Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Д. Менихес, О регуляризуемости некоторых классов отображений, обратных к интегральным операторам, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 222–229

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1044>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 09:28:20

УДК 517.9

О РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОТОБРАЖЕНИЙ, ОБРАТНЫХ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРАМ

Л. Д. Менихес

Исследуется регуляризуемость отображений, обратных к интегральным операторам, действующим из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$, в случае неинъективности продолжения операторов на $L_2(0, 1)$. Построены классы таких операторов как с регуляризуемыми, так и с нерегуляризуемыми обратными отображениями, для которых продолжение операторов на $L_2(0, 1)$ имеет бесконечномерное ядро.

Библиография: 6 названий.

Понятие регуляризуемости отображений, обратных к линейным операторам, возникло при приближенном решении уравнений. Если такое отображение регуляризуемо, то уравнение может быть приближенно решено методом регуляризации А. Н. Тихонова. Если же отображение нерегуляризуемо, то метод Тихонова для приближенного решения уравнения с таким оператором не применим. Большой интерес представляет исследование вопроса о регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам, так как оно связано с возможностью решения интегральных уравнений. В работе [1] показано, что для интегрального оператора из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$ при условии инъективности его продолжения на пространство $L_2(0, 1)$ обратное отображение регуляризуемо, а в работе [2] построен интегральный оператор из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$ с нерегуляризуемым обратным отображением. В работах [3], [4] доказано существование интегральных операторов с нерегуляризуемыми обратными в различных функциональных пространствах.

В данной работе исследуется связь регуляризуемости обратных для интегральных операторов из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$ со структурой ядра продолженного на $L_2(0, 1)$ оператора. Приводится конструкция, позволяющая строить классы операторов как с регуляризуемыми обратными, так и классы операторов с нерегуляризуемыми обратными отображениями.

1. Пусть X и Y – банаховы пространства, $A: X \rightarrow Y$ – непрерывный линейный инъективный оператор. Мы будем говорить, что отображение A^{-1} *регуляризуемо*, если существует семейство отображений $R_\delta: Y \rightarrow X$, $\delta \in (0, \delta_0)$, такое, что для любого $x \in X$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|y - Ax\| \leq \delta} \|R_\delta y - x\| = 0.$$

Хорошо известно (см. [5]), что если X – квазирефлексивное (в частности, рефлексивное) пространство, то отображение A^{-1} регуляризуемо для любого A . Поэтому если интегральный оператор действует из $L_2(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$, то обратный оператор всегда

является регуляризуемым. Совсем иная картина наблюдается при рассмотрении интегральных операторов из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$. Здесь существуют интегральные операторы с нерегуляризуемым обратным отображением. Напомним (см. [5]), что регуляризуемость отображения A^{-1} эквивалентна необращению в 0 характеристики подпространства $A^*Y^* \subset X^*$.

Довольно сильное достаточное условие регуляризуемости состоит в следующем [6]. Если E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, E_1 сепарабельно, E_2 рефлексивно, $A: E_1 \rightarrow E_2$ и $B: E_2 \rightarrow E_3$ – линейные непрерывные инъективные операторы и отображение A^{-1} регуляризуемо, то регуляризуемо и обратное к произведению операторов отображение $(BA)^{-1}$.

Отсюда сразу следует уже упоминавшееся утверждение. Если продолжение по непрерывности оператора $A: C(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ на все пространство $L_2(0, 1)$ инъективно, то A^{-1} регуляризуемо. Это следует из регуляризуемости i^{-1} , где $i: C(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ – вложение.

Если же указанное продолжение оператора A имеет ненулевое ядро, то A^{-1} может не быть регуляризуемым (см. [2]). В соответствующем примере из [2] ядро продолжения оператора A было бесконечномерным. Покажем сначала, что это не случайно, т.е. если это ядро конечномерно, то A^{-1} регуляризуемо.

