Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Шамканов, Циклические выводы для логики доказуемости Гёделя–Лёба, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 4, 609–622

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10442>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:12:21

Циклические выводы для логики доказуемости Гёделя–Лёба

Д. С. Шамканов

В статье рассматривается исчисление секвенций для логики доказуемости GL, доказуемость в котором основана на понятии циклического вывода. В отличие от обычных выводов, циклический вывод можно представлять себе не как дерево, но как граф, содержащий циклы. Используя данное понятие, мы даем синтаксическое доказательство интерполяционного свойства Линдона для логики GL.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm10442

1. Введение. Логика Гёделя–Лёба GL является пропозициональной модальной логикой, дающей описание свойств предиката арифметической доказуемости, которые могут быть установлены средствами арифметики Пеано. Данная модальная логика привлекла большой интерес исследователей, и значительные их усилия были направлены на поиски удобной, допускающей устранение сечения секвенциальной формулировки логики GL (см. [1]–[3]). В настоящей работе мы вводим исчисление секвенций для логики GL, основанное на понятии циклического вывода. Циклический вывод может быть получен из обычного формального вывода из гипотез (конечного дерева секвенций, построенного по правилам заданного исчисления) путем последовательного применения следующей операции: отождествляем некоторый лист, помеченный секвенцией, не являющейся аксиомой, с внутренней вершиной вывода, помеченной той же секвенцией, с помощью так называемой обратной ссылки (см. п. 3). Оказывается, что циклические выводы представляют собой интересную альтернативу традиционным выводам для логик, содержащих операторы неподвижных точек [4]. Поскольку GL можно рассматривать как фрагмент модального μ -исчисления (см. [5]–[7]), представляется естественным, что должны быть приложения циклических выводов к исследованиям логики GL. Данная работа посвящена одному из подобных приложений.

Несмотря на то что логика Гёделя–Лёба обладает интерполяционным свойством Линдона [8], синтаксическое доказательство данного факта, по-видимому, не было известно. Не ясно, как интерполяционное свойство Линдона может быть получено на основе ранее введенных секвенциальных формулировок логики GL [1]–[3] с помощью стандартных теоретико-доказательственных аргументов. Это связано с тем,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №11-01-00281-а, 11-01-00947-а, 12-01-00888-а) и программы “Ведущие научные школы” (грант №НШ-5593.2012.1).

что данные системы содержат правила вывода, в которых происходит изменение полярности при переходе от главной формулы правила, стоящей в заключении, к ее непосредственным предкам, стоящим в посылках. В данной статье приводится доказательство свойства Линдона для логики GL, опирающееся на понятие циклического вывода.

В п. 2 сформулирован вариант стандартного исчисления секвенций для логики GL. Далее, вводится исчисление, допускающее циклические выводы, и устанавливается его эквивалентность со стандартным исчислением. В заключительном пункте проводится синтаксическое доказательство интерполяционного свойства Линдона для логики GL.

2. Основные понятия. Будем работать с языком логики GL в следующем упрощенном варианте: *формулы*, обозначаемые A, B, C , строятся из $\top, \perp, \wedge, \vee, \Box, \Diamond$, пропозициональных переменных P_i и их отрицаний $\bar{P}_i$.

Отрицание $\bar{A}$ формулы A определим по правилам де Моргана:

$$\begin{aligned} \overline{(P)} &:= \bar{P}, & \overline{\bar{P}} &:= P, \\ \overline{\top} &:= \perp, & \overline{\perp} &:= \top, \\ \overline{(A \wedge B)} &:= (\bar{A} \vee \bar{B}), & \overline{(A \vee B)} &:= (\bar{A} \wedge \bar{B}), \\ \overline{\Box A} &:= \Diamond \bar{A}, & \overline{\Diamond A} &:= \Box \bar{A}. \end{aligned}$$

Также используем обозначения:

$$A \rightarrow B := \bar{A} \vee B, \quad A \leftrightarrow B := (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).$$

Исчисление гильбертовского типа, задающее логику GL, выглядит следующим образом:

Аксиомы:

- (i) Тавтологии классической логики высказываний;
- (ii) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$;
- (iii) $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$.

Правила вывода: modus ponens, $A/\Box A$.

Напомним читателю вариант традиционной секвенциальной формулировки логики GL. *Секвенции*, обозначаемые Γ, Δ, Σ , представляют собой конечные множества формул. В записи секвенций мы будем опускать фигурные скобки, а запись Γ, Δ означает объединение мультимножеств.

Для секвенции $\Gamma = A_1, \dots, A_n$ положим

$$\Diamond \Gamma := \Diamond A_1, \dots, \Diamond A_n \quad \text{и} \quad \Gamma^\# := \begin{cases} \perp, & \text{если } n = 0, \\ A_1 \vee \dots \vee A_n & \text{иначе.} \end{cases}$$

Система GL_{Seq} , являющаяся секвенциальной формулировкой логики GL, определяется следующими аксиомами и правилами вывода:

$$\begin{aligned} &\Gamma, A, \bar{A}, \quad \Gamma, \top, \\ &\wedge \frac{\Gamma, A \quad \Gamma, B}{\Gamma, A \wedge B}, \quad \vee \frac{\Gamma, A, B}{\Gamma, A \wedge B}, \\ &\Box_{GL} \frac{\Gamma, \Diamond \Gamma, \Diamond \bar{A}, A}{\Diamond \Gamma, \Box A, \Delta}. \end{aligned}$$

Отметим, что более традиционные исчисления секвенций для логики Гёделя–Лёба GLSC и GLS, введенные Самбином и Валентини [9], [10], и $\mathcal{G}^1$, введенное Лейвантом [11], используют двусторонние секвенции $\Gamma \Rightarrow \Delta$, в которых Γ и Δ являются множествами. Для удобства работы мы используем односторонние секвенции, основанные на мультимножествах. Кроме того, мы ограничились формулами с тесными отрицаниями, как это принято в исчислении Тейта [12].

