14) видно, что сумма синусов в правой части (3.13) положительна при $0 < x < 2\pi/(n+m)$. Следовательно, при этих значениях x множитель b_{ν} в (3.13) можно заменить на $b_{n-1} \leq b_{\nu}$ и неравенство останется верным. Тем самым, мы получим неравенство (3.9). Если же $2\pi/(n+m) \leq x \leq 2\pi/(n-1)$, то ввиду (3.14) $\sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx \leq 0$. Поэтому в неравенстве (3.13) множитель b_{ν} правомерно заменить на $b_{m+1} \geq b_{\nu}$. Тем самым, мы получим неравенство (3.10). Оценка снизу отрезка ряда $\sum_{k=m+1}^{n-1} b_k \sin kx$ доказана.

Выведем оценку (3.11). При $0 < x \leq \pi/m$ она почти очевидна:

$$\sin kx \geq 0, \quad b_k \geq b_m, \quad 1 \leq k \leq m \quad \implies \quad b_k \sin kx \geq b_m \sin kx, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Сложив последние неравенства, получим (3.11). При $\pi/m < x < 2\pi/(m+1)$ положим $\nu = [\pi/x]$. Тогда

$$\sin kx \geq 0, \quad 1 \leq k \leq \nu, \quad \sin kx < 0, \quad \nu+1 \leq k \leq m.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\nu} b_k \sin kx \geq b_{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} \sin kx, \quad \sum_{k=\nu+1}^m b_k \sin kx \geq b_{\nu+1} \sum_{k=\nu+1}^m \sin kx \geq b_{\nu} \sum_{k=\nu+1}^m \sin kx.$$

Отсюда находим

$$\sum_{k=1}^m b_k \sin kx \geq b_{\nu} \sum_{k=1}^m \sin kx = b_{\nu} \tilde{D}_m(x).$$

А так как $\tilde{D}_m(x) > 0$ при $0 < x < 2\pi/(m+1)$, в правой части последнего неравенства множитель b_{ν} можно заменить на $b_m \in [0, b_{\nu}]$ и неравенство останется верным. Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 5. Если коэффициент b_s ряда (1.1) равен нулю, то сумма этого ряда положительна на интервале $0 < x < 2\pi/s$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если какой-либо коэффициент ряда (1.1) равен нулю, то нулю также равны все коэффициенты с большими номерами – это сразу следует из монотонного стремления к нулю последовательности $\{b_k\}$. Обозначим $m = \max\{k \mid b_k \neq 0\}$. Тогда $1 \leq m < s$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx = \sum_{k=1}^m b_k \sin kx \geq b_m \sum_{k=1}^m \sin kx = b_m \frac{\sin((m+1)x/2) \sin(mx/2)}{\sin(x/2)}. \quad (3.15)$$

(Мы применили неравенство (3.11) и тождество (1.6).) Из (3.15) заключаем, что сумма ряда положительна на интервале $(0, 2\pi/(m+1))$, который в силу неравенства $m < s$ покрывает интервал $(0, 2\pi/s)$ (в случае $m = s-1$ совпадает с ним). Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы начнем с обоснования равенства нулю функций $X_{m,n}(c)$ на полуинтервале $1 - (2m+1)^{-2} \leq c < 1$, каковы бы ни были $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq m+1$. Ввиду невозрастания $X_{m,n}(c)$ по переменной c достаточно доказать равенства

$$X_{m,n}(1 - (2m+1)^{-2}) = 0 \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad n \geq m+1. \quad (4.1)$$

Зафиксируем произвольные натуральные числа $m, n, m < n$, обозначим $\lambda_m = 1 - (2m+1)^{-2}$ и рассмотрим последовательность тригонометрических полиномов $\mathcal{P}_{m,N}(x; \lambda_m)$ (см. выше (1.7)). Последовательность коэффициентов каждого такого полинома лежит в классе $\mathfrak{M}_{m,n}(\lambda_m)$, $n > m$. Положим $x_N = 2\pi/(N+0.5)$ и докажем неравенство

$$\mathcal{P}_{m,N}(x_N; \lambda_m) < 0, \quad N > m. \quad (4.2)$$

Согласно (1.6) имеем

$$\begin{aligned} T_N(x) &\equiv 2\mathcal{P}_{m,N}(x; \lambda_m) \sin \frac{x}{2} \\ &= \cos \frac{x}{2} - \cos \left(m + \frac{1}{2}\right)x + \lambda_m \left(\cos \left(m + \frac{1}{2}\right)x - \cos \left(N + \frac{1}{2}\right)x \right). \end{aligned}$$

