Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Печкуров, Один пример в теории бисекториальных операторов, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 249–254

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10437>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 18:17:38

Один пример в теории бисекториальных операторов

А. В. Печкуров

Неограниченный оператор называют бисекториальным, если его спектр содержится в двух секторах, лежащих соответственно в левой и правой полуплоскостях, а резольвента убывает на бесконечности как $1/\lambda$. Известно, что при любой ограниченной функции f уравнение $u' - Au = f$ с бисекториальным оператором A имеет единственное ограниченное решение u , представляющее собой свертку f с функцией Грина. Приводится пример бисекториального оператора, порождающего неограниченную в нуле функцию Грина.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10437

1. Введение. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u'(t) - Au(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где A – линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X . *Задачей об ограниченных решениях* называют задачу о нахождении ограниченных на действительной прямой $\mathbb{R}$ решений этого дифференциального уравнения, соответствующих ограниченным свободным членам f . В случае [1]–[3], когда A является ограниченным оператором, существование единственного ограниченного решения при любой ограниченной непрерывной функции f равносильно отсутствию точек спектра оператора A на мнимой оси. Для неограниченных операторов ситуация усложняется. Настоящая заметка посвящена случаю, когда A – неограниченный бисекториальный оператор.

Бисекториальные операторы изучались в работах [4]–[8]. Бисекториальность означает, что спектр оператора содержится в двух секторах, лежащих соответственно в левой и правой полуплоскостях, а резольвента убывает на бесконечности как $1/\lambda$ (подробнее см. ниже). Условие бисекториальности обобщает известное условие секториальности [9]–[13], являющееся одним из абстрактных вариантов понятия параболичности. Секториальность означает, что спектр пучка лежит в некотором секторе, содержащемся в левой полуплоскости, а резольвента убывает на бесконечности как $1/\lambda$.

В [5], [8] установлено, что всякий бисекториальный оператор порождает биполугруппу [5] или по другой терминологии функцию Грина [8]. Но в [5] подразумевается, что биполугруппа бисекториального оператора ограничена в окрестности нуля,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 13-01-00378, 14-01-31196).

а в [8] установлено лишь, что функция Грина суммируема в нуле. В настоящей заметке приводится пример уравнения с бисекториальным оператором D , функция Грина которого неограничена в окрестности нуля. В частности, это означает, что некоторые утверждения из книги [5] нуждаются в корректировке.

2. Бисекториальные операторы. Пусть X и Y – банаховы пространства. Символом $\mathbf{B}(X, Y)$ будем обозначать банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y . Если $X = Y$, то вместо $\mathbf{B}(X, Y)$ будем писать $\mathbf{B}(X)$. Символом $\mathbf{1} \in \mathbf{B}(X)$ будем обозначать тождественный оператор.

Резольвентным множеством замкнутого линейного оператора $A: D(A) \subseteq X \rightarrow X$ называют множество $\rho(A)$, состоящее из всех $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых оператор $\lambda\mathbf{1} - A: D(A) \rightarrow X$ обратим, а *резольвентой* – функцию (семейство)

$$R_\lambda = (\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A).$$

Резольвента R_λ принимает значения в подпространстве $D(A)$, но часто удобно считать, что множеством значений резольвенты является все X . Дополнение $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ к резольвентному множеству называют *спектром* оператора.

Бисекториальным оператором называют [5; с. 16] замкнутый плотно определенный линейный оператор A , действующий в X , такой, что при некоторых числах $\delta_0 \in (0, \pi/2]$ и $h_0 > 0$ множество (см. рис. 1 слева)

$$\Omega_{\delta_0, h_0} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} - \delta_0 < \arg \lambda < \frac{\pi}{2} + \delta_0, \frac{\pi}{2} - \delta_0 < \arg \lambda < -\frac{3\pi}{2} + \delta_0 \right\} \\ \cup \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \lambda| < h_0 \}$$

содержится в резольвентном множестве пучка, причем для каждого $\delta \in (0, \delta_0)$ и $h \in (0, h_0)$ существует такое $M \in \mathbb{R}$, что

$$\|(\lambda\mathbf{1} - A)^{-1}: X \rightarrow X\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_{\delta, h}.$$

Обозначим через $\Gamma_{\delta, h}^+$ контур, состоящий из двух лучей $\arg(\lambda - a) = \pm(\pi/2 + \delta)$, где $a \in (-h, 0)$, а $\delta > 0$ достаточно мало. Аналогично определим $\Gamma_{\delta, h}^-$. Ориентируем эти контуры, как показано на рис. 1 справа.