Синтаксическое доказательство устранимости правила сечения в системе GLS было дано Валентини [13]. Аналогичный результат для варианта GLS, основанного на мультимножествах, был получен Горэ и Раманаяке [3]. Допустимость правила сечения в системе GL_{Seq} непосредственно следует из работы [3] и допустимости правил ослабления и сокращения в GL_{Seq} . Таким образом, мы получаем следующие два утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Обобщенное правило Лёба и правило сечения*

$$\text{Löb} \frac{\Gamma, \Diamond \Gamma, \Diamond \bar{A}, A}{\Gamma, \Diamond \Gamma, A}, \quad \text{cut} \frac{\Gamma, A \quad \Gamma, \bar{A}}{\Gamma}$$

допустимы в GL_{Seq} .

Заметим, что допустимость правила Löb следует из допустимости правил cut и $\Box_{GL}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. *Имеет место эквивалентность*

$$GL_{Seq} \vdash \Gamma \iff GL \vdash \Gamma^\sharp.$$

3. Нефундированные и циклические выводы. *Деревом секвенций* в данном исчислении секвенций назовем произвольное (возможно бесконечное) дерево, в вершинах которого стоят секвенции, а переход от предков к потомкам производится в соответствии с правилами вывода. *Формальным выводом из гипотез* в данном исчислении называется конечное дерево секвенций. В настоящем пункте мы будем работать с дедуктивными системами, допускающими нефундированные деревья секвенций в качестве выводов. Подобные (возможно нефундированные) деревья секвенций мы также будем называть *формальными ∞ -выводами*. *Формальным (∞ -)доказательством* называется формальный (∞ -)вывод, все листья которого помечены аксиомами. В дальнейшем, говоря о выводах, мы часто будем опускать слово “формальный”.

Дерево секвенций называется *регулярным*, если оно содержит лишь конечное число различных поддеревьев. Эквивалентным образом всякое регулярное дерево можно рассматривать как развертку (дерево путей) некоторого конечного ориентированного графа, вершины которого размечены секвенциями. *Регулярным ∞ -выводом* назовем ∞ -вывод, дерево секвенций которого является регулярным.

Циклическим выводом назовем пару (κ, d) , в которой κ представляет собой обычный формальный вывод, а d является функцией со следующими свойствами: d определена на некотором подмножестве листьев вывода κ ; образ $d(x)$ листа x лежит на пути между корнем κ и листом x и не совпадает с x ; x и $d(x)$ помечены одинаковыми секвенциями. Если на листе x функция d определена, то мы будем говорить, что вершины x и $d(x)$ соединены *обратной ссылкой*. *Формальным циклическим*

доказательством назовем такой циклический вывод, каждый лист которого либо соединен с некоторой вершиной обратной ссылкой, либо помечен аксиомой.

Напомним, что исчисление секвенций для стандартной модальной логики $K4$, обозначаемое $K4_{Seq}$, получается из исчисления GL_{Seq} заменой правила $\Box_{GL}$ на следующее модальное правило:

$$\Box \frac{\Gamma, \Diamond \Gamma, A}{\Diamond \Gamma, \Box A, \Delta}.$$

Системы GL_{circ} и GL_{∞} являются расширениями $K4_{Seq}$, в которых множества доказуемых секвенций определяются формальными циклическими доказательствами и произвольными формальными ∞ -доказательствами соответственно. В качестве примера приведем следующее формальное циклическое доказательство аксиомы Лёба $\Box(\Box P \rightarrow P) \rightarrow \Box P$:

$$\begin{array}{c} \Box \frac{\Box P \wedge \bar{P}, \Diamond(\Box P \wedge \bar{P}), P}{\Box P, \Diamond(\Box P \wedge \bar{P}), P} \quad \bar{P}, \Diamond(\Box P \wedge \bar{P}), P \\ \wedge \frac{\Box P \wedge \bar{P}, \Diamond(\Box P \wedge \bar{P}), P}{\Box P \wedge \bar{P}, \Diamond(\Box P \wedge \bar{P}), P} \\ \Box \frac{\Box P \wedge \bar{P}, \Diamond(\Box P \wedge \bar{P}), P}{\Diamond(\Box P \wedge \bar{P}), \Box P} \\ \vee \frac{\Diamond(\Box P \wedge \bar{P}), \Box P}{\Diamond(\Box P \wedge \bar{P}) \vee \Box P} \end{array}$$

Подчеркнем, что понятие циклического вывода задает то же отношение выводимости, что и понятие регулярного ∞ -вывода. Очевидно, что каждый циклический вывод может быть развернут в регулярный ∞ -вывод. Обратное тоже верно:

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Каждый регулярный ∞ -вывод может быть получен как развертка циклического вывода.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразуем регулярный ∞ -вывод π в циклический вывод следующим образом. Напомним, что каждая вершина b дерева π задает поддереву π_b , корнем которого она является. Через k обозначим количество различных поддеревьев в дереве π . Рассмотрим произвольную ветвь $a_0, a_1, \dots, a_k$ в π длины $k + 1$. Данная ветвь порождает последовательность поддеревьев $\pi_{a_0}, \pi_{a_1}, \pi_{a_2}$ и т.д. Поскольку π содержит k различных поддеревьев, то данная ветвь содержит пару различных вершин a и b , задающих одинаковые деревья π_a и π_b . Считая, что вершина b дальше отстоит от корня дерева π , нежели вершина a , оборвем рассмотренную ветвь на вершине b и соединим b , ставшую листом, обратной ссылкой с a . Действуя подобным образом для всех оставшихся ветвей длины $k + 1$, мы свернем регулярный ∞ -вывод π в циклический вывод. Детальное рассмотрение подобного преобразования для случая более сложной системы см. в главе 6 работы [14].