Очевидны равенства

$$\operatorname{sgn} T_n(x) = \operatorname{sgn} \mathcal{P}_{m,N}(x; \lambda_m), \quad 0 < x < 2\pi, \quad \cos\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x_N\right) = 1.$$

Следовательно,

$$\operatorname{sgn} \mathcal{P}_{m,N}(x_N; \lambda_m) = \operatorname{sgn} F_m(x_N), \quad \text{где} \quad F_m(x) = \cos \frac{x}{2} + (\lambda_m - 1) \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)x - \lambda_m,$$

и достаточно доказать отрицательность $F_m(x_N)$ при любом $m > N$. Поскольку $F_m(0) = 0$, то требуемое следует из убывания функции $F_m(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq \pi/(m + 0.5)$.

Вычислим производную функции F_m и обозначим $t = x/2$:

$$F'_m(x) = -\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + (1 - \lambda_m) \left(m + \frac{1}{2}\right) \sin\left(m + \frac{1}{2}\right)x = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(2m+1)t}{2m+1} - \sin t\right), \quad (4.3)$$

Ввиду неравенства $\sin Ay < A \sin y$, выполняющегося при любых $A > 1$ и $y \in (0, \pi/A]$, из (4.3) получаем

$$F'_m(x) < 0, \quad 0 < x < \frac{2\pi}{2m+1}.$$

Убывание функции $F_m(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq \pi/(m + 0.5)$ доказано. Из (4.2) и положительности $\mathcal{P}_{m,N}(x; c)$ при $0 < x \leq \pi/N$ видно, что каждый из тригонометрических полиномов $\mathcal{P}_{m,N}(x, \lambda_m)$ имеет корень на интервале $\pi/N < x < 2\pi/(N + 0.5)$. А так как коэффициенты каждого из рядов $\mathcal{P}_{m,N}(x, \lambda_m)$ лежат в классе $\mathfrak{M}_{m,n}(\lambda_m)$, получаем, что точная нижняя грань положительных корней сумм рядов с коэффициентами из этого класса равна нулю. Это и означает справедливость равенств (4.1).

Осталось доказать равенство (2.9) при $0 \leq c < 1 - (2m+1)^{-2}$. Сначала докажем положительность на интервале $0 < x < \Psi_{m,n}(c)$ суммы ряда (1.1) при условии $b_n \leq cb_m$. Всюду далее считаем, что $b_m > 0$, поскольку в случае $b_m = 0$ лемма 5 дает положительность суммы ряда на интервале $0 < x < 2\pi/m$, а значит и на интервале $0 < x < \Psi_{m,n}(c)$, так как $\Psi_{m,n}(c) \leq \phi_n(c) \leq \phi_n(0) = 2\pi/n \leq 2\pi/m$. Коль скоро $b_m > 0$, то ограничение $b_n \leq cb_m$ переписывается в виде

$$\frac{b_n}{b_m} \leq c. \quad (4.4)$$

Рассмотрим случай $m = n - 1$ и докажем положительность суммы ряда (1.1) на интервале $0 < x < \phi_n(b_n/b_{n-1})$. Этого будет достаточно, поскольку $\Psi_{n-1,n}(c) = \phi_n(c)$, а ввиду убывания функции ϕ_n и ограничения (4.4) имеем $\phi_n(c) \leq \phi_n(b_n/b_{n-1})$. Тем самым, мы получим положительность суммы ряда (1.1) на интервале $0 < x < \Psi_{n-1,n}(c)$, что и требуется.

