Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, Унитарные автоморфизмы пространства ганкелевых матриц, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 687–696

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10440>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 11:30:25

Унитарные автоморфизмы пространства ганкелевых матриц

Х. Д. Икрамов

Для нечетных n дано описание унитарных $n \times n$ -матриц U , обладающих следующим свойством: если H – ганкелева матрица порядка n , то матрица $U^* H U$ также является ганкелевой.

Библиография: 3 названия.

DOI: 10.4213/mzm10440

1. Введение. Пусть $\mathcal{H}_n$ – линейное пространство комплексных ганкелевых матриц размера $n \times n$. Напомним, что *ганкелевой* называется матрица вида

$$H = \begin{pmatrix} h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \dots & h_0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \dots & h_{-1} \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \dots & h_{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_0 & h_{-1} & h_{-2} & \dots & h_{-n+1} \end{pmatrix}.$$

Нас интересует следующий вопрос: каковы те унитарные $n \times n$ -матрицы, которые отображают пространство $\mathcal{H}_n$ в себя посредством подобия. Если W обладает этим свойством, то будем писать $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$. Таким образом, запись $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ означает импликацию

$$\forall A \in \mathcal{H}_n \longrightarrow B = W^* A W \in \mathcal{H}_n.$$

Для нечетных n ответ на поставленный вопрос дает теорема, доказываемая в данной статье.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $n \geq 3$ – нечетное число. Тогда множество $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ есть группа, изоморфная прямому произведению унитарной группы $\mathbf{U}_1$ и четверной группы Клейна. При этом образующими элементами последней являются диагональная матрица

$$\mathcal{D}_n = \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots, 1)$$

и так называемая перединичная матрица

$$\mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & 1 & \\ & & \ddots & & \\ & 1 & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы проводится по индукции в пп. 2–4. В заключительном п. 5 мы объясняем, почему при четных n задача описания группы $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ значительно сложнее, чем для нечетных значений n . Случаю четного n будет посвящена отдельная публикация.

2. Базис индукции. Пусть $n = 3$. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $B = W^*AW$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} |w_{11}|^2 & \bar{w}_{11}w_{12} & \bar{w}_{11}w_{13} \\ \bar{w}_{12}w_{11} & |w_{12}|^2 & \bar{w}_{12}w_{13} \\ \bar{w}_{13}w_{11} & \bar{w}_{13}w_{12} & |w_{13}|^2 \end{pmatrix}.$$

Из ганкелевости этой матрицы вытекает:

- а) попарные произведения $w_{12}\bar{w}_{11}$, $w_{13}\bar{w}_{11}$ и $w_{13}\bar{w}_{12}$ суть вещественные числа, при этом число $w_{13}\bar{w}_{11}$ даже неотрицательно;
- б) выполняется равенство

$$\bar{w}_{11}w_{13} = |w_{12}|^2, \quad (1)$$

означающее, что при ненулевом w_{12} все три элемента в первой строке матрицы W отличны от нуля. В этом случае они составляют геометрическую прогрессию с первым членом w_{11} и знаменателем

$$\alpha = \frac{w_{12}}{w_{11}}.$$

Проводя аналогичный анализ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

приходим к аналогичным же выводам в отношении элементов третьей строки матрицы W , а именно:

- в) попарные произведения $w_{32}\bar{w}_{31}$, $w_{33}\bar{w}_{31}$ и $w_{33}\bar{w}_{32}$ суть вещественные числа, при этом число $w_{33}\bar{w}_{31}$ даже неотрицательно;
- г) выполняется равенство

$$\bar{w}_{31}w_{33} = |w_{32}|^2. \quad (2)$$

Таким образом, если $w_{32} \neq 0$, то все три элемента в третьей строке отличны от нуля и образуют геометрическую прогрессию с первым членом w_{31} и знаменателем

$$\beta = \frac{w_{32}}{w_{31}}.$$

В действительности в первой и третьей строке должен быть хотя бы один нулевой элемент. В противном случае скалярное произведение этих строк было бы равно

$$w_{11}\bar{w}_{31} + w_{12}\bar{w}_{32} + w_{13}\bar{w}_{33} = w_{11}\bar{w}_{31}(1 + x + x^2),$$

где

$$x = \alpha\beta \in \mathbb{R}.$$

Это скалярное произведение не обращается в нуль ни при каком вещественном x , что противоречит ортогональности строк матрицы W .