Поскольку все рассматриваемые нами правила вывода имеют не более двух посылок, мы можем представлять себе всякое ∞ -доказательство как раскраску множества вершин полного бесконечного бинарного дерева, которая ставит в соответствие каждой вершине данного дерева либо секвенцию, либо пустой символ $*$, указывающий, что этот узел уже не принадлежит доказательству.

Поясним какого рода преобразования ∞ -доказательств мы будем активно использовать в дальнейшем. Обозначим через S множество секвенций, расширенное дополнительным элементом $*$, а через C – множество всех раскрасок полного бесконечного бинарного дерева. Пусть даны функции $f_1: C \rightarrow C$, $f_2: C \rightarrow C$ и $g: S \rightarrow S$.

Определим преобразование раскрасок $h: C \rightarrow C$ следующим образом. Для всякой раскраски c , имеющей вид

где s – элемент множества S , которым помечен корень, а c_1 и c_2 – раскраски непосредственных поддеревьев, определим $h(c)$ с помощью рекуррентного соотношения как

Очевидно, что данное соотношение определяет функцию h однозначно. Более формально, напомним, что множество C является полным и ограниченным метрическим пространством относительно метрики

$$d(u, v) := \begin{cases} 0 & \text{если } u = v, \\ 2^{-\delta(u, v)} & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\delta(u, v)$ означает расстояние от корня бинарного дерева до ближайшей к корню вершины a , в которой раскраски u и v отличаются. Рассмотрим пространство функций из C в C с метрикой равномерной сходимости и непрерывное сжимающее отображение F на данном пространстве такое, что раскраска $F(u)(c)$ имеет вид

Заметим, что функция h является единственной неподвижной точкой сжимающего отображения F . Данный способ определения функции является частным случаем определения по так называемой корекурсии. Более детальную информацию о том, что такое корекурсия, см. в [14], [15].

В дальнейшем мы будем использовать преобразования раскрасок, которые сохраняют локальное свойство раскраски быть построенной по правилам вывода. Таким образом, при подобного рода преобразованиях ∞ -доказательства будут переходить в ∞ -доказательства.

Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству следующего результата.

ТЕОРЕМА 3.2. *Имеет место эквивалентность*

$$\text{GL}_{\text{Seq}} \vdash \Gamma \iff \text{GL}_{\infty} \vdash \Gamma \iff \text{GL}_{\text{circ}} \vdash \Gamma.$$

ЛЕММА 3.3. *Имеет место импликация*

$$\text{GL}_{\text{Seq}} \vdash \Gamma \implies \text{GL}_{\infty} \vdash \Gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что π является формальным доказательством секвенции Γ в GL_{Seq} . Определим формальное ∞ -доказательство $h(\pi)$ секвенции Γ в GL_{∞} , двигаясь по доказательству π от заключений к посылкам и заменяя каждое применение правила $\Box_{\text{GL}}$ на применение $\Box$. Более формально, функция h отображает формальное доказательство, состоящее из единственной аксиомы, в то же самое доказательство и коммутирует с применением правил введения $\wedge$ и $\vee$:

$$\wedge \frac{\begin{array}{c} \tau_1 \\ \vdots \\ \Delta, A \end{array} \quad \begin{array}{c} \tau_2 \\ \vdots \\ \Delta, B \end{array}}{\Delta, A \wedge B} \xrightarrow{h} \wedge \frac{\begin{array}{c} h(\tau_1) \\ \vdots \\ \Delta, A \end{array} \quad \begin{array}{c} h(\tau_2) \\ \vdots \\ \Delta, B \end{array}}{\Delta, A \wedge B}$$

и

$$\vee \frac{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \Delta, A, B \end{array}}{\Delta, A \vee B} \xrightarrow{h} \vee \frac{\begin{array}{c} h(\tau) \\ \vdots \\ \Delta, A, B \end{array}}{\Delta, A \vee B}$$

В случае применения модального правила функция h действует следующим образом:

$$\Box_{\text{GL}} \frac{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \Delta, \Diamond\Delta, \Diamond\bar{A}, A \end{array}}{\Diamond\Delta, \Box A, \Sigma} \xrightarrow{h} \Box \frac{\begin{array}{c} h(f(\tau)) \\ \vdots \\ \Delta, \Diamond\Delta, A \end{array}}{\Diamond\Delta, \Box A, \Sigma}$$

здесь $f(\tau)$ означает формальное доказательство $\Delta, \Diamond\Delta, A$ в GL_{Seq} , существующее в силу допустимости обобщенного правила Лёба (утверждение 2.1). Следовательно, двигаясь по π от заключений к посылкам, мы определили (возможно бесконечное) дерево секвенций $h(\pi)$, построенное с помощью правил $\wedge$, $\vee$ и $\Box$, в листьях которого стоят аксиомы. Таким образом, $h(\pi)$ является формальным ∞ -доказательством Γ в GL_{∞} .

Будем говорить, что правило вывода *допустимо* в GL_{∞} , если для каждого примера данного правила его заключение является формально доказуемым, как только все его посылки являются формально доказуемыми.

ЛЕММА 3.4. *Следующие правила:*

$$\frac{\Gamma, A \wedge B}{\Gamma, A}, \quad \frac{\Gamma, A \wedge B}{\Gamma, B}, \quad \frac{\Gamma, A \vee B}{\Gamma, A, B}, \quad \frac{\Gamma, \perp}{\Gamma}$$

допустимы в GL_{∞} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение получается применением стандартных преобразований выводов.