Начало ряда оценим с помощью неравенства (3.11), а остаток – по лемме 3. Получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \geq b_{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \sin kx + b_n \frac{\cos(n-1/2)x - 1}{2 \sin(x/2)}, \quad 0 < x < \frac{2\pi}{n}. \quad (4.5)$$

Умножим обе части (4.5) на $2 \sin(x/2)$ и воспользуемся тождеством (1.6). Придем к неравенству

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \geq b_{n-1} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x \right) + b_n \left(\cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x - 1 \right).$$

Отсюда заключаем, что положительность суммы ряда (1.1) при $0 < x < 2\pi/n$ следует из неравенства

$$b_{n-1} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x \right) > b_n \left(1 - \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x \right) \\ \iff \frac{\cos(x/2) - \cos(n-1/2)x}{1 - \cos(n-1/2)x} > \frac{b_n}{b_{n-1}}. \quad (4.6)$$

(Мы использовали положительность b_{n-1} и $1 - \cos(n-1/2)x$ при $0 < x < 2\pi/n$.) Последнее неравенство в (4.6) с учетом определения функций Φ и убывания обратных к ним записывается в следующей форме:

$$\Phi_n(x) > \frac{b_n}{b_{n-1}} \iff x < \phi_n \left(\frac{b_n}{b_{n-1}} \right) \quad \text{при} \quad 0 < x < \frac{2\pi}{n}.$$

Значит, из неравенства $0 < x < \phi_n(b_n/b_{n-1})$ следует положительность $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, а это и требовалось доказать. Отметим, что ограничение $x < 2\pi/n$ выполняется, поскольку имеем $\phi_n(b_n/b_{n-1}) \leq \phi_n(0) = 2\pi/n$. Ограничение же $c < 1 - (2m+1)^{-2} = 1 - (2n-1)^{-2}$ используется естественным образом: по лемме 1 функция $\phi_n(c)$ положительна на интервале $0 < c < 1 - (2n-1)^{-2}$.

Теперь рассмотрим значения $m \in [1, n-2]$, $n \geq 3$. Убедимся в том, что для доказательства положительности суммы ряда (1.1) на интервале $0 < x < \Psi_{m,n}(c)$ при условии (4.4) достаточно установить справедливость следующих импликаций:

$$\left(x < \phi_{m+1} \left(\frac{b_n}{b_m} \right), 0 < x < \frac{2\pi}{n+m} \right) \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx > 0, \quad (4.7)$$

$$\left(x < \phi_n \left(\frac{b_n}{b_m} \right), \frac{2\pi}{n+m} \leq x \leq \frac{2\pi}{n} \right) \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx > 0. \quad (4.8)$$

Рассмотрим первый случай: $c_{m,n} \leq c < 1 - (2m+1)^{-2}$. При этих значениях c верно равенство $\Psi_{m,n}(c) = \phi_{m+1}(c)$. В виду (3.5) и убывания функций ϕ (см. лемму 2) имеем $\phi_{m+1} \leq \phi_{m+1}(c_{m,n}) = 2\pi/(n+m)$. Возьмем произвольную точку

$$x \in (0, \Psi_{m,n}(c)) = (0, \phi_{m+1}(c)) \subset \left(0, \frac{2\pi}{n+m} \right).$$

Коль скоро $b_n/b_m \leq c$, то $\phi_{m+1}(b_n/b_m) \geq \phi_{m+1}(c)$. Таким образом, выполняются оба неравенства, стоящие в левой части (4.7). И если доказать импликацию (4.7), то мы получим положительность суммы ряда (1.1), что и требуется.

Рассмотрим второй случай: $0 < c < c_{m,n}$. В этом случае $\Psi_{m,n}(c) = \phi_n(c)$. Начнем со значений $x \in (0, 2\pi/(n+m))$. Поскольку $b_n/b_m \leq c$, то $\phi_{m+1}(b_n/b_m) \geq \phi_{m+1}(c) >$

$\phi_n(c) > 2\pi/(n+m)$. Следовательно, $x \in (0, \phi(b_n/b_m))$ и импликация (4.7) дает положительность суммы ряда (1.1). Рассмотрим значения $x \in [2\pi/(n+m), 2\pi/n]$. Возьмем произвольную точку полуинтервала $2\pi/(n+m) \leq x < \Psi_{m,n}(c) = \phi_n(c)$. Ясно, что $\phi_n(b_n/b_m) \geq \phi_n(c)$. Поэтому выполняются оба условия из правой части (4.8). Следовательно, согласно (4.8) сумма ряда (1.1) положительна.