Итак, хотя бы один из элементов w_{12} и w_{32} должен быть равен нулю. Пусть, например, $w_{12} = 0$. Тогда (см. (1)) $w_{13} = 0$ либо $w_{11} = 0$.

В первом случае имеем $|w_{11}| = 1$, $w_{21} = 0$ и $w_{31} = 0$. В силу (2) последнее равенство возможно лишь при $w_{32} = 0$. Тем самым в данном случае W – диагональная матрица.

Выясним, что можно сказать о диагональных элементах этой матрицы. Положим

$$W = \text{diag}(e^{i\psi_1}, e^{i\psi_2}, e^{i\psi_3}).$$

В качестве A возьмем матрицу третьего порядка, все элементы которой равны единице. Условия симметрии и ганкелевости матрицы $B = W^*AW$ приводят к соотношениям

$$e^{i(\psi_2 - \psi_1)} = e^{i(\psi_1 - \psi_2)}, \quad e^{i(\psi_3 - \psi_1)} = 1 = e^{i(\psi_1 - \psi_3)}.$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \psi_1 + \pi k, & k &\in \mathbb{Z}, \\ \psi_3 &= \psi_1 + 2\pi l, & l &\in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} w_{22} &= \pm w_{11}, & w_{33} &= w_{11}, \\ W &= w_{11} \text{diag}(1, \pm 1, 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Тем самым в данном случае ($w_{12} = 0$, $w_{13} = 0$) утверждение теоремы справедливо. Перейдем теперь к анализу второго возможного варианта: $w_{12} = 0$, $w_{11} = 0$. Здесь мы последовательно находим $|w_{13}| = 1$, $w_{23} = 0$, $w_{33} = 0$, $w_{32} = 0$ (снова в силу (2)), $|w_{31}| = 1$ и $w_{21} = 0$. Полученную матрицу W представим в виде

$$W = \mathcal{P}_3 \mathcal{D}_3,$$

где

$$\mathcal{D}_3 = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \delta_3).$$

Для произвольной ганкелевой 3×3 -матрицы A имеем

$$B = W^*AW = \mathcal{D}_3^*(\mathcal{P}_3 A \mathcal{P}_3) \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_3^* \widehat{A} \mathcal{D}_3.$$

Матрица $\widehat{A}$, получаемая отражением матрицы A относительно ее центра, пробегает вместе с A все множество ганкелевых матриц. Из проведенных выше рассуждений следует, что $\mathcal{D}_3$ должна быть матрицей вида (3), а W есть произведение этой матрицы и перьединичной матрицы порядка 3.

Мы видели, что из начальной посылки $w_{12} = 0$ в обоих вариантах следует, что $w_{32} = 0$. Поэтому изменение этой посылки на $w_{32} = 0$ не приводит к новым матрицам W . Теперь анализ случая $n = 3$ закончен полностью.

3. Редукция порядка. Предположим, что утверждение теоремы доказано для всех нечетных порядков, меньших, чем n ($n > 3$). Чтобы описать матрицы W из $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$, используем метод, примененный выше для $n = 3$. Запишем первую и

последнюю строки матрицы W как

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad (4)$$

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n). \quad (5)$$

Покажем рассуждением от противного, что они должны содержать нулевые элементы.

Пусть A обозначает теперь ганкелеву $n \times n$ -матрицу, единственный ненулевой элемент которой находится в позиции $(1, 1)$ и равен единице. По-прежнему полагаем

$$B = W^* A W.$$

Нетрудно видеть, что

$$B = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & \bar{\alpha}_1 \alpha_2 & \dots & \bar{\alpha}_1 \alpha_n \\ \bar{\alpha}_2 \alpha_1 & |\alpha_2|^2 & \dots & \bar{\alpha}_2 \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\alpha}_n \alpha_1 & \bar{\alpha}_n \alpha_2 & \dots & |\alpha_n|^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

