Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Ярославцев, Об асимметрии прошлого и будущего эргодического $\mathbb{Z}$ -действия, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 3, 479–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10448>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 11:28:46

Об асимметрии прошлого и будущего эргодического $\mathbb{Z}$ -действия

И. С. Ярославцев

Задача неизоморфизма (асимметрии) сохраняющего меру преобразования и его обратного имеет давнюю историю в эргодической теории (см, например, [1]). В работе [2] в качестве инварианта, различающего действие и его обратное, используется кратная возвращаемость. Этот подход был развит и нашел применения в [3]–[5].

Цель заметки – упростить конструкцию преобразования и доказательство его асимметрии, следуя методу [1]. Мы получим существенно разные пределы выражений

$$\mu(F \cap T^{n_j+1}G \cap T^{2n_j}H) \quad \text{и} \quad \mu(F \cap T^{-n_j-1}G \cap T^{-2n_j}H).$$

Один из них будет иметь составляющую $\mu(F \cap G \cap H)/3$, а второй – нет. Этот инвариант (относительно сопряжения) и будет различать T и T^{-1} .

ТЕОРЕМА. *Существует эргодическое преобразование T , обладающее следующим свойством: для некоторой последовательности $n_j \rightarrow \infty$ и для любых измеримых множеств F , G и H выполнено равенство*

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F \cap T^{n_j+1}G \cap T^{2n_j}H) \\ = \frac{1}{3} (\mu(F \cap TG \cap T^{-1}H) + \mu(F \cap T^2G \cap TH) + \mu(F \cap G \cap H)). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ. *Преобразования T и T^{-1} неизоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы непосредственно вытекает

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(H \cap T^{-n_j-1}G \cap T^{-2n_j}F) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(F \cap T^{n_j-1}G \cap T^{2n_j}H) \\ &= \frac{1}{3} (\mu(F \cap T^{-1}G \cap T^{-1}H) + \mu(F \cap G \cap TH) + \mu(F \cap T^{-2}G \cap H)). \end{aligned}$$

Пусть множество A положительной меры таково, что A , TA и T^2A попарно не пересекаются. Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{n_j-1}A \cap T^{2n_j}A) = 0.$$

Предположим, что существует сохраняющее меру преобразование R такое, что $T^{-1} = R^{-1}TR$. Покажем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{n_j-1}A \cap T^{2n_j}A) \geq \frac{1}{3} \mu(A),$$

тем самым получим противоречие с предыдущим утверждением. Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap T^{n_j-1}A \cap T^{2n_j}A) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(T^{-2n_j}A \cap T^{-n_j-1}A \cap A) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A \cap R^{-1}T^{n_j+1}RA \cap R^{-1}T^{2n_j}RA) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(RA \cap T^{n_j+1}RA \cap T^{2n_j}RA) \\ &\geq \frac{1}{3} \mu(RA) = \frac{1}{3} \mu(A). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. По аналогии с конструкцией в работе [2] найдется преобразование T , последовательность $h_j \rightarrow \infty$ и последовательность разбиений фазового пространства

$$X = Y_j \sqcup Y_j^1 \sqcup Y_j^2 \sqcup Y_j^3$$

такие, что $\mu(Y_j) \rightarrow 0$, а множества Y_j^1, Y_j^2, Y_j^3 имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Y_j^1 &= B_j^1 \cup TB_j^1 \cup \dots \cup T^{h_j-2}B_j^1 \cup T^{h_j-1}B_j^1, \\ Y_j^2 &= B_j^2 \cup TB_j^2 \cup \dots \cup T^{h_j}B_j^2 \cup T^{h_j+1}B_j^2, \\ Y_j^3 &= B_j^3 \cup TB_j^3 \cup \dots \cup T^{h_j-1}B_j^3 \cup T^{h_j}B_j^3. \end{aligned}$$

Потребуем также, чтобы выполнялось

$$\begin{aligned} T^{h_j}B_j^1 &= B_j^2, \quad T^{h_j+2}B_j^2 = B_j^3, \quad \frac{\mu(T^{h_j+1}B_j^3 \Delta B_j^1)}{\mu(B_j^1)} \rightarrow 0, \\ \xi_j &= \{C_j, TC_j^1, T^2C_j, \dots, T^{h_j-1}C_j\} \rightarrow \varepsilon, \end{aligned}$$

где $C_j = B_j^1 \cup B_j^2 \cup B_j^3$, а запись $\xi_j \rightarrow \varepsilon$ означает, что любое измеримое A аппроксимируется ξ_j -измеримыми множествами.

Положим $n_j = h_j + 1$. Для любых измеримых F, G, H выполнено

$$\begin{aligned} \mu(Y_j^1 \cap F \cap T^{n_j+1}G \cap T^{2n_j}H) &\rightarrow \frac{1}{3} \mu(F \cap TG \cap T^{-1}H), \\ \mu(Y_j^2 \cap F \cap T^{n_j+1}G \cap T^{2n_j}H) &\rightarrow \frac{1}{3} \mu(F \cap T^2G \cap TH), \\ \mu(Y_j^3 \cap F \cap T^{n_j+1}G \cap T^{2n_j}H) &\rightarrow \frac{1}{3} \mu(F \cap G \cap H). \end{aligned}$$

Проверка этих утверждений стандартна: вместо множеств F, G, H следует на каждом j -м шаге подставлять ξ_j -измеримые множества, которые аппроксимируют F, G, H , а затем перейти к пределу. Сложив последние три предела и учитывая, что

$$\mu(X/(Y_j^1 \sqcup Y_j^2 \sqcup Y_j^3)) \rightarrow 0,$$

получим утверждение теоремы.

Автор признателен В.В. Рыжикову за консультации и следующее замечание. Рассмотренное свойство асимметрии кратного возвращения является типичным свойством: множество таких преобразований массивно относительно естественной метрики на группе всех сохраняющих меру преобразований. С.В. Тихонов, благодаря введению новой метрики [6], развил теорию типичных перемешивающих преобразований (см. также [7], [8]). В [6] им была доказана типичность асимметрии. Хотя используемый нами метод не может быть применен к перемешивающим системам, он работает для частично перемешивающих систем, сколь угодно близких к перемешивающим.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.И. Оселедец, *Функц. анализ и его прил.*, **5:3** (1971), 75–79. [2] В.В. Рыжиков, *Динамические системы и смежные вопросы*, Тр. МИАН, **216**, Наука, М., 1997, 154–157. [3] В.В. Рыжиков, *Матем. заметки*, **74:6** (2003), 889–895. [4] A.I. Danilenko, V.V. Ryzhikov, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), **104:3** (2012), 431–454. [5] K. Fraczek, J. Kulaga, M. Lemanczyk, “Non-reversibility and self-joinings of higher orders for ergodic flows”, *J. Anal. Math.* (to appear); arXiv:math.DS/1206.3053. [6] С.В. Тихонов, *Матем. сб.*, **198:4** (2007), 135–158. [7] С.В. Тихонов, *Матем. заметки*, **90:6** (2011), 953–954. [8] А.И. Баштанов, *Матем. заметки*, **93:2** (2013), 163–171.

И. С. Ярославцев

Московский государственный

университет им. М.В. Ломоносова

E-mail: Yaroslavtsev.I.S@yandex.ru

Поступило

11.12.2013