Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Попов, Об эквациональных теориях многообразий антикоммутативных колец, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 230–245

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1045>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 06:55:36

УДК 512+519.4

ОБ ЭКВАЦИОНАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ МНОГООБРАЗИЙ АНТИКОММУТАТИВНЫХ КОЛЕЦ

В. Ю. Попов

Доказано существование конечно базируемого многообразия антикоммутативных (в смысле тождества $x^2 = 0$) колец с неразрешимой эквациональной теорией.
Библиография: 9 названий.

Первый пример многообразия универсальных алгебр с неразрешимой эквациональной теорией был построен Тарским в 1943–44 годах и опубликован в 1953 году (см. [1]–[3]). Как замечено в [4], всякий пример конечно заданной универсальной алгебры с неразрешимой проблемой равенства слов легко можно модифицировать в пример конечно базируемого многообразия универсальных алгебр с неразрешимой эквациональной теорией. В работе [5] А. И. Мальцев построил конечно базируемое многообразие квазигрупп с неразрешимой эквациональной теорией и поставил опубликованный в сборнике [6] вопрос о существовании конечно базируемых многообразий полугрупп, групп и колец (ассоциативных, лиевых) с неразрешимой эквациональной теорией. Положительный ответ на этот вопрос для полугрупп получен в [7], а для групп – в [8]. В работе [9] доказано, что существуют конечно базируемые многообразия метабелевых и коммутативных колец с неразрешимой эквациональной теорией. Многообразия, построенные в работе [9], являются многообразиями колец характеристики 2. Очевидно, что из существования конечно базируемого многообразия коммутативных колец характеристики 2 с неразрешимой эквациональной теорией немедленно вытекает существование конечно базируемого многообразия антикоммутативных (в смысле тождества $xy = -yx$) колец характеристики 2 с неразрешимой эквациональной теорией. Однако, из результатов работы [9] не следует существование конечно базируемого многообразия антикоммутативных (в смысле тождества $x^2 = 0$) колец с неразрешимой эквациональной теорией. Пример подобного многообразия дает следующая

ТЕОРЕМА. *Существует конечно базируемое многообразие колец, удовлетворяющее тождеству $x^2 = 0$, с неразрешимой эквациональной теорией.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем ряд обозначений. Пусть y^0 – пустой символ,

$$xy^n = (\cdots (x \underbrace{y}_{n \text{ раз}}) \cdots) y, \quad E(x, y) = (((xy^3)(xy^4))((xy^4)(xy^5))),$$

P – рекурсивно перечислимое нерекурсивное множество натуральных чисел. Обозначим через M двухленточную машину Минского, вычисляющую частичную характеристическую функцию множества P . Пусть $m+1$ – число внутренних состояний машины M

и $A, B, C, D, Q_0, Q_1, \dots, Q_m$ – следующие слова:

$$\begin{aligned} A(x, y) &= (E(x, y)y^2)E(x, y), & B(x, y) &= (E(x, y)y^3)E(x, y), \\ C(x, y) &= (E(x, y)y^4)E(x, y), & D(x, y) &= (E(x, y)y^5)E(x, y), \\ Q_i(x, y) &= (E(x, y)y^{i+6})E(x, y). \end{aligned}$$

Пусть $W = \{A, B, C, D, Q_i \mid i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$. Пусть $\mathfrak{J}$ – многообразие колец, заданное тождествами $2x = 0, x^2 = 0$; $F_n\mathfrak{J}$ – кольцо ранга n , свободное в многообразии $\mathfrak{J}$, имеющее множество свободных образующих $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$.

Произвольной команде $q_i\delta_1\delta_2 \rightarrow q_j\varepsilon_1\varepsilon_2$ машины M поставим в соответствие некоторое кольцевое тождество:

$$\begin{aligned} Q_i(x, y)C(x, y)D(x, y) &= Q_j(x, y)A^{\varepsilon_1}(x, y)B^{\varepsilon_2}(x, y)C(x, y)D(x, y), & \text{если } \delta_1 = 1, \delta_2 = 1, \\ Q_i(x, y)A(x, y)D(x, y) &= Q_j(x, y)A^{\varepsilon_1+1}(x, y)B^{\varepsilon_2}(x, y)D(x, y), & \text{если } \delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \\ Q_i(x, y)B(x, y)C(x, y) &= Q_j(x, y)A^{\varepsilon_1}(x, y)B^{\varepsilon_2+1}(x, y)C(x, y), & \text{если } \delta_1 = 0, \delta_2 = 1, \\ Q_i(x, y)A(x, y)B(x, y) &= Q_j(x, y)A^{\varepsilon_1+1}(x, y)B^{\varepsilon_2+1}(x, y), & \text{если } \delta_1 = 0, \delta_2 = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{B}$ – многообразие колец, заданное тождествами

$$\begin{aligned} zA(x, y)B(x, y) &= zB(x, y)A(x, y), & zA(x, y)D(x, y) &= zD(x, y)A(x, y), \\ zC(x, y)B(x, y) &= zB(x, y)C(x, y), & zC(x, y)D(x, y) &= zD(x, y)C(x, y); \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}$ – многообразие колец, заданное тождествами, кодирующими команды машины M , $\mathfrak{X} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{M} \cap \mathfrak{J}$.