Перейдем к доказательству (4.7), (4.8). Начальный отрезок $\sum_{k=1}^m b_k \sin kx$ ряда (1.1) и “среднюю часть” ряда $\sum_{k=m+1}^{n-1} b_k \sin kx$ оценим снизу по лемме 4, а остаток – по лемме 3. Получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \\ & \geq b_m \sum_{k=1}^m \sin kx + b_{n-1} \sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx + b_n \frac{\cos(n-1/2)x - 1}{2 \sin x/2}, \quad 0 < x < \frac{2\pi}{n+m}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \\ & \geq b_m \sum_{k=1}^m \sin kx + b_{m+1} \sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx + b_n \frac{\cos(n-1/2)x - 1}{2 \sin x/2}, \quad \frac{2\pi}{n+m} \leq x \leq \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Обратим внимание на знак суммы в (3.14). При $0 < x < 2\pi/(n+m)$ она положительна, а при $2\pi/(n+m) \leq x \leq 2\pi/n$ эта сумма ≤ 0 . Отсюда и из неотрицательности и невозрастания последовательности $\{b_k\}$ вытекают неравенства

$$\begin{aligned} b_{n-1} \sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx & \geq b_n \sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx, & 0 < x < \frac{2\pi}{n+m}. \\ b_{m+1} \sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx & \geq b_m \sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx, & \frac{2\pi}{n+m} \leq x \leq \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Их применение вместе с использованием тождества (3.14) позволяет упростить оценки (4.9) следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx & \geq b_m \sum_{k=1}^m \sin kx + b_n \sum_{k=m+1}^{n-1} \sin kx + b_n \frac{\cos(n-1/2)x - 1}{2 \sin x/2} \\ & = b_m \sum_{k=1}^m \sin kx + b_n \frac{\cos(m+1/2)x - 1}{2 \sin x/2}, \quad 0 < x < \frac{2\pi}{n+m}, \quad (4.10) \\ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx & \geq b_m \sum_{k=1}^{n-1} \sin kx + b_n \frac{\cos(n-1/2)x - 1}{2 \sin x/2}, \quad \frac{2\pi}{n+m} \leq x \leq \frac{2\pi}{n}. \end{aligned}$$

Умножим неравенства (4.10) на положительную на $(0, 2\pi)$ функцию $2 \sin x/2$ и воспользуемся тождеством (1.6). Получим

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx & \geq b_m \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) x \right) \\ & \quad + b_n \left(\cos \left(m + \frac{1}{2} \right) x - 1 \right), \quad 0 < x < \frac{2\pi}{n+m}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$2 \sin \frac{x}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \geq b_m \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x \right) + b_n \left(\cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x - 1 \right), \quad \frac{2\pi}{n+m} \leq x \leq \frac{2\pi}{n}. \quad (4.12)$$

Осталось доказать положительность правой части (4.11) при условии, что $x < \phi_{m+1}(b_n/b_m)$, и правой части (4.12) при условии, что $x < \phi_n(b_n/b_m)$. Другими словами, при этих условиях требуется вывести неравенства

$$b_m \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) x \right) > b_n \left(1 - \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) x \right), \quad (4.13)$$

$$0 < x < \frac{2\pi}{n+m}, \quad x < \phi_{m+1} \left(\frac{b_n}{b_m} \right),$$

$$b_m \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) x \right) > b_n \left(1 - \cos \left(m + \frac{1}{2} \right) x \right), \quad (4.14)$$

$$\frac{2\pi}{n+m} \leq x \leq \frac{2\pi}{n}, \quad x < \phi_n \left(\frac{b_n}{b_m} \right).$$

