Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Т. Сапарбаева, Двумерные конечнозонные операторы Шрёдингера с эллиптическими коэффициентами, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 5, 798–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 18:25:00

Двумерные конечнозонные операторы Шрёдингера с эллиптическими коэффициентами

Б. Т. Сапарбаева

В данной работе мы строим примеры конечнозонных на одном уровне энергии двумерных операторов Шрёдингера, коэффициенты которых выражены через $\wp$ -функцию Вейерштрасса, при этом спектральные кривые операторов имеют род больше 1.

Конечнозонные на одном уровне энергии $2D$ операторы Шрёдингера введены Дубровиным, Кричевером и Новиковым [4]. Такие операторы восстанавливаются по спектральным данным $\{\Gamma, q_1, q_2, \gamma\}$, где Γ – риманова поверхность, q_1, q_2 – выделенные точки на Γ , γ – неспециальный дивизор степени g , g – род Γ . Существует единственная функция $\psi(z, \bar{z}, P)$, $P \in \Gamma$, которая обладает следующими свойствами:

1) в окрестностях q_1 и q_2 имеют место разложения

$$\begin{aligned}\psi &= e^{k_1 z} \left(1 + \frac{\xi(z, \bar{z})}{k_1} + O\left(\frac{1}{k_1^2}\right) \right), \\ \psi &= e^{k_2 \bar{z}} \left(\mu_0(z, \bar{z}) + \frac{\mu_1(z, \bar{z})}{k_2} + O\left(\frac{1}{k_2^2}\right) \right),\end{aligned}$$

2) на $\Gamma \setminus \{q_1, q_2\}$ функция ψ имеет дивизор полюсов γ .

Функция ψ называется *двухточечной функцией Бейкера–Ахиезера*. Функция ψ удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$H\psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \nu(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + u(z, \bar{z}) \right) \psi,$$

где $\nu(z, \bar{z}) = -(\partial/\partial z) \ln \mu_0$, $u = -(\partial/\partial \bar{z}) \xi$. Функция Бейкера–Ахиезера имеет вид

$$\psi(z, \bar{z}, P) = \exp \left\{ z \int_Q^P \Omega_1 + \bar{z} \int_Q^P \Omega_2 \right\} \frac{\theta(U_1 z + U_2 \bar{z} + f(P) + W) \theta(W)}{\theta(f(P) + W) \theta(U_1 z + U_2 \bar{z} + W)},$$

где θ – тэта-функция многообразия Якоби спектральной кривой Γ , Ω_i – нормированный мероморфный дифференциал с полюсом второго порядка в q_i , $f(P)$ – отображение Абеля, U_i, V_i, W – некоторые векторы, определяемые спектральными данными, Q – фиксированная точка на Γ (см. в [4]). При этом

$$\nu(z, \bar{z}) = -\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\theta(U_1 z + U_2 \bar{z} + V_1 + W)}{\theta(U_1 z + U_2 \bar{z} + V_2 + W)}, \quad u(z, \bar{z}) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \ln \theta(U_1 z + U_2 \bar{z} + W). \quad (1)$$

Пусть f_1, f_2 – мероморфные функции на Γ с полюсом в q_1 , а g_1, g_2 – мероморфные функции с полюсом в q_2 . Тогда существуют единственные дифференциальные операторы $L(f_i)$ и $\tilde{L}(g_i)$ такие, что

$$\begin{aligned}L(f_i)\psi &= f_i\psi, & \tilde{L}(g_i)\psi &= g_i\psi, \\ [L(f_1), L(f_2)] &= 0, & [\tilde{L}(g_1), \tilde{L}(g_2)] &= 0.\end{aligned} \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (грант № 14.В25.31.0029), а также программы «Динамические системы в геометрии и математической физике» (грант 1431/ГФ2, руководитель – И. А. Тайманов.

DOI: 10.4213/mzm10447

Оператор Шрёдингера H удовлетворяет тождеству

$$[H, L(f_i)] = B_i H, \quad [H, \tilde{L}(g_i)] = \tilde{B}_i H, \quad (3)$$

где B_i и $\tilde{B}_i$ – некоторые операторы.