ЛЕММА 3.5. *Правила ослабления и сокращения*

$$\text{wk} \frac{\Gamma}{\Gamma, A}, \quad \text{ctr} \frac{\Gamma, A, A}{\Gamma, A}$$

допустимы в GL_{∞} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение правила ослабления коммутует с применением правил введения $\wedge$ и $\vee$. Таким образом, допустимость правила ослабления непосредственно следует из вида аксиом и вида правила $\square$.

Индукцией по построению формулы A докажем допустимость правила сокращения.

В случае, когда A имеет вид $P, \bar{P}, \top, \perp, B \wedge C, B \vee C$ и $\square B$, доказательство стандартное: надо использовать предположение индукции, лемму 3.4 и определение правила $\square$.

Случай $A = \Diamond B$. По предположению индукции, правило сокращения для формулы B допустимо. Пусть π является ∞ -доказательством секвенции $\Gamma \cup \{\Diamond B, \Diamond B\}$ в GL_∞ . Аналогично доказательству леммы 3.3 определим ∞ -доказательство $h(\pi)$ секвенции $\Gamma \cup \{\Diamond B\}$ в GL_∞ , двигаясь по π снизу вверх (от заключений к посылкам). Функция h отображает формальное ∞ -доказательство, состоящее из единственной аксиомы $\Gamma \cup \{\Diamond B, \Diamond B\}$, в ∞ -доказательство, состоящее из единственной аксиомы $\Gamma \cup \{\Diamond B\}$, и коммутует с применением правил введения $\wedge$ и $\vee$:

$$\wedge \frac{\begin{array}{c} \tau_1 \\ \vdots \\ \Diamond B, \Diamond B, \Delta, A \end{array} \quad \begin{array}{c} \tau_2 \\ \vdots \\ \Diamond B, \Diamond B, \Delta, C \end{array}}{\Diamond B, \Diamond B, \Delta, A \wedge C} \xrightarrow{h} \wedge \frac{\begin{array}{c} h(\tau_1) \\ \vdots \\ \Diamond B, \Delta, A \end{array} \quad \begin{array}{c} h(\tau_2) \\ \vdots \\ \Diamond B, \Delta, C \end{array}}{\Diamond B, \Delta, A \wedge C}$$

и

$$\vee \frac{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \Diamond B, \Diamond B, \Delta, A, C \end{array}}{\Diamond B, \Diamond B, \Delta, A \vee C} \xrightarrow{h} \vee \frac{\begin{array}{c} h(\tau) \\ \vdots \\ \Diamond B, \Delta, A, C \end{array}}{\Diamond B, \Delta, A \vee C}$$

Определим функцию h в случае применения модального правила:

$$\square \frac{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \Delta, \Diamond \Delta, C \end{array}}{\Diamond \Delta, \square C, \Sigma}$$

Если $\Diamond B \in \Sigma$, то применение функции h удаляет копию $\Diamond B$ из заключительной секвенции данного формального ∞ -доказательства. В противном случае $\Delta = \Delta' \cup \{B, B\}$ и функция h преобразует данное ∞ -доказательство следующим образом:

$$\square \frac{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ B, B, \Delta', \Diamond B, \Diamond B, \Diamond \Delta', C \end{array}}{\Diamond B, \Diamond B, \Diamond \Delta', \square C, \Sigma} \xrightarrow{h} \square \frac{\begin{array}{c} h(f(\tau)) \\ \vdots \\ B, \Delta', \Diamond B, \Diamond \Delta', C \end{array}}{\Diamond B, \Diamond \Delta', \square C, \Sigma}$$

Здесь $f(\tau)$ означает формальное ∞ -доказательство, полученное из τ сокращением одной копии B в заключительной секвенции τ . Данное преобразование является допустимым по предположению индукции. Построенное дерево секвенций $h(\pi)$ является формальным ∞ -доказательством секвенции $\Gamma \cup \{\Diamond B\}$ в GL_∞ .

ЛЕММА 3.6. *Имеет место импликация*

$$\text{GL}_\infty \vdash \Gamma \implies \text{GL}_{\text{circ.}} \vdash \Gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для секвенции Δ обозначим соответствующее ей множество формул через Δ^S . Имеем $\Delta = \Delta^S, \Delta'$.

Пусть π – ∞ -вывод секвенции Γ в GL_∞ . Двигаясь по ∞ -выводу π снизу вверх (от заключений к посылкам), определим ∞ -вывод $h(\pi)$ секвенции Γ , содержащий лишь конечное количество различных секвенций. Функция h отображает формальное доказательство, состоящее из единственной аксиомы, в то же самое доказательство и коммутрует с применением правил введения $\wedge$ и $\vee$. Определим функцию h в случае применения модального правила:

$$\square \frac{\begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \Delta, \Diamond \Delta, A \end{array}}{\Diamond \Delta, \Box A, \Sigma} \xrightarrow{h} \square \frac{\begin{array}{c} h(f(\tau)) \\ \vdots \\ \Delta^S, \Diamond \Delta^S, A \end{array}}{\Diamond \Delta^S, \Box A, \Sigma, \Diamond \Delta'}$$

здесь $f(\tau)$ означает формальное ∞ -доказательство секвенции $\Delta^S, \Diamond \Delta^S, A$ в GL_∞ , существующее в силу допустимости правила сокращения.

Заметим, что все формулы, входящие в $h(\pi)$, являются подформулами формул из Γ . Поскольку $h(\pi)$ содержит лишь конечное число различных секвенций, являющихся посылками правила $\square$ в $h(\pi)$, и поскольку во всех остальных правилах заключения имеют больший размер, чем посылки, вывод $h(\pi)$ содержит лишь конечное число различных секвенций. Из любого формального ∞ -доказательства, содержащего конечное число различных секвенций, может быть непосредственно получено регулярное формальное ∞ -доказательство. Таким образом, существование формального циклического доказательства секвенции Γ следует из утверждения 3.1.