ТЕОРЕМА 1. Пусть E_1, E_2, E_3 – банаховы пространства, E_1 сепарабельно и E_2 рефлексивно, $A: E_1 \rightarrow E_2$ и $B: E_2 \rightarrow E_3$ – линейные непрерывные операторы, A – инъективный оператор, $\ker B$ – конечномерное подпространство, A^{-1} регуляризуемо и $A(E_1) \cap \ker B = \{0\}$, т.е. BA – инъективный оператор. Тогда отображение $(BA)^{-1}$ регуляризуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через p естественное отображение $p: E_2 \rightarrow E_2 / \ker B$. Тогда оператор B можно представить в виде произведения $B = Cp$, где C – линейный непрерывный инъективный оператор, $C: E_2 / \ker B \rightarrow E_3$. Ввиду рефлексивности факторпространства $E_2 / \ker B$ и инъективности C

$$\overline{C^*E_3^*} = (E_2 / \ker B)^*. \quad (1)$$

Далее, так как сопряженное к факторпространству $E_2 / \ker B$ есть аннулятор ядра $\ker B$ и $\ker B$ конечномерно, то $p^*(E_2 / \ker B)^*$ – подпространство конечной коразмерности в E_2^* .

Теперь из (1) следует

$$\begin{aligned} \overline{(BA)^*E_3^*} &= \overline{(CpA)^*E_3^*} = \overline{A^*p^*C^*E_3^*} \supset A^*\overline{p^*C^*E_3^*} \\ &\supset A^*p^*\overline{C^*E_3^*} = A^*p^*(E_2 / \ker B)^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Регуляризуемость отображения A^{-1} влечет ненулевую характеристику $A^*E_2^* \subset E_1^*$. Но из (2) следует, что подпространство $\overline{(BA)^*E_3^*} \subset E_1^*$ содержит образ при отображении A^* подпространства конечной коразмерности в E_2^* , т.е. $\overline{(BA)^*E_3^*}$ содержит подпространство конечной коразмерности из $A^*E_2^*$. Так как тотальное подпространство конечного дефекта в пространстве ненулевой характеристики также имеет отличную от 0 характеристику, характеристика $\overline{(BA)^*E_3^*}$ отлична от 0. Следовательно, и $(BA)^*E_3^*$ имеет ненулевую характеристику, что влечет регуляризуемость отображения $(BA)^{-1}$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если интегральный оператор $A: C(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ инъективен и его продолжение на $L_2(0, 1)$ имеет конечномерное ядро, то A^{-1} регуляризуемо.

Заметим, что условие конечномерности ядра $\ker B$ в теореме 1 не может быть снято, это следует из результатов работы [2].

2. Изучим более детально случай, когда $\ker B$ бесконечномерно. А именно, мы построим как классы операторов из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$, продолжение которых на $L_2(0, 1)$ имеет бесконечномерное ядро, а их обратные регуляризуемы, так и классы операторов с аналогичным свойством, для которых обратные отображения нерегуляризуемы.

Сначала рассмотрим метод построения подпространств в $C^*(0, 1)$ с различной характеристикой. Пусть дана последовательность положительных чисел (a_n) . Построим по этой последовательности некоторые последовательности функций, определенных на промежутке $[0, 1]$. Для этого введем следующие последовательности промежутков:

$$I_k^- = \left[\frac{2^k - 1}{2^k}, \frac{2^{k+2} - 3}{2^{k+2}} \right), \quad I_k^+ = \left[\frac{2^{k+2} - 3}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} \right], \quad I_k = I_k^- \cup I_k^+, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и следующие последовательности функций: $\alpha_k(t) = 0$ при $t \in [0, 1] \setminus I_k^+$, $\alpha_k((2^{k+3} - 5)/2^{k+3}) = a_k$, $\alpha_k(t)$ линейна на промежутках

$$\left[\frac{2^{k+2} - 3}{2^{k+2}}, \frac{2^{k+3} - 5}{2^{k+3}} \right], \quad \left[\frac{2^{k+3} - 5}{2^{k+3}}, \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} \right]$$