Определим *функцию Грина* уравнения $u'(t) - Au(t) = f(t)$ по правилу

$$\mathcal{G}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\delta, h}^+} e^{\lambda t} (\lambda\mathbf{1} - A)^{-1} d\lambda, \quad t > 0, \\ \mathcal{G}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\delta, h}^-} e^{\lambda t} (\lambda\mathbf{1} - A)^{-1} d\lambda, \quad t < 0.$$

Можно показать [5], [8], что эти интегралы абсолютно сходятся и не зависят от выбора δ и h .

3. Контрпример. Обозначим через $C_{2\pi}$ банахово пространство всех непрерывных 2π -периодических функций $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ с нормой $\|x\| = \sup_{\xi} |x(\xi)|$, а через $C_{2\pi 0}$ – замкнутое подпространство функций $x \in C_{2\pi}$, для которых

$$\int_0^{2\pi} x(\xi) d\xi = 0.$$

Рис. 1. Слева: множество Ω_{δ_0, h_0} (выделено белым); справа: граница $\Gamma_{\delta_0, h_0}^{\pm}$ множества Ω_{δ_0, h_0} и контур $\Gamma_{\delta, h}$ (стрелками показана ориентация)

Обозначим через $C_{2\pi 0}^1$ подпространство функций $x \in C_{2\pi 0}$, лежащих в $C_{2\pi 0}$ вместе с производной с нормой $\|x\|_1 = \|x\|_{C_{2\pi 0}} + \|x'\|_{C_{2\pi 0}}$.

Рассмотрим оператор $D: C_{2\pi 0}^1 \rightarrow C_{2\pi 0}$, определенный по формуле

$$Dx = ix'.$$

Очевидно, операторы $D, \mathbf{1}: C_{2\pi 0}^1 \rightarrow C_{2\pi 0}$ ограничены, причем D является изоморфизмом.

Нетрудно видеть, что спектр оператора D , рассматриваемого как неограниченный оператор, действующий из $C_{2\pi 0}^1$ в $C_{2\pi 0}$ с областью определения $C_{2\pi 0}^1 \subset C_{2\pi 0}$, совпадает с множеством $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Непосредственно проверяется, что резольвента оператора $D: C_{2\pi 0} \rightarrow C_{2\pi 0}^1$ представима в виде

$$((\lambda \mathbf{1} - D)^{-1}g)(\xi) = -\frac{1}{i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\lambda s}}{1 - e^{-2\pi i\lambda}} g(\xi - s) ds = -\frac{1}{i} \int_{\xi-2\pi}^{\xi} \frac{e^{-i\lambda(\xi-s)}}{1 - e^{-2\pi i\lambda}} g(s) ds.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \|(\lambda \mathbf{1} - D)^{-1} : C_{2\pi 0} \rightarrow C_{2\pi 0}\| \\ & \leq \|(\lambda \mathbf{1} - D)^{-1} : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}\| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|e^{-i\lambda s}|}{|1 - e^{-2\pi i\lambda}|} ds \\ & = \int_0^{2\pi} \frac{e^{s \operatorname{Im} \lambda}}{|1 - e^{2\pi \operatorname{Im} \lambda} e^{-2\pi i \operatorname{Re} \lambda}|} ds = \frac{|e^{2\pi \operatorname{Im} \lambda} - 1|}{|\operatorname{Im} \lambda| \cdot |1 - e^{2\pi \operatorname{Im} \lambda} e^{-2\pi i \operatorname{Re} \lambda}|}. \end{aligned}$$

Отсюда легко вывести, что для резольвенты справедлива оценка

$$\|(\lambda \mathbf{1} - D)^{-1} : C_{2\pi 0} \rightarrow C_{2\pi 0}\| \leq \frac{M}{1 + |\lambda|}, \quad \lambda \in \Omega_{\delta, h}, \quad (3.1)$$

с произвольным $\delta \in (0, \pi/2)$ и некоторыми M и $h > 0$. Тем самым, оператор D является бисекториальным.