Определим множество гипотез циклического вывода $\pi = (\kappa, d)$ как множество листьев вывода κ , не помеченных аксиомами и не соединенных обратными ссылками из d . Назовем гипотезу *модализированной*, если на пути от данного листа до корня встречается применение правила $\square$. Определим $BH(\pi)$ как множество модализированных гипотез вывода π и $H(\pi)$ – как множество всех остальных гипотез. Для подвывода (поддерева) τ вывода κ определим функцию обратных ссылок d_τ как множество всех ссылок из d , образы которых лежат в τ .

Пусть $\Box A$ означает формулу $A \wedge \Box A$.

ЛЕММА 3.7. *Имеет место импликация*

$$\text{GL}_{\text{circ}} \vdash \Gamma \implies \text{GL}_{\text{Seq}} \vdash \Gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi = (\kappa, d)$ – циклический вывод секвенции Γ . Докажем, что

$$\text{GL} \vdash \bigwedge \{ \Box \Delta_a^\# : a \in H(\pi) \} \wedge \bigwedge \{ \Box \Delta_a^\# : a \in BH(\pi) \} \rightarrow \Gamma^\#,$$

где Δ_a означает секвенцию, стоящую в a . Доказательство проведем индукцией по построению вывода κ .

Случай, когда κ состоит из единственной секвенции, очевиден. Теперь рассмотрим последнее применение правила вывода в κ . Имеется три варианта:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \tau_1 \\ \vdots \\ \Delta, A \end{array} & \begin{array}{c} \tau_2 \\ \vdots \\ \Delta, B \end{array} & \begin{array}{c} \tau \\ \vdots \\ \Delta, A, B \end{array} \\ \wedge \frac{\Delta, A \quad \Delta, B}{\Delta, A \wedge B} & \vee \frac{\Delta, A, B}{\Delta, A \vee B} & \square \frac{\Delta, \Diamond \Delta, A}{\Diamond \Delta, \Box A, \Sigma} \end{array}$$

Предположим, что корень κ не соединен обратной ссылкой ни с каким листом данного вывода. Отметим, что

$$\begin{aligned} \text{GL} \vdash (\Delta, A)^\# \wedge (\Delta, B)^\# \rightarrow (\Delta, A \wedge B)^\#, \quad \text{GL} \vdash (\Delta, A, B)^\# \rightarrow (\Delta, A \vee B)^\#, \\ \text{GL} \vdash \Box(\Delta, \Diamond \Delta, A)^\# \rightarrow (\Diamond \Delta, \Box A, \Sigma)^\#. \end{aligned}$$

Следовательно, в данном случае утверждение непосредственно следует из предположения индукции для (τ, d_τ) (или для (τ_1, d_{τ_1}) и (τ_2, d_{τ_2})).

Осталось рассмотреть случай, когда корень κ соединен обратной ссылкой с некоторым листом. Напомним, что между двумя вершинами, соединенными обратной ссылкой, всегда встречается применение правила $\Box$. Используя предположение индукции и рассуждения для предыдущих случаев, получим

$$\text{GL} \vdash \bigwedge \{\Box \Delta_a^\# : a \in H(\pi)\} \wedge \bigwedge \{\Box \Delta_a^\# : a \in BH(\pi)\} \wedge \Box \Gamma^\# \rightarrow \Gamma^\#.$$

Поскольку в GL обобщенное правило Лёба является допустимым, формулу $\Box \Gamma^\#$ можно удалить из посылки импликации. Имеем

$$\text{GL} \vdash \bigwedge \{\Box \Delta_a^\# : a \in H(\pi)\} \wedge \bigwedge \{\Box \Delta_a^\# : a \in BH(\pi)\} \rightarrow \Gamma^\#.$$

Если π является формальным циклическим доказательством Γ , то $\text{GL} \vdash \Gamma^\#$. Применяя утверждение 2.2, получаем $\text{GL}_{\text{Seq}} \vdash \Gamma$.

4. Синтаксическое доказательство интерполяционного свойства Линдона. Интерполяционное свойство Линдона для логики Гёделя–Лёба было установлено в [8] с помощью семантики Крипке. В этом пункте мы представляем теоретико-доказательственное рассуждение, приводящее к тому же результату. В действительности мы устанавливаем немного усиленный вариант данного свойства.

Переменные P_i и их отрицания $\bar{P}_i$ будем называть *литералами*. Множество литералов L , имеющих вхождение в формулу A вне области действия модальных операторов, обозначим символом $u(A)$. Введем новые символы вида P_i° и $\bar{P}_i^\circ$ и назовем их *помеченными литералами*. Символом $v(A)$ обозначим множество помеченных литералов L° , для которых существует вхождение L в A в области действия модального оператора. Положим $w(A) = u(A) \cup v(A)$.

ТЕОРЕМА 4.1 (Свойство Линдона). *Если $\text{GL} \vdash A \rightarrow B$, то существует формула C , называемая интерполянтом $A \rightarrow B$, такая, что $w(C) \subset w(A) \cap w(B)$ и*

$$\text{GL} \vdash A \rightarrow C, \quad \text{GL} \vdash C \rightarrow B.$$

Выражение вида $\Gamma_1 \mid \Gamma_2$ назовем *расщеплением* секвенции Γ_1, Γ_2 . Определим *интерполянт расщепленной секвенции* $\Gamma_1 \mid \Gamma_2$ как интерполянт формулы $(\overline{\Gamma_1^\#}) \rightarrow \Gamma_2^\#$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно построить интерполянт всякого расщепления доказуемой секвенции.