По предположению все элементы этой матрицы отличны от нуля, а из ее симметрии (вытекающей из ганкелевости) следует, что все попарные произведения $\bar{\alpha}_k \alpha_l$ суть вещественные числа. Другими словами, все компоненты строки (4) отличаются друг от друга вещественными множителями. Положим

$$\mu = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

и запишем условия ганкелевости для позиций (k, k) и $(k-1, k+1)$ ($2 \leq k \leq n-1$):

$$|\alpha_2|^2 = \bar{\alpha}_1 \alpha_3, \quad |\alpha_3|^2 = \bar{\alpha}_2 \alpha_4, \quad \dots, \quad |\alpha_{n-1}|^2 = \bar{\alpha}_{n-2} \alpha_n.$$

Отсюда выводим

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \mu, \quad \frac{\alpha_4}{\alpha_3} = \frac{\bar{\alpha}_3}{\bar{\alpha}_2} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \mu,$$

и т.д. Тем самым компоненты строки (4) образуют геометрическую прогрессию с начальным элементом α_1 и знаменателем μ .

Совершенно таким же образом доказывается, что если в строке (5) нет нулей, то ее компоненты составляют геометрическую прогрессию с начальным элементом β_1 и знаменателем

$$\nu = \frac{\beta_2}{\beta_1}.$$

Единственное изменение в рассуждениях касается матрицы A : ее ненулевой элемент, по-прежнему равный единице, находится теперь в позиции (n, n) , а не $(1, 1)$.

Положим

$$x = \mu\nu \in \mathbb{R}.$$

Скалярное произведение строк (4) и (5) равно

$$\alpha_1 \bar{\beta}_1 (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}). \quad (7)$$

Это выражение не обращается в нуль ни при каком вещественном x , что противоречит ортогональности строк матрицы W .

Итак, в строках (4) и (5) должен содержаться хотя бы один нуль. Для определенности предположим, что он находится в строке (4).

Пусть вначале $\alpha_1 \neq 0$. Покажем, что в этом случае все остальные элементы первой строки равны нулю. Предположим противное, и пусть α_k ($k \geq 2$) – ненулевой элемент с наименьшим индексом, а α_l – самый левый нуль. Если $k = 2$, то в матрице (6) элемент $(1, l)$, т.е. $\bar{\alpha}_1 \alpha_l$, равен нулю, тогда как элемент $b_{2, l-1} = \bar{\alpha}_2 \alpha_{l-1}$ отличен от нуля, что противоречит ганкелевому свойству матрицы B . Если же $l = 2$, то отличен от нуля элемент $(1, k)$, равный $\bar{\alpha}_1 \alpha_k$. В то же время равен нулю элемент $b_{2, k-1} = \bar{\alpha}_2 \alpha_{k-1}$ в противоречии с ганкелевостью матрицы (6).

Итак, в рассматриваемом случае α_1 – единственный ненулевой элемент в первой строке унитарной матрицы W . Следовательно, $|w_{11}| = 1$ и все поддиагональные элементы в первом столбце W нулевые. В частности, равен нулю элемент w_{n1} , обозначенный выше через β_1 .

Рассмотрим матрицу, полученную из (6) заменой чисел α одноименными числами β . Эту матрицу мы по-прежнему обозначаем через B . Пусть β_k ($k \geq 2$) – ненулевой элемент с наименьшим индексом. Если $k < n$, то $b_{kk} = |\beta_k|^2 \neq 0$, тогда как элемент $b_{k-1, k+1} = \bar{\beta}_{k-1} \beta_{k+1}$ равен нулю. Таким образом, ненулевой элемент в последней строке матрицы W только один и стоит он в позиции (n, n) . Поэтому $|w_{nn}| = 1$ и все внедиагональные элементы в последнем столбце W нулевые.

Резюмируем проведенный анализ случая $\alpha_1 \neq 0$. Матрица W , соответствующая этому случаю, должна иметь блочно диагональный вид

$$W = w_{11} \oplus W_{n-2} \oplus w_{nn}, \quad (8)$$

где W_{n-2} – унитарная матрица порядка $n - 2$.

Переходим к второму возможному случаю: $\alpha_1 = 0$. Снова обозначим через α_k ($k \geq 2$) ненулевой элемент с наименьшим индексом и вернемся к матрице (6), составленной из чисел α . Если $k < n$, то $b_{kk} = |\alpha_k|^2 \neq 0$, тогда как элемент $b_{k-1, k+1} = \bar{\alpha}_{k-1} \alpha_{k+1}$ равен нулю в противоречии с ганкелевостью матрицы B .