ЛЕММА 1. Если в многообразии $\mathfrak{X}$ выполняется тождество

$$Q_1(x, y)A^{2^n}(x, y)C(x, y)D(x, y) = Q_j(x, y)A(x, y)C(x, y)D(x, y), \quad (1)$$

то $n \in P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $F_k\mathfrak{X}$ кольцо ранга k , свободное в многообразии $\mathfrak{X}$. Для удобства образующие кольца $F_k\mathfrak{X}$ будем обозначать теми же буквами, что и образующие кольца $F\mathfrak{J}$, а тождество (1) – $\mathfrak{F}(x, y) = 0$. Так как тождество (1) выполняется в многообразии $\mathfrak{X}$, оно выполняется и в кольце $F_\omega\mathfrak{X}$. Отсюда вытекает, что в кольце $F_\omega\mathfrak{X}$ истинно соотношение $\mathfrak{F}(e_1, e_2) = 0$. Обозначим через S множество многочленов $f(\vec{e})$ таких, что $f(\vec{e}) = 0$ – соотношение в кольце $F_\omega\mathfrak{X}$, полученное из одного из тождеств, задающих многообразие $\mathfrak{X}$, подстановкой вместо переменных элементов кольца $F_\omega\mathfrak{X}$. Пусть I – идеал кольца $F_\omega\mathfrak{X}$, порожденный множеством S . Очевидно, что $F_\omega\mathfrak{X} \models \mathfrak{F}(e_1, e_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $F_\omega\mathfrak{J} \models \mathfrak{F}(e_1, e_2) \in I$. Из соотношения $F_\omega\mathfrak{J} \models \mathfrak{F}(e_1, e_2) \in I$ вытекает, что в кольце $F_\omega\mathfrak{J}$ выполняется равенство следующего вида:

$$\mathfrak{F}(e_1, e_2) = \sum_{i,j} u_{i_1} h_j u_{i_2},$$

где $h_j \in S$, $u_{i_1} h_j u_{i_2}$ – некоторое произведение многочленов типа $u_{i_1}^{(1)} \dots u_{i_1}^{(k)} h_j u_{i_2}^{(1)} \dots u_{i_2}^{(l)}$ с произвольным порядком расположения скобок. В силу дистрибутивности можно считать, что все многочлены, входящие в $u_{i_1} h_j u_{i_2}$, кроме h_j , являются одночленами.

Пусть $f_1 = \sum_{i,j} v_{i_1} h_j v_{i_2}$ и каждый одночлен многочлена f_1 для некоторых $w_i \in W$ имеет вид $w_1(e_1, e_2) \dots w_k(e_1, e_2)$, причем в многочлене f_1 для некоторого $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ $w_1 = Q_j$ и для любых l_1, l_2 $w_{l_1} \neq Q_{l_2}$ при условии $l_1 \geq 2$, f_2 – многочлен, ни один одночлен которого ни для каких $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ и $w_i \in W \setminus \{Q_i \mid i \in \{0, 1, \dots, m\}\}$ не равен $Q_j(e_1, e_2)w_1(e_1, e_2)w_2(e_1, e_2) \dots w_k(e_1, e_2)$.

ЛЕММА 2. *Существуют f_1 и f_2 такие, что $f_1 + f_2 = \sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по числу одночленов в многочлене $\sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2}$. Допустим, что число d одночленов в сумме $\sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2}$ равно 0. Тогда утверждение очевидно. Пусть утверждение справедливо для некоторого числа одночленов d . Покажем, что оно верно и для $d + 1$. Пусть число одночленов в сумме $\sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2}$ не больше $d + 1$. Тогда

$$\sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2} = \sum_{i>1,j} u_{i1} h_j u_{i2} + u_{11} h_1 u_{12}.$$

Так как число одночленов в сумме $\sum_{i>1,j} u_{i1} h_j u_{i2}$ не превосходит d , по предположению индукции имеем $f_1 + f_2 = \sum_{i>1,j} u_{i1} h_j u_{i2}$. Рассмотрим многочлен $u_{11} h_1 u_{12}$. В зависимости от того, получен ли многочлен h_1 из тождества многообразия $\mathfrak{M}$ или из тождества многообразия $\mathfrak{B}$, следует рассмотреть два случая.

Случай многообразия $\mathfrak{M}$. Так как многочлен h_1 получен из тождества многообразия $\mathfrak{M}$, он имеет вид $w_{i_1}(x, y) w_{i_2}(x, y) \cdots w_{i_s}(x, y) - w_{j_1}(x, y) w_{j_2}(x, y) \cdots w_{j_t}(x, y)$. Без ограничения общности можно считать, что в многочлен $\sum_{i,j} u_{i1} h_j u_{i2}$ входят только образующие e_1 и e_2 . Следовательно, $x = \alpha e_1 + \beta e_2 + \overline{x}(e_1, e_2)$, $y = \gamma e_1 + \delta e_2 + \overline{y}(e_1, e_2)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1\}$, $\overline{x}(e_1, e_2)$, $\overline{y}(e_1, e_2)$ — многочлены от e_1, e_2 , нижняя степень которых не меньше 2. Тогда

$$\begin{aligned} & w_{i_1}(x, y) w_{i_2}(x, y) \cdots w_{i_s}(x, y) - w_{j_1}(x, y) w_{j_2}(x, y) \cdots w_{j_t}(x, y) \\ &= w_{i_1}(\alpha e_1 + \beta e_2 + \overline{x}(e_1, e_2), \gamma e_1 + \delta e_2 + \overline{y}(e_1, e_2)) \\ & \quad w_{i_2}(\alpha e_1 + \beta e_2 + \overline{x}(e_1, e_2), \gamma e_1 + \delta e_2 + \overline{y}(e_1, e_2)) \cdots \\ & \quad w_{i_s}(\alpha e_1 + \beta e_2 + \overline{x}(e_1, e_2), \gamma e_1 + \delta e_2 + \overline{y}(e_1, e_2)) \\ & - w_{j_1}(\alpha e_1 + \beta e_2 + \overline{x}(e_1, e_2), \gamma e_1 + \delta e_2 + \overline{y}(e_1, e_2)) \\ & \quad w_{j_2}(\alpha e_1 + \beta e_2 + \overline{x}(e_1, e_2), \gamma e_1 + \delta e_2 + \overline{y}(e_1, e_2)) \cdots \\ & \quad w_{j_t}(\alpha e_1 + \beta e_2 + \overline{x}(e_1, e_2), \gamma e_1 + \delta e_2 + \overline{y}(e_1, e_2)) \\ &= w_{i_1}(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) w_{i_2}(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) \cdots w_{i_s}(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) \\ & \quad - w_{j_1}(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) w_{j_2}(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) \cdots w_{j_t}(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) \\ & \quad + U(e_1, e_2), \end{aligned}$$