Разделим обе части (4.13) на $b_m(1 - \cos(m + 1/2)x)$, а обе части (4.14) разделим на $b_m(1 - \cos(n - 1/2)x)$. (Неотрицательность этих делителей очевидна, а необращение их в нуль следует из ограничений на значения переменной x и того, что случай $b_m = 0$ был рассмотрен в самом начале доказательства и теперь у нас $b_m > 0$.) Придем к задаче доказательства неравенств

$$\frac{\cos(x/2) - \cos(m + 1/2)x}{1 - \cos(m + 1/2)x} > \frac{b_n}{b_m}, \quad 0 < x < \frac{2\pi}{n+m}, \quad x < \phi_{m+1} \left(\frac{b_n}{b_m} \right), \quad (4.15)$$

$$\frac{\cos(x/2) - \cos(n - 1/2)x}{1 - \cos(n - 1/2)x} > \frac{b_n}{b_m}, \quad \frac{2\pi}{n+m} \leq x \leq \frac{2\pi}{n}, \quad x < \phi_n \left(\frac{b_n}{b_m} \right).$$

Перепишем эти неравенства с помощью обозначения (2.3):

$$\Phi_{m+1}(x) > \frac{b_n}{b_m}, \quad 0 < x < \frac{2\pi}{n+m}, \quad x < \phi_{m+1} \left(\frac{b_n}{b_m} \right),$$

$$\Phi_n(x) > \frac{b_n}{b_m}, \quad \frac{2\pi}{n+m} \leq x \leq \frac{2\pi}{n}, \quad x < \phi_n \left(\frac{b_n}{b_m} \right).$$

Из леммы 1 сразу видно, что

$$\Phi_{m+1}(x) > \frac{b_n}{b_m} \iff x < \phi_{m+1} \left(\frac{b_n}{b_m} \right) \quad \text{при условии} \quad 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{m+1},$$

$$\Phi_n(x) > \frac{b_n}{b_m} \iff x < \phi_n \left(\frac{b_n}{b_m} \right) \quad \text{при условии} \quad 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{n}.$$

Это означает, что неравенства, стоящие слева в (4.15) при указанных справа ограничениях на значения переменной x выполняются. Доказательство импликаций (4.7), (4.8) завершено.

Итак, положительность суммы ряда (1.1) на интервале $0 < x < \Psi_{m,n}(c)$ при условии (4.4) и $c \in [0, 1 - (2m+1)^{-2}]$ доказана. Теперь убедимся в том, что указанный

интервал положительности не может быть сколько-нибудь существенно увеличен. Докажем, что каковы бы ни были четыре числа

$$m, n \in \mathbb{N}, \quad m < n, \quad c \in (0, 1 - (2m + 1)^{-2}), \quad \varepsilon \in (0, 1),$$

существует обрывающийся ряд (1.1), для коэффициентов которого выполняется условие (4.4), принимающий отрицательное значение на интервале $\Psi_{m,n}(c) < x < \Psi_{m,n} + \varepsilon$. В случае $c = 0$ таким рядом является ядро Дирихле $\tilde{D}_{n-1}(x)$. Эта функция отрицательна при $x \in (2\pi/n, 2\pi/(n-1))$, а $\Psi_{m,n}(0) = 2\pi/n$ согласно леммам 1 и 2.

Рассмотрим тригонометрические полиномы

$$\mathcal{P}_{q,N}(x; c) = \sum_{k=1}^q \sin kx + c \sum_{k=q+1}^N \sin kx, \quad q, N \in \mathbb{N}, \quad q < N.$$

Очевидно включение

$$\mathcal{P}_{q,N}(x; c) \in \mathfrak{M}_{m,n}(c), \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad m \leq q < n. \quad (4.16)$$

Ввиду (1.6) имеем

$$2\mathcal{P}_{q,N}(x; c) \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} - \cos \left(q + \frac{1}{2} \right) x + c \left(\cos \left(q + \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(N + \frac{1}{2} \right) x \right). \quad (4.17)$$

Обозначим

$$E_N = \left\{ \frac{2\pi\nu}{(N+0.5)} \mid \nu \in \mathbb{Z} \right\}, \quad F_q(x; c) = \cos \frac{x}{2} - \cos \left(q + \frac{1}{2} \right) x + c \left(\cos \left(q + \frac{1}{2} \right) x - 1 \right). \quad (4.18)$$

Значения функций (4.17) и $F_q(x; c)$ на множестве E_N совпадают. Из (4.18) и (2.3) видно, что на интервале $0 < x < 2\pi/(q+1/2)$ неравенства $F_q(x; c) < 0$ и $\Phi_{q+1}(x) < c$ равносильны. Отсюда с помощью леммы 1 заключаем, что

$$\mathcal{P}_{q,N}(x; c) < 0 \quad \text{при} \quad x \in E_N \cap \left(\phi_{q+1}(c), \frac{2\pi}{q+1} \right).$$