и непрерывна на $[0, 1]$; $\beta_k(t) = 0$ при $t \in [0, 1] \setminus I_k^-$, линейна на I_k^- , непрерывна при $t = (2^k - 1)/2^k$ и

$$\lim_{t \rightarrow (2^{k+2} - 3)/2^{k+2} - 0} \beta_k(t) = 1;$$

$\gamma_{kn}(t) = 0$ при $t \in [0, 1] \setminus I_k$,

$$\gamma_{kn}(t) = -\beta_k(t) \quad \text{при } t \in \left[\frac{2^k - 1}{2^k}, \frac{2^{k+2} - 3}{2^{k+2}} - \frac{|I_k^-|}{n} \right],$$

где $|I_k^-|$ — длина промежутка I_k^- , $k, n = 1, 2, \dots$, $\gamma_{kn}((2^{k+2} - 3)/2^{k+2}) = 1$, $\gamma_{kn}(t_k) = \alpha_k(t_k)/a_k$, где t_k — меньший из двух корней уравнения

$$\left(2 + \frac{1}{a_k} \right) \alpha_k(t) = 1,$$

$\gamma_{kn}(t) = \alpha_k(t)/a_k$ при $t \in [t_k, (2^{k+1} - 1)/2^{k+1}]$, непрерывна на $[0, 1]$ и линейна на промежутках

$$\left[\frac{2^{k+2} - 3}{2^{k+2}} - \frac{|I_k^-|}{n}, \frac{2^{k+2} - 3}{2^{k+2}} \right], \quad \left[\frac{2^{k+2} - 3}{2^{k+2}}, t_k \right].$$

Отметим, что функции $\alpha_k(t)$ и $\gamma_{kn}(t)$ непрерывны на $[0, 1]$, $|\gamma_{kn}(t)| \leq 1$ при $t \in [0, 1]$, $\beta_k(t)$ разрывна на $[0, 1]$ и $|\beta_k(t)| \leq 1$ при $t \in [0, 1]$.

Пусть $\delta_k(t) = \alpha_k(t) + \beta_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$. Обозначим через $M \subset L_2(0, 1)$ замкнутое подпространство в $L_2(0, 1)$, натянутое на $(\delta_k(t))$, и через p естественное отображение $p: L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)/M$ на факторпространство. Будем рассматривать подпространства в $C^*(0, 1)$, которые являются образом сопряженного оператора $(pi)^*$, где

$i: C(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ – вложение. Так как в M все функции, кроме тождественного нуля, разрывны, то pi – инъективный оператор и, следовательно, $(pi)^*(L_2(0, 1)/M)^* \subset C^*(0, 1)$ – тотальное подпространство. В теореме 2 мы вычислим характеристику этого подпространства.

Напомним способ вычисления характеристики подпространств. Если $A: X \rightarrow Y$ – линейный непрерывный инъективный оператор, то характеристика $r(A^*Y^*)$ подпространства $A^*Y^* \subset X^*$ может быть найдена как обратная величина верхней грани чисел $\|x\|$, где x пробегает замыкание единичного шара S в X по новой норме $\|x\|_1 = \|Ax\|$. Следовательно, для нахождения характеристики $r((pi)^*(L_2(0, 1)/M)^*)$ достаточно вычислить верхнюю грань $\|x\|_C$, где x пробегает замыкание единичного шара в $C(0, 1)$ по норме $\|x\|_1 = \|pix\|$ и в правой части стоит норма в $L_2(0, 1)/M$.