где $U(e_1, e_2)$ — многочлен, в каждый одночлен которого в качестве подслова входит одночлен многочлена $\overline{x}(e_1, e_2)$ или $\overline{y}(e_1, e_2)$. Покажем, что каждый одночлен многочлена $U(e_1, e_2)$ является одночленом многочлена f_2 . Допустим противное. Тогда в кольце $F_\omega \mathfrak{J}$ должно выполняться равенство следующего вида:

$$w_{l_1}(e_1, e_2) \cdots w_{l_{r_1}}(e_1, e_2) = w_{p_1}(\eta_{1_{p_1}}, \eta_{2_{p_1}}) \cdots w_{p_{r_2}}(\eta_{1_{p_{r_2}}}, \eta_{2_{p_{r_2}}}), \quad (2)$$

где $\eta \in \{e_1, e_2, z \mid z \neq e_1, z \neq e_2, z \text{ — слово от } e_1, e_2\}$, причем существует η отличное от e_1 и e_2 .

ЛЕММА 3. *Равенство (2) ложно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем индукцией по числу r_2 . Предположим, что $r_2 = 1$. Тогда равенство (2) имеет вид

$$w_{l_1}(e_1, e_2) \cdots w_{l_{r_1}}(e_1, e_2) = w_{p_1}(\eta_{1_{p_1}}, \eta_{2_{p_1}}). \quad (3)$$

ЛЕММА 4. *Равенство (3) ложно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по числу r_1 . Предположим, что $r_1 = 1$. Тогда равенство (3) имеет вид $w_{l_1}(e_1, e_2) = w_{p_1}(\eta_{1_{p_1}}, \eta_{2_{p_1}})$. Поэтому

$$\begin{aligned} & (E(e_1, e_2)e_2^s)E(e_1, e_2) \\ &= (((\dots((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9))(((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}) \\ & \quad (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20})))\eta_{21}) \dots \eta_{t+20}) (((((\eta_{t+21}\eta_{t+22})\eta_{t+23})\eta_{t+24}) \\ & \quad (((((\eta_{t+25}\eta_{t+26})\eta_{t+27})\eta_{t+28})\eta_{t+29}))) (((((\eta_{t+30}\eta_{t+31})\eta_{t+32})\eta_{t+33})\eta_{t+34}) \\ & \quad (((((\eta_{t+35}\eta_{t+36})\eta_{t+37})\eta_{t+38})\eta_{t+39})\eta_{t+40}))))). \end{aligned}$$

В силу свободы кольца $F_\omega\mathfrak{J}$ это равенство равносильно одной из следующих *двух* систем равенств:

$$\begin{aligned} & E(e_1, e_2)e_2^s = ((\dots((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9) \\ & \quad (((((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}) (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20})))\eta_{21}) \dots \eta_{t+20}), \\ & E(e_1, e_2) = (((((\eta_{t+21}\eta_{t+22})\eta_{t+23})\eta_{t+24}) (((((\eta_{t+25}\eta_{t+26})\eta_{t+27})\eta_{t+28})\eta_{t+29}) \\ & \quad (((((\eta_{t+30}\eta_{t+31})\eta_{t+32})\eta_{t+33})\eta_{t+34}) (((((\eta_{t+35}\eta_{t+36})\eta_{t+37})\eta_{t+38})\eta_{t+39})\eta_{t+40}))))); \quad (4) \\ & E(e_1, e_2)e_2^s = (((((\eta_{t+21}\eta_{t+22})\eta_{t+23})\eta_{t+24}) (((((\eta_{t+25}\eta_{t+26})\eta_{t+27})\eta_{t+28})\eta_{t+29}) \\ & \quad (((((\eta_{t+30}\eta_{t+31})\eta_{t+32})\eta_{t+33})\eta_{t+34}) (((((\eta_{t+35}\eta_{t+36})\eta_{t+37})\eta_{t+38})\eta_{t+39})\eta_{t+40}))))), \\ & E(e_1, e_2) = ((\dots((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9))(((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14} \quad (5) \\ & \quad (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20})))\eta_{21}) \dots \eta_{t+20}). \end{aligned}$$

Рассмотрим систему равенств (4).

ЛЕММА 5. *Если выполняется первое равенство системы (4), то для любого $i \in \{1, \dots, t+20\}$ $\eta_i \in \{e_1, e_2\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем индукцией по числу t . Заметим, что по построению многочлена $w_{p_1}(\eta_{1_{p_1}}, \eta_{2_{p_1}})$ число t больше 1. Предположим, что $t = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} E(e_1, e_2)e_2^s &= (((((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9))(((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}) \\ & \quad (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20})))\eta_{21})\eta_{22}). \end{aligned}$$

Значит, в силу свободы кольца $F_\omega\mathfrak{J}$ выполняется одна из следующих систем равенств:

$$\begin{aligned} E(e_1, e_2)e_2^{s-1} &= (((((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9) \\ & \quad (((((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}) (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20})))\eta_{21}), \quad (6) \end{aligned}$$

$$e_2 = \eta_{22};$$

$$\begin{aligned} E(e_1, e_2)e_2^{s-1} &= \eta_{22}, \\ & (((((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9))(((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}) \\ & \quad (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20})))\eta_{21}) = e_2. \quad (7) \end{aligned}$$