Теперь полагаем

$$q(c) = \begin{cases} n-1, & \text{если } c \in (0, c_{m,n}), \\ m, & \text{если } c \in [c_{m,n}, 1 - (2m+1)^{-2}]. \end{cases}$$

Тогда $\phi_{q(c)+1} = \Psi_{m,n}(c)$ по лемме 2. Таким образом, тригонометрический полином $\mathcal{P}_{q(c),N}(x; c)$ лежит в классе $\mathfrak{M}_{m,n}(c)$ и принимает отрицательные значения на множестве $E_N \cap (\Psi_{m,n}(c), \Psi_{m,n}(0))$. А так как при любом $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших N пересечение

$$E_N \cap (\Psi_{m,n}(c), \Psi_{m,n}(0)) \cap (\Psi_{m,n}(c), \Psi_{m,n}(c) + \varepsilon)$$

непусто, получаем требуемое утверждение. Доказательство теоремы завершено.

В заключение раздела заметим, что при условии (4.4) и $c \in [0, 1 - (2m+1)^{-2}]$ на интервале $0 < x < \Psi_{m,n}(c)$ положительна не только сумма ряда (1.1), но и все частичные суммы этого ряда, поскольку они также являются рядами из класса $\mathfrak{M}_{m,n}(c)$.

5. Следствия из теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Рассмотрим последовательности, определенные формулами (1.8) и (2.5). Сразу видно, что $c_n = c_{1,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому при условии $b_n \leq c_n b_1$ сумма ряда (1.1) по теореме 1 положительна на интервале $0 < x < \Psi_{1,n}(c_{1,n})$. В то же время по лемме 2 имеем $\Psi_{m,n}(c_{m,n}) = 2\pi/(n+m)$. Следовательно, в условиях предложения 2 сумма ряда (1.1) положительна на интервале $0 < x < 2\pi/(n+1)$, что и требовалось доказать.

Выражение функций ϕ_2 и ϕ_3 через основные элементарные функции является несложной задачей. Решив ее, получим такие результаты.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $0 \leq c < 8/9$ справедливо равенство

$$X_{1,2}(c) = \arccos\left(\frac{c - 2\sqrt{1-c}}{2(1-c)}\right),$$

а если $8/9 \leq c < 1$, то $X_{1,2}(c) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $0 \leq c < 24/25$ справедливо равенство

$$X_{2,3}(c) = \arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{1-c}} - \frac{\sqrt{5/4 + 1/\sqrt{1-c}}}{2} - \frac{1}{4}\right),$$

а если $24/25 \leq c < 1$, то $X_{2,3}(c) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Верны равенства

$$X_{1,3}(c) = \begin{cases} X_{2,3}(c), & 0 \leq c < \sqrt{8} - 2, \\ X_{1,2}(c), & \sqrt{8} - 2 \leq c < 8/9, \\ 0, & 8/9 \leq c < 1. \end{cases}$$

В частности, $X_{1,3}(\sqrt{8} - 2) = X_{2,3}(\sqrt{8} - 2) = X_{1,2}(\sqrt{8} - 2) = \pi/2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Hartman, A. Wintner, "On sine series with monotone coefficients", *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 102–104.
- [2] P. Hartman, A. Wintner, "On the behavior of Fourier sine transforms near the origin", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2** (1951), 398–400.
- [3] R. P. Boas Jr., *Integrability Theorems for Trigonometric Transforms*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **38**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [4] L. Vietoris, "Über das Vorzeichen gewisser trigonometrischer Summen", *Österr. Acad. Wiss. Math.-Natur. Kl. S.-B. Abt. II*, **167** (1958), 125–135.
- [5] А. С. Белов, "О примерах тригонометрических рядов с неотрицательными частными суммами", *Матем. сб.*, **186**:4 (1995), 21–46.

А. Ю. Попов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: mysfed@rambler.ru

Поступило

24.12.2013

Исправленный вариант

26.05.2014