Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Атабекян, Расщепляющие автоморфизмы порядка p^k свободных бернсайдовых групп – внутренние, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 651–655

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 02:52:28

Расщепляющие автоморфизмы порядка p^k свободных бернсайдовых групп – внутренние

В. С. Атабекян

Доказано, что если порядок расщепляющего автоморфизма нечетного периода $n \geq 1003$ свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ равен степени какого-либо простого числа, то он является внутренним автоморфизмом. Тем самым, дается положительный ответ на вопрос о совпадении расщепляющих автоморфизмов группы $B(m, n)$ с внутренними автоморфизмами для всех автоморфизмов порядка p^k (p – простое число). Этот вопрос был поставлен в 1990 г. в коуровской тетради (см. 11-е издание, вопрос 11.36.6).

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10444

1. Введение. Автоморфизм φ группы G называется *расщепляющим автоморфизмом периода n* , если $\varphi^n = 1$ и $g g^\varphi g^{\varphi^2} \dots g^{\varphi^{n-1}} = 1$ для всех $g \in G$. Исследование групп с расщепляющими автоморфизмами занимались разные авторы. Известная теорема Отто Кегеля, доказанная еще в 1961 г., утверждает, что любая конечная группа, обладающая нетривиальным расщепляющим автоморфизмом простого периода, является нильпотентной группой (см. [1]). Хухро доказал, что любая разрешимая группа, обладающая нетривиальным расщепляющим автоморфизмом простого периода, тоже является нильпотентной группой. (см. [2]). Джабара [3] установил, что конечная группа с расщепляющим автоморфизмом порядка 4 разрешима.

Легко проверить, что каждый внутренний автоморфизм группы, в которой выполняется тождество $x^n = 1$, является ее расщепляющим автоморфизмом периода n . Однако, обратное не верно (см. пример 1 в [4]).

В [5] Иванов поставил следующий вопрос: *пусть n – достаточно большое нечетное число и $m > 1$. Верно ли, что любой автоморфизм φ группы $B(m, n)$, для которого $\varphi^n = 1$ и $g g^\varphi g^{\varphi^2} \dots g^{\varphi^{n-1}} = 1$ при всяком g из $B(m, n)$, является внутренним (вопрос 11.36. б)). Фактически в приведенном вопросе речь идет о расщепляющих автоморфизмах периода n группы $B(m, n)$.*

Нетрудно проверить, что если φ – расщепляющий автоморфизм периода n , то $g^{\varphi^{n-1}} \dots g^{\varphi^2} g^\varphi g = 1$ для любого $g \in G$. Если φ – расщепляющий автоморфизм периода n некоторой группы G , то это в точности означает, что для любого $g \in G$ в гомоморфе $Hol(G)$ группы G имеет место соотношение $(\varphi g)^n = 1$, поскольку $(\varphi g)^n =$

$\varphi^n g^{\varphi^{n-1}} \dots g^{\varphi^2} g^{\varphi} g$. В частности, тождественный автоморфизм данной группы G является расщепляющим автоморфизмом периода n тогда и только тогда, когда в G выполняется тождество $x^n = 1$.

В настоящей работе мы дадим положительный ответ на приведенный выше вопрос Иванова для всех расщепляющих автоморфизмов свободных бернсайдовых групп $B(m, n)$ нечетного периода $n \geq 1003$, порядок которых есть степень простого числа.

По определению, свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ периода n и ранга m имеет следующее задание:

$$B(m, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid X^n = 1 \rangle,$$

где X пробегает множество всех слов в алфавите $\{a_1^{\pm 1}, a_2^{\pm 1}, \dots, a_m^{\pm 1}\}$. Группа $B(m, n)$ есть факторгруппа свободной группы F_m ранга m по нормальной подгруппе F_m^n , порожденной всевозможными n -ми степенями элементов из F_m . Любая периодическая группа периода n с m порождающими является фактор группой группы $B(m, n)$. Подробный обзор результатов о свободных бернсайдовых группах, история проблемы Бернсайда и связанных с ним вопросов дан в статье Адяна [6].

Основная теорема 1 настоящей работы усиливает результат работы [4] (см. также [7]), где проблема Иванова решена только для автоморфизмов простого порядка.