Заметим, что длина слова e_2 равна 1, а длина слова

$$\begin{aligned} & (((((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9))(((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}) \\ & \quad (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20})))\eta_{21}) \end{aligned}$$

больше 21. Следовательно, второе равенство системы (7) ложно. Рассмотрим систему (6). Первое равенство системы (6) равносильно следующей системе:

$$\begin{aligned} E(e_1, e_2)e_2^{s-2} &= (((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9)) \\ &\quad (((((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14})((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20})), \\ e_2 &= \eta_{21}, \end{aligned} \quad (8)$$

или

$$\begin{aligned} E(e_1, e_2)e_2^{s-2} &= \eta_{21}, \\ (((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9)) &\quad (((((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}) \\ &\quad (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20}))) = e_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Легко понять, что система (9) ложна. Следовательно, должна выполняться система (8). Предположим, что $s - 2 > 0$. Тогда из первого равенства системы (8) получаем

$$\begin{aligned} E(e_1, e_2)e_2^{s-3} &= (((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9)), \\ e_2 &= (((((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14})((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20})); \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E(e_1, e_2)e_2^{s-3} &= (((((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14})((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20}), \\ e_2 &= (((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9)). \end{aligned} \quad (11)$$

Длина слова $((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9)$ больше 9, а длина слова $((((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14})((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20})$ больше 11. Так как длина слова e_2 равна 1, в силу свободы кольца $F_\omega\mathfrak{J}$ системы равенств (10) и (11) ложны. Допустим теперь, что $s - 2 = 0$. Тогда первое равенство системы (8) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} E(e_1, e_2) &= (((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9)) \\ &\quad (((((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}) \\ &\quad (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20}))). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает одна из следующих систем:

$$\begin{aligned} (((((e_1e_2)e_2)e_2)e_2)((((e_1e_2)e_2)e_2)e_2)e_2)) &= (((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9)), \\ (((((e_1e_2)e_2)e_2)((((e_1e_2)e_2)e_2)e_2)) &= (((((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}) \\ &\quad (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20}))); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (((((e_1e_2)e_2)e_2)((((e_1e_2)e_2)e_2)e_2)) &= (((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9)), \\ (((((e_1e_2)e_2)e_2)e_2)((((e_1e_2)e_2)e_2)e_2)) &= (((((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}) \\ &\quad (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20}))). \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим систему равенств (12). Из второго равенства системы (12) получаем

$$\begin{aligned} ((e_1e_2)e_2)e_2 &= (((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}, \\ (((((e_1e_2)e_2)e_2)e_2)) &= (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20}); \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} ((e_1e_2)e_2)e_2 &= (((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20}, \\ (((((e_1e_2)e_2)e_2)e_2)) &= (((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13})\eta_{14}. \end{aligned} \quad (15)$$

Легко понять, что системы (14) и (15) ложны. Рассмотрим систему (13).

ЛЕММА 6. Если выполняется система (13), то для любого $i \in \{1, \dots, t + 20\}$ $\eta_i \in \{e_1, e_2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из первого равенства системы (13) получаем

$$((e_1 e_2) e_2) e_2 = (((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8) \eta_9, \quad (((e_1 e_2) e_2) e_2) e_2 = ((\eta_1 \eta_2) \eta_3) \eta_4; \quad (16)$$

$$((e_1 e_2) e_2) e_2 = ((\eta_1 \eta_2) \eta_3) \eta_4, \quad (((e_1 e_2) e_2) e_2) e_2 = (((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8) \eta_9. \quad (17)$$

Так как длина слова $((e_1 e_2) e_2) e_2$ равна 4, а длина слова $((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8$ больше 5, равенство $((e_1 e_2) e_2) e_2 = (((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8) \eta_9$ ложно. Следовательно, ложна и система (16).

Рассмотрим систему (17). Из первого равенства системы (17) получаем

$$(e_1 e_2) e_2 = \eta_4, \quad e_2 = (\eta_1 \eta_2) \eta_3; \quad (18)$$

$$(e_1 e_2) e_2 = (\eta_1 \eta_2) \eta_3, \quad e_2 = \eta_4. \quad (19)$$

Легко понять, что $e_2 \neq (\eta_1 \eta_2) \eta_3$. Поэтому система (18) неверна. Из системы (19) получаем

$$e_1 e_2 = \eta_3, \quad e_2 = \eta_1 \eta_2; \quad (20)$$

$$e_1 e_2 = \eta_1 \eta_2, \quad e_2 = \eta_3. \quad (21)$$

Так как $e_2 \neq \eta_1 \eta_2$, система (20) ложна. Следовательно, имеет место система (21), из которой получаем $\eta_1 = e_1$, $\eta_2 = e_2$ или $\eta_1 = e_2$, $\eta_2 = e_1$. Таким образом, если выполняется первое равенство системы (17), то для любого $i \in \{1, \dots, 4\}$ $\eta_i \in \{e_1, e_2\}$. Из второго равенства системы (17) вытекают равенства

$$((e_1 e_2) e_2) e_2 = \eta_9, \quad e_2 = ((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8; \quad (22)$$

$$((e_1 e_2) e_2) e_2 = (((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8), \quad e_2 = \eta_9.$$

Так как $e_2 \neq ((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8$, система (22) ложна. Поэтому

$$(e_1 e_2) e_2 = \eta_8, \quad e_2 = (\eta_5 \eta_6) \eta_7; \quad (23)$$

$$(e_1 e_2) e_2 = (\eta_5 \eta_6) \eta_7, \quad e_2 = \eta_8. \quad (24)$$

Так как $e_2 \neq (\eta_5 \eta_6) \eta_7$, имеем (23). Из (23) вытекает, что для $i \in \{5, 6, 7\}$ $\eta_i \in \{e_1, e_2\}$. Следовательно, для $i \in \{1, \dots, 9\}$ $\eta_i \in \{e_1, e_2\}$. Второе равенство системы (13) рассматривается совершенно аналогично. Лемма 6 доказана.