ЛЕММА 1. Если непрерывная функция $x(t)$ принадлежит замыканию единичного шара S_1 в $C(0, 1)$ по норме $\|\cdot\|_1$, то для любой точки разрыва t_0 функций из M (такие точки пробегают счетное множество средин отрезков I_k) выполняется соотношение $|x(t_0)| \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для случая $x(t_0) \geq 0$ (если $x(t_0) < 0$, то рассуждения аналогичны). Докажем, что $x(t_0) \leq 1$. Пусть, напротив, $x(t_0) > 1$. Тогда в силу непрерывности $x(t)$ существуют числа $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ такие, что при $|t - t_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$x(t) > 1 + \alpha. \quad (3)$$

По условию существует последовательность непрерывных функций $(x_n(t))$, $|x_n(t)| \leq 1$, такая, что $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что существует последовательность $\omega_n(t) \in M$ такая, что $\|x_n - x - \omega_n\| \rightarrow 0$ по L_2 -норме. Пусть t_0 является серединой I_k . Тогда сужение функции ω_n на I_k^+ имеет вид

$$\omega_n|_{I_k^+} = C_n \alpha_k(t). \quad (4)$$

Изучим поведение последовательности (C_n) . Во-первых, (C_n) не может быть ограниченной последовательностью. В противном случае из (3) следует, что при $|t - t_0| < \delta$ и $t \in I_k$

$$x(t) - x_n(t) > \alpha. \quad (5)$$

Из (4) и (5) вытекает существование малого δ_1 такого, что при $t \in (t_0, t_0 + \delta_1)$ разность $x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)$ превышает некоторую фиксированную константу, что противоречит сходимости $\|x_n - x - \omega_n\| \rightarrow 0$. Во-вторых, последовательность (C_n) не может быть неограниченной. В самом деле, функция $x(t)$ непрерывна, значит ограничена на $[0, 1]$. При условии неограниченности (C_n) из (4) следует, что разность $|x(t) - x_n(t) - \omega_n(t)|$ на множестве положительной меры из I_k^+ превышает некоторую константу для бесконечного числа номеров n . А это противоречит сходимости $\|x_n - x - \omega\| \rightarrow 0$.

Итак, последовательность (C_n) не может быть ни ограниченной, ни неограниченной. Полученное противоречие доказывает лемму.

ТЕОРЕМА 2. Характеристика подпространства $(pi)^*(L_2(0, 1)/M)^* \subset C^*(0, 1)$ находится следующим образом:

$$r((pi)^*(L_2(0, 1)/M)^*) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{при } a \in (0, 1], \\ \frac{1}{2a+1} & \text{при } a \in [1, \infty), \\ 0 & \text{при } a = \infty, \end{cases} \quad a = \sup a_n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем равносильное утверждение:

$$\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S}_1\} = \begin{cases} 3 & \text{при } a \in (0, 1], \\ 2a+1 & \text{при } a \in [1, \infty), \\ \infty & \text{при } a = \infty. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь $\overline{S}_1$ – замыкание единичного шара в $C(0, 1)$ по норме $\|x\|_1 = \|pix\|_{L_2/M}$.

Рассмотрим последовательность непрерывных функций $(x_k(t))$, определенную следующим образом:

$$x_k(t) = \begin{cases} \beta_k(t) & \text{при } t \in I_k^-, \\ 1 & \text{при } t \in I_k^+ \cap (-\infty, t_0], \\ \left(2 + \frac{1}{a_k}\right)\alpha_k(t) & \text{при } t \in I_k^+ \cap [t_0, \infty), \\ 0 & \text{при } t \in [0, 1] \setminus I_k. \end{cases}$$

Ясно, что $\sup\{x_k(t) : t \in [0, 1]\} = 2a_k + 1$, т.е. $\|x_k\|_C = 2a_k + 1$. Покажем, что $x_k(t) \in \overline{S}_1$ для любого $k = 1, 2, \dots$. Для этого проверим, что $\gamma_{kn}(t) \rightarrow x_k(t)$ при $n \rightarrow \infty$ для любого k по норме $\|\cdot\|_1$. По построению γ_{kn} мера

$$\mu\{t : x_k(t) - \gamma_{kn}(t) \neq 2\delta_k(t)\} = \frac{|I_k^-|}{n}. \quad (7)$$