В доказательстве [5; предложение 1.8] ошибочно утверждается, что при выполнении оценки (3.1) функция Грина $\mathcal{G}(t)$ уравнения

$$u'(t) - (Du)(t) = f(t) \quad (3.2)$$

ограничена при $t \rightarrow 0$. В качестве контрпримера рассмотрим уравнение (3.2), в котором D рассматривается как неограниченный оператор, действующий из $X = C_{2\pi 0}$ в себя, с областью определения $C_{2\pi 0}^1 \subset C_{2\pi 0}$. Покажем, что в этом случае, несмотря на выполнение оценки (3.1), функция Грина $\mathcal{G}(t): C_{2\pi 0} \rightarrow C_{2\pi 0}$ при $t \rightarrow 0$ не ограничена, что противоречит утверждению [5; с. 18].

Рассмотрим семейство функций $x_\varepsilon \in C_{2\pi 0}$, $\varepsilon > 0$, графики которых изображены на рис. 2. Отметим, что $\|x_\varepsilon\| = 1$. Непосредственные вычисления показывают, что коэффициенты Фурье этих функций имеют вид

$$c_{\varepsilon, k} = -\frac{i \sin(\varepsilon k)}{\varepsilon k^2 (\pi - \varepsilon)}.$$

Из этой формулы, в частности, видно, что ряды Фурье функций x_ε при $\varepsilon > 0$ сходятся равномерно.

Рис. 2. График функции x_ε

Рассмотрим на $C_{2\pi 0}$ линейный функционал $f(x) = x(0)$. Очевидно, $\|f\| = 1$.

Нетрудно показать, что возникающая в рассматриваемом примере функция Грина $\mathcal{G}(t)$ при $t > 0$ переводит произвольную функцию $x \in C_{2\pi 0}$ в функцию

$$\xi \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{-kt} e^{ik\xi},$$

а при $t < 0$ – в функцию

$$\xi \mapsto - \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{kt} e^{ik\xi};$$

здесь c_k – коэффициенты Фурье функции x .

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +0} f[(\mathcal{G}(t) + \mathcal{G}(-t))x_\varepsilon] &= \lim_{t \rightarrow +0} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} -e^{-kt} \frac{i \sin(\varepsilon k)}{\varepsilon k^2(\pi - \varepsilon)} - \sum_{k=-\infty}^{-1} -e^{-kt} \frac{i \sin(\varepsilon k)}{\varepsilon k^2(\pi - \varepsilon)} \right] \\
 &= \lim_{t \rightarrow +0} \left[- \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kt} \frac{i \sin(\varepsilon k)}{\varepsilon k^2(\pi - \varepsilon)} + \sum_{k=-\infty}^{-1} e^{-kt} \frac{i \sin(\varepsilon k)}{\varepsilon k^2(\pi - \varepsilon)} \right] \\
 &= - \lim_{t \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kt} \frac{2i \sin(\varepsilon k)}{\varepsilon k^2(\pi - \varepsilon)} \\
 &= - \frac{1}{\varepsilon(\pi - \varepsilon)} \lim_{t \rightarrow +0} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kt} \frac{e^{i\varepsilon k} - e^{-i\varepsilon k}}{k^2} = \frac{\text{Li}_2(e^{-i\varepsilon}) - \text{Li}_2(e^{i\varepsilon})}{\varepsilon(\pi - \varepsilon)},
 \end{aligned}$$

где

$$\text{Li}_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}.$$

Очевидно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (z^k/k^2)$, определяющий функцию $\text{Li}_2(z)$, равномерно сходится в замкнутом круге $|z| \leq 1$ и, следовательно, Li_2 является в этом круге непрерывной, в частности, ограниченной функцией. Из хорошо известной формулы $\ln(1-y) = -\sum_{k=1}^{\infty} (y^k/k)$, $|y| < 1$, и правила почленного интегрирования степенных рядов [14; с. 459–460, 471] видно, что

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-y)}{y} dy \quad \text{при } |z| < 1.$$

По непрерывности это равенство продолжается на замкнутый круг $|z| \leq 1$. Воспользуемся представлением

$$\text{Li}_2(e^{-i\varepsilon}) - \text{Li}_2(e^{i\varepsilon}) = \int_{e^{-i\varepsilon}}^{e^{i\varepsilon}} \frac{\ln(1-y)}{y} dy,$$