Итак, α_n – единственный ненулевой элемент в первой строке матрицы W . Отсюда выводим:

- а) $|w_{1n}| = 1$;
- б) все элементы, начиная со второго, в последнем столбце матрицы W равны нулю.

Обозначим через β_k самый правый ненулевой элемент строки (5). Предположим, что $k > 1$. В матрице (6), составленной из чисел β , не равны элементы $b_{kk} = |\beta_k|^2$ и $b_{k-1, k+1} = \bar{\beta}_{k-1} \beta_{k+1} = 0$, что противоречит ее ганкелевой природе. Таким образом, ненулевой элемент в последней строке матрицы W только один и стоит он в позиции $(n, 1)$. Поэтому $|w_{n1}| = 1$ и все элементы в первом столбце W , кроме последнего, равны нулю. Сама матрица W , соответствующая данному случаю, может быть описана так: это унитарная матрица W_{n-2} порядка $n - 2$, окаймленная сверху строкой

$$(0 \quad \dots \quad 0 \quad w_{1n}),$$

снизу строкой

$$(w_{n1} \quad 0 \quad \dots \quad 0)$$

и двумя нулевыми столбцами с боков.

Мы провели подробное исследование, начатое предположением, что нулевой элемент, обязательно присутствующий в строках (4) и (5), находится именно в строке (4). Мы припили бы к тем же формам для матрицы W , поменяв эти строки ролями.

Что можно сказать о подматрицах W_{n-2} обеих найденных форм? Ответим на этот вопрос сначала для матрицы (8).

Пусть $A \in \mathcal{H}_n$. Запишем A в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_1 & a_{1n} \\ a_1^t & A_{n-2} & a_{-1}^t \\ a_{n1} & a_{-1} & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь A_{n-2} – центральная главная подматрица порядка $n-2$, а a_1 и a_{-1} – строки, состоящие из $n-2$ компонент.

Записывая матрицу

$$B = W^* A W$$

в аналогичном виде, приходим к равенству

$$B_{n-2} = W_{n-2}^* A_{n-2} W_{n-2}.$$

Поэтому из $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ должно следовать

$$W_{n-2} \in \text{UAut}(\mathcal{H}_{n-2}). \quad (10)$$

К тому же выводу (10) мы придем и для матрицы W , найденной во втором случае ($\alpha_1 = 0$).

4. Вид подматрицы W_{n-2} . Импликация (10) позволяет нам применить к подматрице W_{n-2} индуктивное предположение. Однако оказывается, что с данной матрицей W совместима не каждая из возможных форм этой подматрицы. Так, в случае матрицы (8) W_{n-2} обязана быть диагональной матрицей.

Действительно, предположим, что северо-восточный и юго-западный угловые элементы подматрицы W_{n-2} (иначе говоря, элементы $w_{2,n-1}$ и $w_{n-1,2}$ самой матрицы W) отличны от нуля. В этом случае b_{22} представляет собой линейную форму от элементов подматрицы A_{n-2} , в которую $a_{n-1,n-1}$ входит с ненулевым коэффициентом $|w_{n-1,2}|^2$. В то же время при переходе от матрицы A к B вектор-строка a_1 заменяется на $\bar{w}_{11} a_1 W_{n-2}$. В частности, b_{13} является линейной формой от элементов $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1,n-1}$. Поскольку $a_{n-1,n-1}$ не зависит от этих элементов, ганкелеву матрицу A можно выбрать так, чтобы $b_{22} \neq b_{13}$. Полученная матрица B не будет ганкелевой.

Последовательно применяя это рассуждение к центральным подматрицам W_{n-2} , $W_{n-4}, \dots$, приходим к заключению, что вся матрица W должна быть диагональной.