2. О простых периодических группах. В работе Адяна и Лысёнка [8] доказано, что для каждого $m > 1$ и нечетного $n \geq 1003$ существует такая максимальная нормальная подгруппа N свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$, что факторгруппа $B(m, n)/N$ является бесконечной группой, каждая собственная подгруппа которой содержится в некоторой циклической подгруппе порядка n . Группы, построенные в [8], являются бесконечными простыми группами, в которых выполняется тождественное соотношение $x^n = 1$. Их называют “монстрами” Тарского, так как они положительно решают проблему Тарского о существовании подобных примеров групп (первые примеры монстров Тарского для простых периодов $n > 10^{75}$ были построены Ольшанским в работе [9]). Позже, модифицируя конструкцию групп из [8], в работе [10] было показано, что для каждого нечетного $n \geq 1003$ существует континуум неизоморфных монстров Тарского периода n .

Каждому монстру Тарского соответствует некоторая максимальная нормальная подгруппа группы $B(m, n)$, факторизация по которой приводит к бесконечной группе, содержащей только циклические собственные подгруппы.

Через $\mathcal{M}_n$ будем обозначать множество всех таких нормальных подгрупп $N \triangleleft B(m, n)$, факторгруппа $B(m, n)/N$ по которой является монстром Тарского.

Следующие два утверждения были доказаны автором в работах [11] и [4] соответственно. Они играют ключевую роль в приведенном ниже доказательстве основной теоремы 1.

ЛЕММА 1 (см. [11; следствие 2]). Пусть $n \geq 1003$ – нечетное число и φ такой автоморфизм группы $B(m, n)$, что для каждой нормальной подгруппы $N \in \mathcal{M}_n$ выполнено равенство $N^\varphi = N$. Тогда φ – внутренний автоморфизм.

ЛЕММА 2 (см. [4; лемма 4]). Если φ – произвольный нетривиальный расщепляющий автоморфизм периода n группы $B(m, n)$ при нечетном $n \geq 1003$, то стабилизатор любой нормальной подгруппы $N \in \mathcal{M}_n$ относительно действия циклической группы $\langle \varphi \rangle$ не тривиален.

3. Основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ϕ – расщепляющий автоморфизм периода n группы $B(t, n)$, где $n \geq 1003$ – нечетное число. Тогда если порядок автоморфизма ϕ является степенью какого либо простого числа, то ϕ – внутренний автоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 1 для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой нормальной подгруппы $N \in \mathcal{M}_n$ выполнено $N^\phi = N$.

Доказательство проведем от противного. Допустим, что существуют нормальные подгруппы $A \in \mathcal{M}_n$, которые не являются ϕ -инвариантными подгруппами, т.е. для которых $A^\phi \neq A$. С другой стороны, по лемме 2 централизатор каждой такой подгруппы A не тривиален. Пусть p^r есть порядок автоморфизма ϕ , где p некоторое простое число. Очевидно, p^r делит n . Поскольку подгруппы циклической группы порядка p^r линейно упорядочены относительно включения, то среди всех не ϕ -инвариантных подгрупп $A \in \mathcal{M}_n$ можно выбрать некоторую подгруппу с минимальным централизатором, которую обозначим через N . Этот минимальный нетривиальный централизатор, как подгруппа группы $\langle \phi \rangle$ порядка p^r , порождается некоторым автоморфизмом вида ϕ^{p^k} , где $1 < k < r$. В силу минимальности подгруппы $\langle \phi^{p^k} \rangle$ она содержится в централизаторе любой подгруппы $A \in \mathcal{M}_n$. Поэтому автоморфизм ϕ^{p^k} централизует все подгруппы $A \in \mathcal{M}_n$. Отсюда, согласно лемме 1, следует, что автоморфизм ϕ^{p^k} внутренний.

Далее мы используем следующую лемму, доказанную в работе [4].

ЛЕММА 3 (см. [4; лемма 3]). Пусть $\varphi: G \rightarrow G$ произвольный автоморфизм и H такая нормальная подгруппа группы G , что факторгруппа G/H является неабелевой простой группой. Тогда если подгруппы $H, H^\varphi, \dots, H^{\varphi^{k-1}}$ попарно различные, а $H^{\varphi^k} = H$, то факторгруппа $G/\bigcap_{i=1}^k H^{\varphi^i}$ разлагается в прямое произведение своих нормальных подгрупп $H_j/\bigcap_{i=1}^k H^{\varphi^i}$, $j = 1, 2, \dots, k$, где $H_j = \bigcap_{i \neq j}^k H^{\varphi^i}$, причем каждая факторгруппа $H_j/\bigcap_{i=1}^k H^{\varphi^i}$ изоморфна группе G/H .