Таким образом, мы показали, что если выполняется первое равенство системы (4) и $t = 2$, то выполняется система (13) и $\eta_{21}, \eta_{22} \in \{e_1, e_2\}$. По лемме 6 получаем, что для $i \in \{1, \dots, 22\}$ $\eta_i \in \{e_1, e_2\}$. Следовательно, база индукции доказана.

Предположим, что лемма 5 доказана для всех $t \leq t_0$. Покажем, что лемма 5 справедлива и для $t = t_0 + 1$. Допустим, что первое равенство системы (4) справедливо при $t = t_0 + 1$. Тогда

$$E(e_1, e_2) e_2^{s-1} = \eta_{t_0+21},$$

$$((\dots (((((\eta_1 \eta_2) \eta_3) \eta_4) (((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8) \eta_9)) (((\eta_{10} \eta_{11}) \eta_{12}) \eta_{13}) \eta_{14})$$

$$((((\eta_{15} \eta_{16}) \eta_{17}) \eta_{18}) \eta_{19}) \eta_{20})) \eta_{21} \dots) \eta_{t_0+20} = e_2;$$

$$E(e_1, e_2) e_2^{s-1} = ((\dots (((((\eta_1 \eta_2) \eta_3) \eta_4) (((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8) \eta_9))$$

$$((((\eta_{10} \eta_{11}) \eta_{12}) \eta_{13}) \eta_{14}) (((\eta_{15} \eta_{16}) \eta_{17}) \eta_{18}) \eta_{19}) \eta_{20})) \eta_{21} \dots) \eta_{t_0+20}, \quad (25)$$

$$\eta_{t_0+21} = e_2.$$

Легко понять, что система равенств (24) ложна. По предположению индукции из системы (25) вытекает утверждение леммы 5 для $t = t_0 + 1$. Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 7. Если выполняется второе равенство системы (4), то для любого $i \in \{t+21, \dots, t+40\}$ $\eta_i \in \{e_1, e_2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполняется второе равенство системы (4), то должна выполняться одна из следующих двух систем равенств:

$$\begin{aligned} (((e_1 e_2) e_2) e_2) (((((e_1 e_2) e_2) e_2) e_2) e_2) &= ((((\eta_{t+30} \eta_{t+31}) \eta_{t+32}) \eta_{t+33}) \eta_{t+34}) \\ &\quad ((((\eta_{t+35} \eta_{t+36}) \eta_{t+37}) \eta_{t+38}) \eta_{t+39}) \eta_{t+40}), \\ (((((e_1 e_2) e_2) e_2) e_2) e_2) ((((((e_1 e_2) e_2) e_2) e_2) e_2) e_2) &= ((((\eta_{t+21} \eta_{t+22}) \eta_{t+23}) \eta_{t+24}) \\ &\quad ((((\eta_{t+25} \eta_{t+26}) \eta_{t+27}) \eta_{t+28}) \eta_{t+29})); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} (((e_1 e_2) e_2) e_2) (((((e_1 e_2) e_2) e_2) e_2) e_2) &= ((((\eta_{t+21} \eta_{t+22}) \eta_{t+23}) \eta_{t+24}) \\ &\quad ((((\eta_{t+25} \eta_{t+26}) \eta_{t+27}) \eta_{t+28}) \eta_{t+29}), \\ (((((e_1 e_2) e_2) e_2) e_2) e_2) ((((((e_1 e_2) e_2) e_2) e_2) e_2) e_2) &= ((((\eta_{t+30} \eta_{t+31}) \eta_{t+32}) \eta_{t+33}) \eta_{t+34}) \\ &\quad ((((\eta_{t+35} \eta_{t+36}) \eta_{t+37}) \eta_{t+38}) \eta_{t+39}) \eta_{t+40}). \end{aligned} \quad (27)$$

Легко понять, что система равенств (26) ложна. Рассмотрим систему (27). Из первого равенства системы (27) получаем

$$\begin{aligned} ((e_1 e_2) e_2) e_2 &= (((\eta_{t+25} \eta_{t+26}) \eta_{t+27}) \eta_{t+28}) \eta_{t+29}, \\ (((e_1 e_2) e_2) e_2) e_2 &= ((\eta_{t+21} \eta_{t+22}) \eta_{t+23}) \eta_{t+24}; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} ((e_1 e_2) e_2) e_2 &= ((\eta_{t+21} \eta_{t+22}) \eta_{t+23}) \eta_{t+24}, \\ (((e_1 e_2) e_2) e_2) e_2 &= (((\eta_{t+25} \eta_{t+26}) \eta_{t+27}) \eta_{t+28}) \eta_{t+29}. \end{aligned} \quad (29)$$

Очевидно, что система (28) неверна. Из первого равенства системы (29), как нетрудно убедиться, получаем для $i \in \{t+21, \dots, t+24\}$ $\eta_i \in \{e_1, e_2\}$, а из второго равенства системы (29) для $i \in \{t+25, \dots, t+29\}$ $\eta_i \in \{e_1, e_2\}$. Второе равенство системы (27) рассматривается аналогично. Лемма 7 доказана.

Из лемм 5 и 7 получаем, что если выполняется система (4), то для любого $i \in \{1, \dots, t+40\}$ $\eta_i \in \{e_1, e_2\}$. Заметим, что второе равенство системы (5) в силу соотношения $t \geq 2$ ложно. Следовательно, равенство (3) ложно при $r_1 = 1$, так как в многочлене $w_{p_1}(\eta_{1p_1}, \eta_{2p_1})$ для некоторого i $\eta_i \neq e_1$ и $\eta_i \neq e_2$.