Пусть теперь W – матрица для случая $\alpha_1 = 0$. Предположим, что крайние диагональные элементы подматрицы W_{n-2} (иначе говоря, элементы $w_{2,2}$ и $w_{n-1,n-1}$ самой матрицы W) отличны от нуля. Снова b_{22} является линейной формой от элементов подматрицы A_{n-2} , в которую с ненулевым коэффициентом $|w_{2,2}|^2$ входит на этот раз элемент $a_{2,2}$. Строка a_1 матрицы A заменяется на $\bar{w}_{n1} a_{-1} W_{n-2}$. В частности, b_{13} есть линейная форма от элементов $a_{n-1,2}, a_{n-1,3}, \dots, a_{n-1,n-1}$. Ничто не мешает выбрать ганкелеву матрицу A так, чтобы $b_{22} \neq b_{13}$ в противоречии с ганкелевостью матрицы B .

Последовательно применяя это рассуждение к центральным подматрицам $W_{n-2}, W_{n-4}, \dots$, приходим к выводу, что матрица W для этого случая есть произведение перьединичной матрицы $\mathcal{P}_n$ и некоторой диагональной матрицы.

Нам осталось выяснить, каковы диагональные элементы матрицы (8) и элементы диагонали $(1, n), (2, n-1), \dots, (n, 1)$ в матрице W , соответствующей случаю $\alpha_1 = 0$.

Пусть вначале

$$W = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n), \quad (11)$$

где

$$\delta_k = e^{i\psi_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Возьмем в качестве A матрицу порядка n , все элементы которой равны единице. Тогда

$$b_{kl} = e^{i(\psi_l - \psi_k)}, \quad 1 \leq k, l \leq n.$$

Если сумма $k + l$ есть четное число $2m$, то из ганкелевого свойства матрицы B вытекает $b_{kl} = b_{mm} = 1$, откуда выводим

$$\psi_l = \psi_k + 2\pi j, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

Таким образом, для чисел k и l одинаковой четности имеем

$$w_{kk} = w_{ll}.$$

Если же k и l имеют разную четность, то можно лишь утверждать, что $b_{kl} = b_{lk}$, что приводит к более слабому по сравнению с (12) равенству

$$\psi_l = \psi_k + \pi j, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

В этом случае

$$w_{kk} = \pm w_{ll}.$$

Итак, диагональная матрица W может быть либо скалярной матрицей $w_{11}I_n$, либо матрицей вида $w_{11}\mathcal{D}_n$, где $\mathcal{D}_n$ – матрица, указанная в формулировке теоремы.

Для описания матрицы W , соответствующей случаю $\alpha_1 = 0$, следует применить тот же прием, что и в случае $n = 3$ (см. раздел 2). В результате приходим к выводу, что такая матрица должна быть произведением $\mathcal{P}_n$ и какой-либо из только что охарактеризованных диагональных матриц. Этим доказательство теоремы заканчивается.

5. Случай четного n . Покажем, что при $n = 2$ группа $\text{UAut}(\mathcal{H}_n)$ значительно шире, чем множество, описываемое теоремой.

Для включения $W \in \text{UAut}(\mathcal{H}_2)$ необходимо, чтобы подобие с трансформирующей матрицей W сохраняло ганкелеву природу матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Положим

$$B_i = W^* A_i W, \quad i = 1, 2.$$

Матрица B_1 будет ганкелевой, если $b_{12}^{(1)} = b_{21}^{(1)}$, т.е. если

$$w_{11}\bar{w}_{12} = w_{12}\bar{w}_{11}. \quad (15)$$

Записывая аналогичное условие для матрицы B_2 , получаем

$$w_{21}\bar{w}_{22} = w_{22}\bar{w}_{21}. \quad (16)$$

Таким образом, попарные произведения $w_{12}\bar{w}_{11}$ и $w_{22}\bar{w}_{21}$ суть вещественные числа. Предположим вначале, что ни один из четырех элементов матрицы W не равен нулю. Тогда из (15) и (16) вытекают равенства

$$w_{12} = \alpha w_{11}, \quad w_{22} = \beta w_{21}, \quad (17)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Подставляя эти равенства в соотношения ортонормированности столбцов матрицы W , находим

$$|w_{11}|^2 + |w_{21}|^2 = 1, \quad (18)$$

$$\alpha^2 |w_{11}|^2 + \beta^2 |w_{21}|^2 = 1, \quad (19)$$

$$\alpha |w_{11}|^2 + \beta |w_{21}|^2 = 0. \quad (20)$$

Исключая из системы (18)–(20) (ненулевые) величины $|w_{11}|^2$ и $|w_{21}|^2$, приходим к соотношению