где интеграл берется по вертикальному отрезку, соединяющему $e^{-i\varepsilon}$ и $e^{i\varepsilon}$. Параметризуем этот отрезок: $y(s) = \cos \varepsilon + is \sin \varepsilon$, $s \in [-1, 1]$. Преобразуем интеграл с помощью этой параметризации:

$$\begin{aligned}
 \int_{e^{-i\varepsilon}}^{e^{i\varepsilon}} \frac{\ln(1-y)}{y} dy &= \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \cos \varepsilon - is \sin \varepsilon)}{\cos \varepsilon + is \sin \varepsilon} i \sin \varepsilon ds \\
 &= i \sin \varepsilon \int_{-1}^1 \frac{\ln(1 - \cos \varepsilon) - i \arctg(s \sin \varepsilon / (1 - \cos \varepsilon))}{\cos \varepsilon + is \sin \varepsilon} ds \\
 &= i \sin \varepsilon \int_{-1}^1 \frac{(\ln(1 - \cos \varepsilon) - i \arctg(s \sin \varepsilon / (1 - \cos \varepsilon)))(\cos \varepsilon - is \sin \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon + s^2 \sin^2 \varepsilon} ds \\
 &= i \sin \varepsilon \int_{-1}^1 \frac{\cos^2 \varepsilon \ln(1 - \cos \varepsilon) - s \sin \varepsilon \arctg(s \sin \varepsilon / (1 - \cos \varepsilon))}{\cos^2 \varepsilon + s^2 \sin^2 \varepsilon} ds,
 \end{aligned}$$

поскольку действительная часть интеграла заведомо равна нулю. По теореме о среднем для интегралов [14; с. 364] последнее выражение равно

$$i \sin \varepsilon \left(2 \frac{\cos^2 \varepsilon \ln(1 - \cos \varepsilon) - s_* \sin \varepsilon \arctg(s_* \sin \varepsilon / (1 - \cos \varepsilon))}{\cos^2 \varepsilon + s_*^2 \sin^2 \varepsilon} \right),$$

где $s_* \in [-1, 1]$ – некоторая точка. Из этого представления видно, что при $\varepsilon \rightarrow +0$ функция $\varepsilon \mapsto \operatorname{Li}_2(e^{-i\varepsilon}) - \operatorname{Li}_2(e^{i\varepsilon})$ эквивалентна функции $\varepsilon \mapsto 2i\varepsilon \ln(1 - \cos \varepsilon)$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \lim_{t \rightarrow +0} f[(\mathcal{G}(t) + \mathcal{G}(-t))x_\varepsilon] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\operatorname{Li}_2(e^{-i\varepsilon}) - \operatorname{Li}_2(e^{i\varepsilon})}{\varepsilon(\pi - \varepsilon)} = -i\infty.$$

Это означает, что функция Грина $\mathcal{G}(t): C_{2\pi 0} \rightarrow C_{2\pi 0}$ не ограничена при $t \rightarrow 0$, что противоречит [5; с. 18].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Perron, “Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen”, *Math. Z.*, **32**:5 (1930), 703–728.
- [2] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Нелинейный анализ и его приложения, Наука, М., 1970.
- [3] М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, *Нелинейные почти периодические колебания*, Наука, М., 1970.
- [4] H. Bart, I. Gohberg, M. A. Kaashoek, “Wiener–Hopf factorization, inverse Fourier transforms and exponentially dichotomous operators”, *J. Funct. Anal.*, **68**:1 (1986), 1–42.
- [5] C. V. M. van der Mee, *Exponentially Dichotomous Operators and Applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **182**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [6] А. В. Печкуров, “Бисекториальные операторные пучки и задача об ограниченных решениях”, *Спектральные и эволюционные задачи*, **21**:2 (2011), 76–87.
- [7] А. В. Печкуров, “Об обратимости в пространстве Шварца оператора, порожденного пучком умеренного роста”, *Вестн. Воронежск. гос. ун-та. Физика. Математика*, 2011, № 2, 116–122.
- [8] А. В. Печкуров, “Бисекториальные операторные пучки и задача об ограниченных решениях”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 3, 31–41.
- [9] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985.
- [10] А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов”, *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 3–42.
- [11] А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “О полугруппах распределений с сингулярностью в нуле и ограниченных решениях линейных дифференциальных включений”, *Матем. заметки*, **79**:1 (2006), 19–33.
- [12] А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 3–68.
- [13] М. С. Бичегкуев, “К теории бесконечно дифференцируемых полугрупп операторов”, *Алгебра и анализ*, **22**:2 (2010), 1–13.
- [14] Л. Д. Кудрявцев, *Краткий курс математического анализа*, Наука, М., 1989.

А. В. Печкуров

Воронежский государственный университет

E-mail: apechkurov@gmail.com

Поступило

14.11.2013

Исправленный вариант

23.06.2014