Допустим, что лемма 4 справедлива для любого $r_1 \leq r_0$. Покажем, что она верна и для $r_1 = r_0 + 1$. При $r_1 = r_0 + 1$ равенство (3) имеет вид

$$\begin{aligned} w_{i_1}(e_1, e_2) \cdots w_{i_{r_0}}(e_1, e_2) w_{i_{r_0+1}}(e_1, e_2) &= (((\cdots ((((((\eta_1 \eta_2) \eta_3) \eta_4) ((((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8) \eta_9)) \\ &\quad ((((\eta_{10} \eta_{11}) \eta_{12}) \eta_{13}) \eta_{14}) (((((\eta_{15} \eta_{16}) \eta_{17}) \eta_{18}) \eta_{19} \eta_{20}))) \eta_{21}) \cdots) \eta_{t+20}) \\ &\quad (((((\eta_{t+21} \eta_{t+22}) \eta_{t+23}) \eta_{t+24}) ((((\eta_{t+25} \eta_{t+26}) \eta_{t+27}) \eta_{t+28}) \eta_{t+29})) \\ &\quad ((((((\eta_{t+30} \eta_{t+31}) \eta_{t+32}) \eta_{t+33} \eta_{t+34}) (((((\eta_{t+35} \eta_{t+36}) \eta_{t+37}) \eta_{t+38}) \eta_{t+39}) \eta_{t+40}))))). \end{aligned}$$

В силу свободы кольца $F\mathfrak{J}$ это равенство равносильно одной из следующих двух систем

равенств:

$$\begin{aligned}
 w_{l_1}(e_1, e_2) \cdots w_{l_{r_0}}(e_1, e_2) &= ((\cdots ((((((\eta_1 \eta_2) \eta_3) \eta_4) ((((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8) \eta_9)) \\
 &\quad (((((\eta_{10} \eta_{11}) \eta_{12}) \eta_{13}) \eta_{14}) (((((\eta_{15} \eta_{16}) \eta_{17}) \eta_{18}) \eta_{19} \eta_{20})))))) \eta_{21}) \cdots) \eta_{t+20}), \\
 w_{l_{r_0+1}}(e_1, e_2) &= (((((\eta_{t+21} \eta_{t+22}) \eta_{t+23}) \eta_{t+24}) ((((\eta_{t+25} \eta_{t+26}) \eta_{t+27}) \eta_{t+28}) \eta_{t+29})) \\
 &\quad (((((\eta_{t+30} \eta_{t+31}) \eta_{t+32}) \eta_{t+33} \eta_{t+34}) (((((\eta_{t+35} \eta_{t+36}) \eta_{t+37}) \eta_{t+38}) \eta_{t+39}) \eta_{t+40}))))); \\
 w_{l_1}(e_1, e_2) \cdots w_{l_{r_0}}(e_1, e_2) &= (((((\eta_{t+21} \eta_{t+22}) \eta_{t+23}) \eta_{t+24}) ((((\eta_{t+25} \eta_{t+26}) \eta_{t+27}) \eta_{t+28}) \eta_{t+29})) \\
 &\quad (((((\eta_{t+30} \eta_{t+31}) \eta_{t+32}) \eta_{t+33} \eta_{t+34}) (((((\eta_{t+35} \eta_{t+36}) \eta_{t+37}) \eta_{t+38}) \eta_{t+39}) \eta_{t+40}))))), \\
 w_{l_{r_0+1}}(e_1, e_2) &= ((\cdots ((((((\eta_1 \eta_2) \eta_3) \eta_4) ((((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8) \eta_9)) \\
 &\quad (((((\eta_{10} \eta_{11}) \eta_{12}) \eta_{13}) \eta_{14}) (((((\eta_{15} \eta_{16}) \eta_{17}) \eta_{18}) \eta_{19} \eta_{20})))))) \eta_{21}) \cdots) \eta_{t+20}).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Рассмотрим систему (30). Из второго равенства системы (30) получаем

$$\begin{aligned}
 E(e_1, e_2) e_2^s E(e_1, e_2) &= (((((\eta_{t+21} \eta_{t+22}) \eta_{t+23}) \eta_{t+24}) ((((\eta_{t+25} \eta_{t+26}) \eta_{t+27}) \eta_{t+28}) \eta_{t+29})) \\
 &\quad (((((\eta_{t+30} \eta_{t+31}) \eta_{t+32}) \eta_{t+33} \eta_{t+34}) (((((\eta_{t+35} \eta_{t+36}) \eta_{t+37}) \eta_{t+38}) \eta_{t+39}) \eta_{t+40}))))).
 \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}
 E(e_1, e_2) e_2^s &= (((((\eta_{t+21} \eta_{t+22}) \eta_{t+23}) \eta_{t+24}) ((((\eta_{t+25} \eta_{t+26}) \eta_{t+27}) \eta_{t+28}) \eta_{t+29})) \\
 E(e_1, e_2) &= (((((\eta_{t+30} \eta_{t+31}) \eta_{t+32}) \eta_{t+33} \eta_{t+34}) \\
 &\quad (((((\eta_{t+35} \eta_{t+36}) \eta_{t+37}) \eta_{t+38}) \eta_{t+39}) \eta_{t+40})))));
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
 E(e_1, e_2) &= (((((\eta_{t+21} \eta_{t+22}) \eta_{t+23}) \eta_{t+24}) ((((\eta_{t+25} \eta_{t+26}) \eta_{t+27}) \eta_{t+28}) \eta_{t+29})), \\
 E(e_1, e_2) e_2^s &= (((((\eta_{t+30} \eta_{t+31}) \eta_{t+32}) \eta_{t+33} \eta_{t+34}) \\
 &\quad (((((\eta_{t+35} \eta_{t+36}) \eta_{t+37}) \eta_{t+38}) \eta_{t+39}) \eta_{t+40}))))).
 \end{aligned} \tag{33}$$