Чтобы пользоваться леммой 3, обозначим $G = B(t, n)$, $\varphi = \phi$ и пусть $H = N$ – выбранная нами нормальная подгруппа группы $B(t, n)$, удовлетворяющая условию $N^\phi \neq N$. Так как $N \in \mathcal{M}_n$, то фактор группа $B(t, n)/N$ является монстром Тарского. В частности, $B(t, n)/N$ – неабелева простая группа. Применив лемму 3 к группе $G = B(t, n)$, получим, что фактор группа $B(t, n)/K$ разлагается в прямое произведение подгрупп $N_0/K, N_1/K, \dots, N_{p^k-1}/K$, где $K = \bigcap_{i=0}^{p^k-1} N^{\phi^i}$.

Как было отмечено выше, автоморфизм ϕ^{p^k} внутренний, т.е. для некоторого элемента $u \in B(t, n)$ выполнено равенство $\phi^{p^k} = i_u$, где i_u – внутренний автоморфизм, порожденный элементом u . Поскольку автоморфизм ϕ^{p^k} имеет порядок p^{r-k} , для любого $x \in B(t, n)$ имеет место соотношение $(i_u)^{p^{r-k}}(x) = x$, или, другими словами, элемент $u^{p^{r-k}}$ лежит в центре группы $B(t, n)$. Из теоремы Адяна о тривиальности центра группы $B(t, n)$ (см. [12; теорема 3.4]) вытекает, что $u^{p^{r-k}} = 1$. Более того, так как ϕ^{p^k} имеет порядок p^{r-k} , элемент u имеет порядок p^{r-k} .

Так как фактор группа $B(t, n)/K$ разлагается в прямое произведение подгрупп $N_0/K, N_1/K, \dots, N_{p^k-1}/K$, для элемента uK фактор группы $B(t, n)/K$ существуют такие однозначно определенные элементы $u_0K, u_1K, \dots, u_{p^k-1}K$, принадлежащие

соответственно подгруппам $N_0/K, N_1/K, \dots, N_{p^k-1}/K$, что

$$uK = u_0K \cdot u_1K \cdots u_{p^k-1}K. \quad (3.1) \quad \{eq3.$$

Заметим, что из соотношения $u^{p^{r-k}} = 1$ непосредственно вытекают соотношения $u_i^{p^{r-k}}K = K$ для всех $i = 0, 1, \dots, p^k - 1$. В частности, имеем $u_0^{p^{r-k}}K = K$.

Согласно лемме 3 имеет место изоморфизм $N_0/K \simeq B(m, n)/N$, а по определению множества $\mathcal{M}_n$ в фактор группе $B(m, n)/N$ всякий элемент содержится в некоторой циклической группе порядка n (см. [8; предложение 5.2]). Следовательно, найдется такой элемент $a \in B(m, n)$, что $aK \in N_0/K$ и элемент au_0K имеет порядок n . При этом, поскольку элементы $u_1K, \dots, u_{p^k-1}K$ принадлежат прямым множителям $N_1/K, \dots, N_{p^k-1}/K$ соответственно, то они перестановочны с aK и u_0K в группе $B(m, n)/K$. Значит, в силу равенства (3.1) имеют место соотношения

$$u^s au^{-s}K = u_0^s au_0^{-s}K \quad (3.2) \quad \{eq3.$$

для любого целого s .