Принимая во внимание ограниченность при фиксированном k функций $x_k(t)$, $\gamma_{kn}(t)$, $\delta_k(t)$, из (7) выводим сходимость $x_k(t) - \gamma_{kn}(t) - 2\delta_k(t) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ в $L_2(0, 1)$. Так как $\delta_k(t) \in M$ при всех k , имеем сходимость $\gamma_{kn}(t) \rightarrow x_k(t)$ при $n \rightarrow \infty$ по норме $\|\cdot\|_1$, т.е. $x_k(t) \in \overline{S}_1$. Таким образом, мы показали, что

$$\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S}_1\} \geq 2a + 1. \quad (8)$$

Отсюда сразу следует последнее из равенств (6).

Теперь покажем, что выполнено второе из равенств (6). Итак, пусть $a \geq 1$. Вследствие (8) достаточно показать, что

$$\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S}_1\} \leq 2a + 1. \quad (9)$$

Пусть, напротив, $\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S}_1\} > 2a + 1$. Это означает, что найдется непрерывная функция $x(t) \in \overline{S}_1$ и $\|x\|_C > 2a + 1$. Пусть $t^* \in [0, 1]$ таково, что $x(t^*) > 2a + 1$ (если $x(t^*) < 0$, то рассуждения аналогичны). Тогда найдутся $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$x(t) > 2a + 1 + \alpha \quad (10)$$

при $|t - t^*| < \delta$.

Существуют последовательности $\omega_n \in M$ и $z_n \in S_1$ в $C(0, 1)$ такие, что

$$\|x - z_n - \omega_n\| \rightarrow 0 \quad (11)$$

в пространстве $L_2(0, 1)$. Из (10) следует, что $x(t) - z_n(t) > 2a + \alpha$ при $|t - t^*| < \delta$, а из (11) – что найдется такой номер k_0 , для которого коэффициент C_n из (4), начиная с некоторого номера $n = N$, удовлетворяет неравенству

$$C_n > 2 + \alpha_1, \quad (12)$$

$\alpha_1 > 0$ – некоторое число (здесь мы использовали условие $a \geq 1$). Обозначим через t_0 середину отрезка I_{k_0} . В силу леммы 1 $x(t_0) \leq 1$, значит в некоторой окрестности t_0 выполняется неравенство $x(t) < 1 + \alpha_1/2$, из которого следует

$$x(t) - z_n(t) < 2 + \frac{\alpha_1}{2}. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует, что в некоторой левой полуокрестности точки t_0 разность $x(t) - z_n(t) - \omega_n(t)$ превышает некоторую фиксированную константу, что противоречит соотношению (11). Итак, доказано соотношение (9), что вместе с (8) влечет выполнимость второго из равенств (6). Осталось доказать первое из равенств (6).

Пусть $a \in (0, 1]$. Покажем, что

$$\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S}_1\} \geq 3. \quad (14)$$

Введем следующую последовательность функций: $\xi_n(t) = 0$ при $t \in [0, 1] \setminus [(5n-2)/(8n), (5n-1)/(8n)]$, $\xi_n((10n-3)/(16n)) = \beta_1((10n-3)/(16n))$, непрерывна на $[0, 1]$ и линейна на промежутках

$$\left[\frac{5n-2}{8n}, \frac{10n-3}{16n} \right], \quad \left[\frac{10n-3}{16n}, \frac{5n-1}{8n} \right].$$