Из системы (32) получаем $e_2 = ((\eta_{t+21} \eta_{t+22}) \eta_{t+23}) \eta_{t+24}$ или $e_2 = ((\eta_{t+25} \eta_{t+26}) \eta_{t+27}) \eta_{t+28}) \eta_{t+29}$. Очевидно, что оба эти равенства ложны. Поэтому и система (32) ложна. Из системы (33) получаем $e_2 = (((\eta_{t+30} \eta_{t+31}) \eta_{t+32}) \eta_{t+33}) \eta_{t+34}$ или $e_2 = ((((\eta_{t+35} \eta_{t+36}) \eta_{t+37}) \eta_{t+38}) \eta_{t+39}) \eta_{t+40}$. Так как оба эти равенства ложны, то ложна система (33), а значит, ложна и система (30). Теперь рассмотрим систему (31). Из второго равенства системы (31) получаем

$$\begin{aligned}
 E(e_1, e_2) e_2^s E(e_1, e_2) &= ((\cdots ((((((\eta_1 \eta_2) \eta_3) \eta_4) ((((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8) \eta_9)) \\
 &\quad ((((((\eta_{10} \eta_{11}) \eta_{12}) \eta_{13}) \eta_{14}) \\
 &\quad (((((\eta_{15} \eta_{16}) \eta_{17}) \eta_{18}) \eta_{19}) \eta_{20})))))) \eta_{21}) \cdots) \eta_{t+20})).
 \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned}
 E(e_1, e_2) &= ((\cdots ((((((\eta_1 \eta_2) \eta_3) \eta_4) ((((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8) \eta_9)) \\
 &\quad ((((((\eta_{10} \eta_{11}) \eta_{12}) \eta_{13}) \eta_{14}) \\
 &\quad (((((\eta_{15} \eta_{16}) \eta_{17}) \eta_{18}) \eta_{19}) \eta_{20})))))) \eta_{21}) \cdots) \eta_{t+19})), \\
 E(e_1, e_2) e_2^s &= \eta_{t+20};
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
 E(e_1, e_2) e_2^s &= ((\cdots ((((((\eta_1 \eta_2) \eta_3) \eta_4) ((((\eta_5 \eta_6) \eta_7) \eta_8) \eta_9)) \\
 &\quad ((((((\eta_{10} \eta_{11}) \eta_{12}) \eta_{13}) \eta_{14}) \\
 &\quad (((((\eta_{15} \eta_{16}) \eta_{17}) \eta_{18}) \eta_{19}) \eta_{20})))))) \eta_{21}) \cdots) \eta_{t+19})), \\
 E(e_1, e_2) &= \eta_{t+20}.
 \end{aligned} \tag{35}$$

Очевидно, что первое равенство системы (34) неверно. Из леммы 5 вытекает ложность первого равенства системы (35). Следовательно, ложна и система (31). Лемма 4 доказана.

Лемма 4 доказывает базу индукции леммы 3. Предположим, что равенство (2) не выполняется для любого $r_2 \leq r_0$. Покажем, что равенство (2) ложно и для $r_2 = r_0 + 1$. В самом деле, из равенства (2) при $r_1 > 1$ получаем

$$w_{l_1}(e_1, e_2) \cdots w_{l_{r_1-1}}(e_1, e_2) = w_{p_1}(\eta_{1p_1}, \eta_{2p_1}) \cdots w_{p_{r_0}}(\eta_{1p_{r_0}}, \eta_{2p_{r_0}}), \quad (36)$$

$$w_{l_{r_1}}(e_1, e_2) = w_{p_{r_0+1}}(\eta_{1p_{r_0+1}}, \eta_{2p_{r_0+1}});$$

$$w_{l_1}(e_1, e_2) \cdots w_{l_{r_1-1}}(e_1, e_2) = w_{p_{r_0+1}}(\eta_{1p_{r_0+1}}, \eta_{2p_{r_0+1}}), \quad (37)$$

$$w_{p_1}(\eta_{1p_1}, \eta_{2p_1}) \cdots w_{p_{r_0}}(\eta_{1p_{r_0}}, \eta_{2p_{r_0}}) = w_{l_{r_1}}(e_1, e_2).$$

Рассмотрим систему (36). Допустим, что η_i такое, что $\eta_i \neq e_1$ и $\eta_i \neq e_2$, содержится в $w_{p_1}(\eta_{1p_1}, \eta_{2p_1}) \cdots w_{p_{r_0}}(\eta_{1p_{r_0}}, \eta_{2p_{r_0}})$. Тогда по предположению индукции первое равенство системы (36) ложно. Если же η_i содержится в $w_{p_{r_0+1}}(\eta_{1p_{r_0+1}}, \eta_{2p_{r_0+1}})$, то по предположению индукции ложно второе равенство системы (36). Следовательно, система (36) ложна. Система (37) рассматривается аналогично. Лемма 3 доказана.

Итак, в силу леммы 3 можно считать, что многочлен

$$w_{i_1}(x, y)w_{i_2}(x, y) \cdots w_{i_s}(x, y) - w_{j_1}(x, y)w_{j_2}(x, y) \cdots w_{j_t}(x, y) \quad (38)$$

имеет вид

$$w_{i_1}(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) \cdots w_{i_s}(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) - w_{j_1}(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) \cdots w_{j_t}(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2).$$

Очевидно, что если $\alpha = \gamma = 1, \beta = \delta = 0$ или $\alpha = \gamma = 0, \beta = \delta = 1$, то многочлен (38) равен 0. Таким образом, нам осталось рассмотреть следующие случаи:

- 1) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 0$;
- 2) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = 1$;
- 3) $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 0$;
- 4) $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 1$;
- 5) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 1$;
- 6) $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1$;
- 7) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$;
- 8) $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = 0$;
- 9) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1$;
- 10) $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 0$;
- 11) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 0$;
- 12) $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 1$;
- 13) $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 0$;
- 14) $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = 1$.