$$(\alpha + \beta)\beta = \beta^2 - 1,$$

или

$$\alpha\beta = -1.$$

Умножая (20) на α , имеем

$$\alpha^2 |w_{11}|^2 - |w_{21}|^2 = 0.$$

Прибавляя это равенство к (18), получаем

$$|w_{11}|^2 = \frac{1}{1 + \alpha^2},$$

откуда следует, что

$$|w_{21}|^2 = \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}.$$

Используем теперь то обстоятельство, что матрица $W^* \mathcal{P}_2 W$ ганкелева. Это приводит к соотношению

$$\bar{w}_{11}w_{22} + \bar{w}_{21}w_{12} = \bar{w}_{12}w_{21} + \bar{w}_{22}w_{11}.$$

С учетом формул (17) оно эквивалентно равенству

$$(\beta - \alpha)\bar{w}_{11}w_{21} = (\beta - \alpha)\bar{w}_{21}w_{11}.$$

Случай $\alpha = \beta$ невозможен: он означал бы, что столбцы унитарной матрицы W коллинеарны. Поэтому

$$\bar{w}_{11}w_{21} = \bar{w}_{21}w_{11},$$

т.е. числа w_{11} и w_{21} имеют один и тот же аргумент ϕ по модулю π . Записывая W в виде

$$W = e^{i\phi} R,$$

находим

$$\begin{aligned} r_{11} &= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}, & r_{21} &= \pm \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}, \\ r_{12} &= \alpha r_{11} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}, & r_{22} &= -\frac{1}{\alpha} r_{21} = \mp \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \end{aligned}$$

Поскольку α может быть произвольным вещественным числом, отличным от нуля, эти формулы описывают все множество вещественных ортогональных 2×2 -матриц с ненулевыми элементами.

Пусть теперь в матрице W присутствуют нулевые элементы. Если $w_{12} = 0$, то и $w_{21} = 0$, а w_{11} и w_{22} — числа, по модулю равные единице. Полагая

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и записывая условие ганкелевости для матрицы

$$B = W^* A W,$$

имеем

$$w_{11} \bar{w}_{22} = w_{22} \bar{w}_{11}.$$

Таким образом,

$$w_{22} = \pm w_{11},$$

откуда

$$W = w_{11} I_2$$

либо

$$W = w_{11} \operatorname{diag}(1, -1).$$

Разбирая аналогичным образом случай $w_{12} \neq 0$, приходим к одной из матриц

$$W = w_{12} \mathcal{P}_2,$$

$$W = -w_{12} \mathcal{P}_2 \operatorname{diag}(1, -1).$$

Резюмируя, можем сказать, что при $n = 2$ множество $\operatorname{UAut}(\mathcal{H}_n)$ есть прямое произведение унитарной группы $\mathbf{U}_1$ и вещественной ортогональной группы $\mathbf{O}_2$.

Еще одна трудность, связанная с анализом группы $\operatorname{UAut}(\mathcal{H}_n)$ в случае четного n , состоит в значительно более сложном обосновании индуктивного перехода. Так, рассуждение из раздела 3, доказывающее присутствие нулевых элементов в крайних строках матрицы W , не проходит при четном n , поскольку скалярное произведение (7) обращается в нуль при $x = -1$. Как уже было сказано, описанию группы $\operatorname{UAut}(\mathcal{H}_n)$ для четных n будет посвящена отдельная публикация.

Настоящая работа является продолжением статьи [1], в которой аналогичная задача об автоморфизмах была решена для пространства теплицевых матриц. Книжки [2], [3] являются наиболее полными справочниками (на русском языке) о свойствах теплицевых и ганкелевых матриц.

В заключение хочу поблагодарить В. Н. Чугунова и А. К. Абдикалыкова за внимательное чтение предварительной версии этой статьи, выявившее в ней ряд серьезных недочетов. Найденные ошибки исправлены.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Д. Икрамов, “Унитарные автоморфизмы пространства теплицевых матриц”, *Докл. РАН*, **456**:4 (2014), 389–391.
- [2] И. С. Иохвидов, *Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. Алгебраическая теория*, Наука, М., 1974.
- [3] В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами*, Наука, М., 1987.

Х. Д. Икрамов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило

23.12.2013