Общепринятый теоретико-доказательственный метод построения интерполянта для расщепления доказуемой секвенции основан на следующих наблюдениях:

- 1) дано применение правила вывода в некотором исчислении без правила сечения, всякое расщепление секвенции, стоящей в заключении, порождает расщепления посылок таким образом, что предки формул, стоящих в правой

(левой) части заключения, будут находиться в правых (левых) частях посылок;

- 2) интерполянт для расщепления секвенции, стоящей в заключении, явным образом определяется с помощью интерполянтов расщепленных секвенций, стоящих в посылках.

Данные наблюдения, примененные к GL_{circ} , можно суммировать с помощью следующего исчисления расщепленных секвенций (в скобках указан способ построения интерполянта):

$$\begin{aligned}
 & (\top) \Gamma_1 \mid \top, \Gamma_2, \quad (\perp) \Gamma_1, \top \mid \Gamma_2, \\
 & (\perp) \Gamma_1, A, \bar{A} \mid \Gamma_2, \quad (\bar{A}) \Gamma_1, A \mid \bar{A}, \Gamma_2, \quad (\top) \Gamma_1 \mid A, \bar{A}, \Gamma_2, \\
 & \wedge_l \frac{(C) \Gamma_1, A \mid \Gamma_2 \quad (D) \Gamma_1, B \mid \Gamma_2}{(C \vee D) \Gamma_1, A \wedge B \mid \Gamma_2}, \quad \vee_l \frac{(C) \Gamma_1, A, B \mid \Gamma_2}{(C) \Gamma_1, A \vee B \mid \Gamma_2}, \\
 & \wedge_r \frac{(C) \Gamma_1 \mid \Gamma_2, A \quad (D) \Gamma_1 \mid \Gamma_2, B}{(C \wedge D) \Gamma_1 \mid \Gamma_2, A \wedge B}, \quad \vee_r \frac{(C) \Gamma_1 \mid \Gamma_2, A, B}{(C) \Gamma_1 \mid \Gamma_2, A \vee B}, \\
 & \Box_r \frac{(C) \Gamma_1, \Diamond \Gamma_1, A \mid \Gamma_2, \Diamond \Gamma_2}{(\Diamond C) \Diamond \Gamma_1, \Box A, \Delta_1 \mid \Diamond \Gamma_2, \Delta_2}, \quad \Box_r \frac{(C) \Gamma_1, \Diamond \Gamma_1 \mid \Gamma_2, \Diamond \Gamma_2, A}{(\Box C) \Diamond \Gamma_1, \Delta_1 \mid \Diamond \Gamma_2, \Box A, \Delta_2}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Аналогично понятию формального циклического вывода определяется понятие *расщепленного формального циклического вывода* с условием, что вершины, соединенные обратной ссылкой, помечены совпадающими расщепленными секвенциями.

ЛЕММА 4.2. *Если существует формальное циклическое доказательство секвенции Γ_1, Γ_2 в системе GL_{circ} , то существует расщепленное циклическое доказательство $\Gamma_1 \mid \Gamma_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что π – формальное циклическое доказательство секвенции Γ_1, Γ_2 . Идя по выводу π снизу вверх (от заключений к посылкам), строим расщепленное формальное ∞ -доказательство для $\Gamma_1 \mid \Gamma_2$. Поскольку π содержит лишь конечное число различных секвенций, построенное расщепленное формальное ∞ -доказательство $\Gamma_1 \mid \Gamma_2$ содержит конечное число различных расщепленных секвенций. Из любого расщепленного формального ∞ -доказательства, содержащего конечное число различных расщепленных секвенций, может быть непосредственно получено регулярное расщепленное формальное ∞ -доказательство. Таким образом, существует расщепленное формальное циклическое доказательство $\Gamma_1 \mid \Gamma_2$ по утверждению 3.1.

Теперь обратимся к варианту теоремы о существовании и единственности неподвижной точки для логики GL . Пусть S является множеством литералов L и помеченных литералов L° , определим

$$S^\circ = \{L^\circ : L \in S \text{ или } L^\circ \in S\}.$$

Положим

$$w^*(A) = w(A) \cup w^\circ(A).$$

ТЕОРЕМА 4.3. *Если каждое вхождение литералов P и $\bar{P}$ в A находится в области действия модального оператора, то существует формула F такая, что*

$$w(F) \subset (w^*(A) \cup w^*(\bar{A})) \setminus \{P^\circ, \bar{P}^\circ\}$$

и

$$\text{GL} \vdash \Box(P \leftrightarrow A) \leftrightarrow \Box(P \leftrightarrow F).$$

Более того, если A не содержит $\bar{P}$, то $w(F) \subset w^*(A) \setminus \{P^\circ\}$.

Отметим, что данная теорема может быть установлена с помощью полностью синтаксического доказательства, не использующего в явной форме никакого из интерполяционных свойств (см. [16], [17]).

Для секвенции Γ определим секвенцию $\bar{\Gamma}$ как мультимножество отрицаний формул из Γ . Определим

$$w(\Gamma) = \bigcup \{w(A) : A \in \Gamma\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Для доказательства теоремы достаточно построить интерполянт для всякого расщепления доказуемой секвенции. Предположим, что у нас имеется формальное циклическое доказательство секвенции Γ_1, Γ_2 . Применяя лемму 4.2, мы можем найти расщепленное циклическое доказательство $\Gamma_1 \mid \Gamma_2$ и построить интерполянт для данной расщепленной секвенции следующим образом.