Конечнозонные $2D$ -операторы Шрёдингера изучались во многих работах (см. например [2]–[7]). Основные результаты этой работы – следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор Шрёдингера*

$$H = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + a \left(\frac{\sqrt{g_0} - \wp'(az + b\bar{z})}{2\wp(az + b\bar{z})} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{bg(g+1)\wp(az + b\bar{z})}{2a} \quad (4)$$

является конечнозонным, где $\wp$ – эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению

$$(\wp'(z))^2 = \frac{2g(g+1)}{a^2} \wp(z)^3 + g_2 \wp(z)^2 + g_1 \wp(z) + g_0.$$

Спектральная кривая оператора H – гиперэллиптическая кривая рода g .

Таким образом, для оператора H тэта-функциональные формулы (1) редуцируются к более простым формулам (4). Отметим, что H удовлетворяет тождеству

$$\left[H, -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + g(g+1)\wp(az + b\bar{z}) \right] = -2a \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\sqrt{g_0} - \wp'(az + b\bar{z})}{2\wp(az + b\bar{z})} \right) \right) H.$$

Несложно найти другие операторы $L(f_i)$, $\tilde{L}(g_i)$ для H из (2), (3).

Напомним, что в общем случае потенциал конечнозонного одномерного оператора Шрёдингера $-\partial^2/\partial x^2 + u(x)$ выражается через тэта-функцию спектральной кривой (см. [8]). В то же время существуют конечнозонные операторы с потенциалами, выраженными через $\wp$ -функцию Вейерштрасса, например, оператор Ламе

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g(g+1)\wp(x)$$

или оператор Трейбича–Вердне

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sum_{i=0}^3 a_i(a_i+1)\wp(x + \omega_i),$$

где ω_i – полупериод. Теорема 1 показывает, что аналогичный феномен возможен и в двумерном случае.

ТЕОРЕМА 2. *Оператор Шрёдингера*

$$H = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{7a\wp'(az + b\bar{z})}{20g_2a^2 - 14\wp(az + b\bar{z})} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{b\wp(az + b\bar{z})}{2a}$$

является конечнозонным, где $\wp$ удовлетворяет уравнению

$$(\wp'(z))^2 = -\frac{1}{2a^2} \wp(z)^3 + g_2 \wp(z)^2 - \left(\frac{7g_0}{10g_2a^2} + \frac{20g_2^2a^2}{49} \right) \wp(z) + g_0.$$

Оператор H из теоремы 2 коммутирует с самосопряженным оператором L_4 по модулю H

$$[H, L_4] = BH,$$

где

$$L_4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \wp(az + b\bar{z}) \right)^2 - \frac{15}{14} g_2 a^2 \wp(az + b\bar{z}) + \frac{3}{8} \wp(az + b\bar{z})^2.$$

Отметим, что самосопряженные операторы четвертого порядка, коммутирующие с операторами порядка $4g+2$, изучались в [9].

Автор благодарит А. Е. Миронова за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **229**:1 (1976), 15–18.
[2] А. П. Веселов, С. П. Новиков, *Докл. АН СССР*, **279**:4 (1984), 784–788. [3] П. Г. Гриневич, А. Е. Миронов, С. П. Новиков, *УМН*, **65**:3(393) (2010), 195–196. [4] С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прил.*, **8**:3 (1974), 54–66. [5] И. М. Кричевер, *УМН*, **44**:2 (1989), 121–184.
[6] И. А. Тайманов, *ТМФ*, **84**:1 (1990), 38–45. [7] И. В. Чередник, *Докл. АН СССР*, **252**:5 (1980), 1104–1108. [8] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, *ТМФ*, **23**:1 (1975), 51–68. [9] А. Е. Mironov, *Invent. Math.* (to appear).

Б. Т. Сапарбаева

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

г. Новосибирск

E-mail: sopik2002@mail.ru

Поступило

29.11.2013