Так как ϕ – расщепляющий автоморфизм, имеем $a a^\phi a^{\phi^2} \cdots a^{\phi^{n-1}} = 1$. Учитывая ϕ -инвариантность подгруппы K , получаем, что в фактор группе $B(m, n)/K$ выполняется равенство

$$aK \cdot a^\phi K \cdot a^{\phi^2} K \cdots a^{\phi^{n-1}} K = K. \quad (3.3) \quad \{eq3.$$

Напомним, что согласно выбору подгруппы N имеем $a^{\phi^{p^k}}K \in N_0/K$. Это позволяет переписать равенство (3.3) в виде

$$bK \cdot b^\phi K \cdot b^{\phi^2} K \cdots b^{\phi^{p^k-1}} K = K, \quad (3.4) \quad \{eq3.$$

где

$$b = a a^{\phi^{p^k}} a^{\phi^{2p^k}} \cdots a^{\phi^{(n/p^k-1)p^k}}. \quad (3.5) \quad \{eq3.$$

При этом, легко понять, что элементы $bK, b^\phi K, b^{\phi^2} K, \dots, b^{\phi^{p^k-1}} K$ принадлежат прямым множителям $N_0/K, N_1/K, \dots, N_{p^k-1}/K$, соответственно. Поэтому, из равенства (3.4) немедленно вытекает, что все множители в левой части равенства (3.4) тривиальны. В частности, имеем $bK = K$.

Так как $\phi^{p^k} = i_u$, равенство (3.5) можно переписать в виде

$$b = a \cdot u a u^{-1} \cdot u^2 a u^{-2} \cdots u^{n/p^k-1} a u^{-(n/p^k-1)}. \quad (3.6) \quad \{eq3.$$

Соответственно, в фактор группе получаем

$$bK = aK \cdot u a u^{-1} K \cdot u^2 a u^{-2} K \cdots u^{n/p^k-1} a u^{-(n/p^k-1)} K.$$

Отсюда, используя соотношения (3.2), получим равенство

$$bK = a \cdot u_0 a u_0^{-1} \cdot u_0^2 a u_0^{-2} \cdots u_0^{n/p^k-1} a u_0^{-(n/p^k-1)} K.$$

Далее, воспользуемся следующим тождеством:

$$a \cdot u_0 a u_0^{-1} \cdot u_0^2 a u_0^{-2} \cdots u_0^{n/p^k-1} a u_0^{-(n/p^k-1)} = (a u_0)^{n/p^k} \cdot u_0^{-n/p^k}. \quad (3.7) \quad \{eq3.$$

Поскольку n делится на p^r , то n/p^k делится на p^{r-k} . В силу равенства $u_0^{p^{r-k}}K = K$ окончательно получаем $bK = (a u_0)^{n/p^k} K$. Но так как $bK = K$, то $(a u_0)^{n/p^k} K = K$. Получается противоречие, так как согласно условию выбора элемента a , элемент au_0K должен иметь порядок n в группе $B(m, n)/K$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Н. Kegel, “Die Nilpotenz der H_p -Gruppen”, *Math. Z.*, **75** (1961), 373–376.
- [2] Е. И. Хухро, “Нильпотентность разрешимых групп, допускающих расщепляющий автоморфизм простого порядка”, *Алгебра и логика*, **19**:1 (1980), 118–129.
- [3] Е. Jabara, “Gruppi che ammettono un automorfismo 4-spezante”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **45**:1 (1996), 84–92.
- [4] В. С. Атабекян, “Расщепляющие автоморфизмы свободных бернсайдовых групп”, *Матем. сб.*, **204**:2 (2013), 31–38.
- [5] *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, 11-е изд., ред. В. Д. Мазуров, Ю. И. Мерзляков, В. А. Чиркин, Изд-во Ин-та матем. СО АН СССР, Новосибирск, 1990.
- [6] С. И. Адян, “Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы”, *УМН*, **65**:5(395) (2010), 5–60.
- [7] V. S. Atabekyan, “Splitting automorphisms of free Burnside groups”, *Proc. Yerevan State Univ. Phys. Math. Sci.*, 2011, №3, 62–64.
- [8] С. И. Адян, И. Г. Лысёнок, “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 933–990.
- [9] А. Ю. Ольшанский, “Группы ограниченного периода с подгруппами простого порядка”, *Алгебра и логика*, **21**:5 (1982), 553–618.
- [10] В. С. Атабекян, “О периодических группах нечетного периода $n \geq 1003$ ”, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 495–500.
- [11] В. С. Атабекян, “Нормальные автоморфизмы свободных бернсайдовых групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:2 (2011), 3–18.
- [12] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975.

В. С. Атабекян

Ереванский государственный университет

E-mail: avarujan@ysu.am

Поступило

05.04.2013