Рассмотрим произвольный расщепленный циклический вывод $\pi = (\kappa, d)$ секвенции $\Gamma_1 \mid \Gamma_2$. Для всякого листа a вывода κ , помеченного секвенцией, которая не является аксиомой, зафиксируем пару неизвестных X_a и w_a . Неизвестная переменная X_a соответствует неизвестному интерполянту расщепленной секвенции листа a . Неизвестная w_a соответствует множеству $w(X_a)$. Пусть $\Delta_1 \mid \Delta_2$ – расщепленная секвенция, стоящая в листе a . Определим формулу I_a как

$$((\Delta_1^\sharp \rightarrow X_a) \wedge (X_a \rightarrow \Delta_2^\sharp))$$

и утверждение I'_a как

$$w_a \subset (w(\bar{\Delta}_1) \cap w(\Delta_2)).$$

Для формулы D , возможно содержащей новые переменные X_a , определим $w_X(D)$ как

$$w(D) \setminus \{X_a, X_a^\circ : X_a \text{ входит в } D\}.$$

Мы утверждаем, что существует такая формула C , что C не содержит литералов вида $\bar{X}_a$, переменные $\{X_a : a \in BH(\pi)\}$ могут входить в C только в области действия модальных операторов и

$$\begin{aligned} \text{GL} \vdash \bigwedge \{\Box I_a : a \in H(\pi)\} \wedge \bigwedge \{\Box I_a : a \in BH(\pi)\} &\rightarrow ((\bar{(\Gamma_1^\sharp)} \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \Gamma_2^\sharp)), \\ \bigwedge \{I'_a : a \in H(\pi) \cup BH(\pi)\} & \\ \implies w_X(C) \cup \bigcup \{w_a : a \in H(\pi)\} \cup \bigcup \{w_a^\circ : a \in BH(\pi)\} &\subset w(\bar{\Gamma}_1) \cap w(\Gamma_2). \end{aligned} \quad (2)$$

Доказательство проведем индукцией по построению вывода κ .

Предположим, что κ состоит из единственной секвенции. Если данная секвенция является аксиомой:

$$\begin{aligned} (\top) \Gamma_1 \mid \top, \Gamma_2, \quad (\perp) \Gamma_1, \top \mid \Gamma_2, \\ (\perp) \Gamma_1, A, \bar{A} \mid \Gamma_2, \quad (\bar{A}) \Gamma_1, A \mid \bar{A}, \Gamma_2, \quad (\top), \Gamma_1 \mid A, \bar{A}, \Gamma_2, \end{aligned}$$

то в качестве C берем формулу, указанную в скобках перед секвенцией. Если в единственном листе a данного вывода стоит секвенция, не являющаяся аксиомой, то положим C равной X_a .

Обратимся к случаю, когда κ завершается применением некоторого правила вывода, причем корень κ не соединен обратной ссылкой ни с каким листом. Например, последнее применение правила вывода в κ имеет вид

$$\wedge_r \frac{\begin{array}{c} \tau_1 \\ \vdots \\ \Gamma_1 \mid \Gamma_2, A \end{array} \quad \begin{array}{c} \tau_2 \\ \vdots \\ \Gamma_1 \mid \Gamma_2, B \end{array}}{\Gamma_1 \mid \Gamma_2, A \wedge B}$$

По предположению индукции существуют формулы C_1 и C_2 , удовлетворяющие требуемым условиям для циклических выводов (τ_1, d_{τ_1}) и (τ_2, d_{τ_2}) соответственно. Положим $C \equiv C_1 \wedge C_2$. Случай применения других правил вывода полностью аналогичен. Построение формулы C в случае других правил указано в скобках в (1).

Осталось рассмотреть случай, когда корень κ соединен обратной ссылкой с каким-то листом b этого вывода. Рассмотрим циклический вывод π_0 , получающийся из π удалением ссылки, соединяющей b с корнем κ . Используя рассуждения предыдущих случаев, получаем, что существует формула C_0 , удовлетворяющая требуемым условиям для π_0 . Отметим, что $b \in BH(\pi_0)$. Формула C_0 не содержит литералов вида $\overline{X}_a$, а переменные $\{X_a : a \in BH(\pi)\} \cup \{X_b\}$ могут входить в C_0 только в области действия модальных операторов. Кроме того, имеем следующее:

$$\begin{aligned} & \text{GL} \vdash \bigwedge \{\Box I_a : a \in H(\pi)\} \wedge \bigwedge \{\Box I_a : a \in BH(\pi)\} \wedge \Box I_b \rightarrow (((\overline{\Gamma_1^\sharp}) \rightarrow C_0) \wedge (C_0 \rightarrow \Gamma_2^\sharp)), \\ & \bigwedge \{I'_a : a \in H(\pi) \cup BH(\pi)\} \wedge I'_b \\ & \implies w_X(C_0) \cup w_b^\circ \cup \bigcup \{w_a : a \in H(\pi)\} \cup \bigcup \{w_a^\circ : a \in BH(\pi)\} \subset w(\overline{\Gamma_1}) \cap w(\Gamma_2). \end{aligned} \quad (3)$$

По теореме 4.3 существует такая формула F , что $w(F) \subset w^*(C_0) \setminus \{X_b^\circ\}$ и

$$\text{GL} \vdash \Box(X_b \leftrightarrow C_0) \leftrightarrow \Box(X_b \leftrightarrow F).$$

Заменяем все вхождения X_b в C_0 на F и обозначим результат замены через C .

Проверим, что формула C удовлетворяет всем необходимым условиям для π . Очевидно, что C не содержит литералов вида $\overline{X}_a$ и переменные $\{X_a : a \in BH(\pi)\}$ входят в C только в области действия модальных операторов.

Более того, заметим, что

$$\text{GL} \vdash I_b(F) \leftrightarrow (((\overline{\Gamma_1^\sharp}) \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \Gamma_2^\sharp)).$$

Поскольку обобщенное правило Лёба является допустимым, формула

$$\begin{aligned} & \text{GL} \vdash \bigwedge \{\Box I_a : a \in H(\pi)\} \wedge \bigwedge \{\Box I_a : a \in BH(\pi)\} \wedge \Box I_b(F) \\ & \rightarrow (((\overline{\Gamma_1^\sharp}) \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow \Gamma_2^\sharp)) \end{aligned}$$

останется доказуемой, если из посылки импликации удалить формулу $\Box I_b(F)$.