Пусть $y_m(t) = x_1(t) + 2\xi_m(t)$, $m = 2, 3, \dots$. Покажем, что $y_m \in \overline{S}_1$. Действительно, выше мы показали, что $\gamma_{kn}(t) \rightarrow x_k(t)$ при $n \rightarrow \infty$ по норме $\|\cdot\|_1$ для любого k . Возьмем $k = 1$. Тогда $\gamma_{1n}(t) \rightarrow x_1(t)$ или $\gamma_{1n}(t) + 2\xi_m(t) \rightarrow y_m(t)$ для любого $m = 2, 3, \dots$. Осталось показать, что

$$\gamma_{1n}(t) + 2\xi_m(t) \in S_1. \quad (15)$$

Для произвольных m и n это не так, но непосредственно из построения функций видно, что при $n \geq m$ соотношение (15) выполняется. Этого достаточно для доказательства того, что $y_m \in \overline{S}_1$. В силу построения функций имеем $\sup\{\|y_m\|_C : m = 2, 3, \dots\} = 3$. Тем самым, соотношение (14) доказано.

Покажем, что верно и обратное неравенство

$$\sup\{\|x\|_C : x \in \overline{S}_1\} \leq 3. \quad (16)$$

Неравенство (16) доказывается точно так же, как и (9) при $a = 1$. Тот факт, что в нашем случае $a \leq 1$, не влияет на доказательство. Таким образом, соотношения (14) и (16) доказывают первое из равенств (6). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\sup a_n < \infty$, то отображение $(pi)^{-1}$ регуляризуемо; если $\sup a_n = \infty$, то $(pi)^{-1}$ нерегуляризуемо.

Заметим, что в любом случае $\ker p = M$ бесконечномерно, так что теорема 1 здесь не применима. Новым является утверждение о том, что и в случае бесконечномерности ядра p , обратное отображение к произведению pi может быть регуляризуемым.

3. Теперь применим изложенную выше теорию для изучения регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам, действующим из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$.

Будем рассматривать интегральные операторы с гладкими ядрами, хотя вся теория проходит и для непрерывных ядер. Пусть $K(x, t)$ – бесконечно дифференцируемая функция на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$.

Рассмотрим интегральный оператор

$$Q: f(x) \mapsto \int_0^1 K(x, t)f(t) dt, \quad (17)$$

действующий из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$, и интегральный оператор

$$Q': f(x) \mapsto \int_0^1 K(x, t)f(t) dt,$$

действующий из $L_2(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$.

Сложность изучения регуляризуемости Q^{-1} , в частности, состоит в том, что и в случае инъективности оператора Q оператор Q' может не быть инъективным и даже иметь бесконечномерное ядро. Основная наша идея состоит в том, что можно построить интегральные операторы, инъективные из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$, продолжение которых на $L_2(0, 1)$ имеет в качестве ядра построенные выше подпространства M .

ЛЕММА 2. Пусть M – любое из построенных выше подпространств в $L_2(0, 1)$. Тогда в ортогональном дополнении N к M существует полная ортонормированная система $\{\psi_n(t)\}$ такая, что $\psi_n(t) \in C_0^\infty(0, 1)$, $n = 1, 2, \dots$.

Лемма доказывается так же, как и аналогичное утверждение в [2], только для несколько иного M .

Теперь, как и в [2], рассмотрим интегральные операторы Q и Q' с ядром

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \psi_n(t), \quad (18)$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ – произвольная ортонормированная система, состоящая из бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций, и

$$a_n = \left(\sup_{0 \leq x \leq 1} \max\{|\varphi_n(x)|, \dots, |\varphi_n^{(n)}(x)|\} \right)^{-1} \left(\sup_{0 \leq t \leq 1} \max\{|\psi_n(t)|, \dots, |\psi_n^{(n)}(t)|\} n^2 \right)^{-1}.$$

Ясно, что $K(x, t)$ – бесконечно дифференцируемая функция на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Q – интегральный оператор, построенный по формулам (17), (18). Тогда Q – инъективный оператор, и если $\sup a_n < \infty$, то отображение Q^{-1} регуляризуемо, а если $\sup a_n = \infty$, то Q^{-1} нерегуляризуемо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что $\ker Q' = M$. Действительно, если