Осталось проверить условие (2). Предположим, что

$$\bigwedge \{I'_a : a \in H(\pi) \cup BH(\pi)\}.$$

Докажем, что отсюда следует

$$w_X(C) \subset w(\bar{\Gamma}_1) \cap w(\Gamma_2).$$

Из (2) имеем

$$I'_b \implies w_X(C_0) \cup w_b^\circ \subset w(\bar{\Gamma}_1) \cap w(\Gamma_2).$$

Заменяя w_b в I'_b на $\emptyset$, получаем

$$w_X(C_0) \subset w(\bar{\Gamma}_1) \cap w(\Gamma_2).$$

Таким образом, утверждение $I'_b(w_X(C_0))$ является верным. Еще раз заменяя неизвестную w_b в I'_b на множество $w_X(C_0)$, получаем, что

$$w_X(C_0) \cup w_X^\circ(C_0) \subset w(\bar{\Gamma}_1) \cap w(\Gamma_2).$$

Следовательно,

$$w_X(C) \subset w_X(C_0) \cup w_X^\circ(F) \subset w_X(C_0) \cup w_X^\circ(C_0) \subset w(\bar{\Gamma}_1) \cap w(\Gamma_2).$$

Из (3) также имеем

$$I'_b \implies \bigcup \{w_a : a \in H(\pi)\} \cup \bigcup \{w_a^\circ : a \in BH(\pi)\} \subset w(\bar{\Gamma}_1) \cap w(\Gamma_2).$$

Заменяя w_b в I'_b на $\emptyset$, получаем

$$\bigcup \{w_a : a \in H(\pi)\} \cup \bigcup \{w_a^\circ : a \in BH(\pi)\} \subset w(\bar{\Gamma}_1) \cap w(\Gamma_2).$$

Таким образом, условие (2) выполнено.

Наконец, если $\pi = (\kappa, d)$ является расщепленным формальным циклическим доказательством $\Gamma_1 \mid \Gamma_2$, то построенная формула C является интерполянтom данной расщепленной секвенции.

Выражаю благодарность Льву Беклемишеву за его замечательные советы и личную поддержку в процессе работы над статьей. Также сердечно благодарю Марию Филатову, вдохновлявшую меня на этапе оформления данной работы, этапе заключительном, но от этого не менее важном.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Negri, “Proof analysis in modal logic”, *J. Philos. Logic*, **34**:5-6 (2005), 507–544.
- [2] F. Poggiolesi, “A purely syntactic and cut-free sequent calculus for the modal logic of provability”, *Rev. Symb. Log.*, **2**:4 (2009), 593–611.
- [3] R. Goré, R. Ramanayake, “Valentini’s cut-elimination for provability logic resolved”, *Rev. Symb. Log.*, **5**:2 (2012), 212–238.
- [4] J. Brotherston, N. Gorogiannis, R. L. Petersen, “A generic cyclic theorem prover”, *Programming Languages and Systems*, Lecture Notes in Comput. Sci., **7705**, Springer-Verlag, Berlin, 2012, 350–367.

- [5] J. van Benthem, “Modal frame correspondences and fixed-points”, *Studia Logica*, **83**:1-3 (2006), 133–155.
- [6] A. Visser, “Löb’s logic meets the μ -calculus”, *Processes, Terms and Cycles: Steps on the Road to Infinity*, Lecture Notes in Comput. Sci., **3838**, Springer-Verlag, Berlin, 2005, 14–25.
- [7] L. Alberucci, A. Facchini, “On modal μ -calculus and Gödel–Löb logic”, *Studia Logica*, **91**:2 (2009), 145–169.
- [8] Д. С. Шамканов, “Интерполяционные свойства логик доказуемости **GL** и **GLP**”, *Алгоритмические вопросы алгебры и логики*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Ивановича Адяна, Тр. МИАН, **274**, МАИК, М., 2011, 329–342.
- [9] G. Sambin, S. Valentini, “A modal sequent calculus for a fragment of arithmetic”, *Studia Logica*, **39**:2-3 (1980), 245–256.
- [10] G. Sambin, S. Valentini, “The modal logic of provability. The sequential approach”, *J. Philos. Logic*, **11**:3 (1982), 311–342.
- [11] D. Leivant, “On the proof theory of the modal logic for arithmetic provability”, *J. Symbolic Logic*, **46**:3 (1981), 531–538.
- [12] W. W. Tait, “Normal derivability in classical logic”, *The Syntax and Semantics of Infinitary Languages*, Lecture Notes in Math., **72**, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 204–236.
- [13] S. Valentini, “The modal logic of provability: cut-elimination”, *J. Philos. Logic*, **12**:4 (1983), 471–476.
- [14] J. Brotherston, *Sequent Calculus Proof Systems for Inductive Definitions*, Ph.D. Thesis, Edinburgh, 2006.
- [15] B. Jacobs, J. Rutten, “A tutorial on (co)algebras and (co)induction”, *Bull. EATCS*, **62** (1997), 222–259.
- [16] P. Lindström, “Provability logic – a short introduction”, *Theoria*, **62**:1-2 (1996), 19–61.
- [17] C. Smoryński, “Modal logic and self-reference”, *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. II. *Extensions of Classical Logic*, Synthese Lib., **165**, Reidel, Dordrecht, 1984, 441–495.

Д. С. Шамканов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Национальный исследовательский университет

“Высшая школа экономики”

E-mail: daniyar.shamkanov@gmail.com

Поступило

16.12.2013

Исправленный вариант

20.03.2014