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \psi_n(t) f(t) \right) dt = 0, \quad (19)$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \varphi_n(x) = 0, \quad (20)$$

где $b_n = \int_0^1 f(t) \psi_n(t) dt$ — n -й коэффициент Фурье функции $f(t)$ по системе $\{\psi_n(t)\}$, так как ряд в (19) по теореме Лебега можно почленно интегрировать. Из (20) следует $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$, т.е. $f(t) \in M$. Ясно также, что из $f(t) \in M$ следует $f(t) \in \ker Q'$. Таким образом, доказано, что $\ker Q' = M$. Отсюда следует, что, во-первых, Q — инъективный оператор и, во-вторых, Q можно представить в виде произведения операторов

$$Q = Q'i = ui, \quad (21)$$

где $u: L_2(0, 1)/M \rightarrow L_2(0, 1)$ — инъективный оператор.

Пусть $\sup a_n = \infty$. Тогда по теореме 2 $(pi)^{-1}$ нерегуляризуемо. Значит, подпространство $(pi)^*(L_2(0, 1)/M)^*$ имеет нулевую характеристику, но из (21) следует, что $Q^*L_2^*(0, 1) = (pi)^*u^*L_2^*(0, 1) \subset (pi)^*(L_2(0, 1)/M)^*$, т.е. $Q^*L_2^*(0, 1)$, тем более, имеет нулевую характеристику, что влечет нерегуляризуемость отображения Q^{-1} .

Пусть теперь $\sup a_n < \infty$. Тогда по теореме 2 $(pi)^{-1}$ регуляризуемо, т.е. подпространство $(pi)^*(L_2(0, 1)/M)^*$ имеет ненулевую характеристику. Далее, ввиду рефлексивности $L_2(0, 1)/M$ и инъективности оператора u $u^*L_2^*(0, 1) = (L_2(0, 1)/M)^*$ и, следовательно,

$$\overline{Q^*L_2^*(0, 1)} \supset \overline{(pi)^*u^*L_2^*(0, 1)} = (pi)^*(L_2(0, 1)/M)^*.$$

Это означает, что $\overline{Q^*L_2^*(0, 1)}$, стало быть, и $Q^*L_2^*(0, 1)$ — подпространства ненулевой характеристики, что влечет регуляризуемость Q^{-1} . Теорема доказана.

Можно считать, что оператор Q имеет симметричное ядро. Для этого достаточно положить $\varphi_n(x) = \psi_n(x), n = 1, 2, \dots$.

Таким образом, найден класс интегральных операторов из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$, для которых обратные отображения регуляризуемы, и класс интегральных операторов из $C(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$, для которых обратные отображения нерегуляризуемы. В обоих случаях продолжение операторов на $L_2(0, 1)$ имеет бесконечномерное ядро.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Танана В. П. О решении интегральных уравнений Фредгольма первого рода в пространстве $C(0, 1)$ // Матем. записки. Т. 7. Тетрадь 4. Свердловск: УрГУ, 1970. С. 83–90.
- [2] Менихес Л. Д. О регуляризуемости отображений, обратных к интегральным операторам // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. № 2. С. 282–285.
- [3] Пличко А. Н. Ненормирующие подпространства и интегральные операторы с нерегуляризуемым обратным // Сиб. матем. ж. 1988. Т. 29. № 4. С. 208–211.
- [4] Островский М. И. Замечание об аналитической представимости отображений, обратных к интегральным операторам // Матем. физика, анализ, геометрия. 1994. Т. 1. № 3–4. С. 513–515.
- [5] Винокуров В. А., Петунин Ю. И., Пличко А. Н. Условия измеримости и регуляризуемости отображений, обратных к непрерывным линейным отображениям // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220. № 3. С. 509–511.
- [6] Петунин Ю. И., Пличко А. Н. Регуляризуемость по Тихонову некоторых классов некорректных задач // Матем. сборник. Киев: Наукова думка, 1976. С. 221–224.