Предположим, что имеет место случай 1). Тогда $x = e_1 + e_2, y = e_1$. В силу дистрибутивности и тождества $x^2 = 0$ отсюда получаем, что

$$w_{i_1}(x, y)w_{i_2}(x, y) \cdots w_{i_s}(x, y) - w_{j_1}(x, y)w_{j_2}(x, y) \cdots w_{j_t}(x, y) = w_{i_1}(e_2, e_1)w_{i_2}(e_2, e_1) \cdots w_{i_s}(e_2, e_1) - w_{j_1}(e_2, e_1)w_{j_2}(e_2, e_1) \cdots w_{j_t}(e_2, e_1).$$

ЛЕММА 8. *Равенство вида*

$$w_{i_1}(e_2, e_1)w_{i_2}(e_2, e_1) \cdots w_{i_s}(e_2, e_1) = w_{j_1}(e_1, e_2)w_{j_2}(e_1, e_2) \cdots w_{j_t}(e_1, e_2) \quad (39)$$

в кольце $F_\omega \mathfrak{J}$ ложно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по числу t . Предположим, что $t = 1$. Тогда равенство (39) имеет вид

$$w_{i_1}(e_2, e_1)w_{i_2}(e_2, e_1) \cdots w_{i_s}(e_2, e_1) = w_{j_1}(e_1, e_2). \quad (40)$$

ЛЕММА 9. *Равенство (40) ложно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $s = 1$. Тогда равенство (40) имеет вид $w_{i_1}(e_2, e_1) = w_{j_1}(e_1, e_2)$. Отсюда вытекает

$$E(e_1, e_2)e_2^p = E(e_2, e_1)e_1^k, \quad E(e_1, e_2) = E(e_2, e_1); \quad (41)$$

$$E(e_1, e_2)e_2^p = E(e_2, e_1), \quad E(e_1, e_2) = E(e_2, e_1)e_1^k. \quad (42)$$

Из первого равенства системы (41) получаем либо равенство слов разной длины, либо $e_1 = e_2$. Следовательно, система (41) ложна. Из первого равенства системы (42) получаем $e_2 = (((e_2e_1)e_1)e_1) (((e_2e_1)e_1)e_1)e_1)$ или $e_2 = (((e_2e_1)e_1)e_1)e_1) (((e_2e_1)e_1)e_1)e_1$. Оба эти равенства ложны. Следовательно, при $s = 1$ равенство (40) неверно.

Предположим, что утверждение леммы справедливо для всех $s \leq s_0$. Покажем, что оно верно и для $s = s_0 + 1$. Из равенства (40) при $s = s_0 + 1$ вытекает

$$w_{i_1}(e_2, e_1)w_{i_2}(e_2, e_1) \cdots w_{i_{s_0}}(e_2, e_1) = E(e_1, e_2)e_2^k, \quad w_{i_{s_0+1}}(e_2, e_1) = E(e_1, e_2); \quad (43)$$

$$w_{i_1}(e_2, e_1)w_{i_2}(e_2, e_1) \cdots w_{i_{s_0}}(e_2, e_1) = E(e_1, e_2), \quad w_{i_{s_0+1}}(e_2, e_1) = E(e_1, e_2)e_2^k. \quad (44)$$

Из второго равенства системы (43) получаем, что должно выполняться одно из следующих двух равенств:

$$\begin{aligned} E(e_2, e_1) &= (((e_1e_2)e_2)e_2) (((e_1e_2)e_2)e_2)e_2), \\ E(e_2, e_1) &= (((e_1e_2)e_2)e_2)e_2 (((e_1e_2)e_2)e_2)e_2)e_2). \end{aligned}$$

Легко понять, что оба эти равенства ложны, так как длины слов, стоящих в правых и левых частях равенств, не равны. Следовательно, система (43) не выполняется. Система (44) рассматривается аналогично. Лемма 9 доказана.

Лемма 9 обосновывает базу индукции для леммы 8. Предположим теперь, что утверждение леммы 8 справедливо для всех $t \leq t_0$. Покажем, что лемма выполняется и для $t = t_0 + 1$. Равенство (39) при $t = t_0 + 1$ выполняется тогда и только тогда, когда справедлива одна из следующих систем равенств:

$$w_{i_1}(e_2, e_1)w_{i_2}(e_2, e_1) \cdots w_{i_{s-1}}(e_2, e_1) = w_{j_{t_0+1}}(e_1, e_2), \quad (45)$$

$$w_{j_1}(e_1, e_2)w_{j_2}(e_1, e_2) \cdots w_{j_{t_0}}(e_1, e_2) = w_{i_s}(e_2, e_1);$$

$$\begin{aligned} w_{i_1}(e_2, e_1)w_{i_2}(e_2, e_1) \cdots w_{i_{s-1}}(e_2, e_1) &= w_{j_1}(e_1, e_2)w_{j_2}(e_1, e_2) \cdots w_{j_{t_0}}(e_1, e_2), \\ w_{i_s}(e_2, e_1) &= w_{j_{t_0+1}}(e_1, e_2). \end{aligned} \quad (46)$$

По предположению индукции все четыре равенства, входящие в системы (45) и (46), ложны. Лемма 8 доказана.

Из леммы 8 вытекает, что многочлен (38) входит в многочлен f_2 . Легко проверить, что в случаях 3), 4), 7)–11) и 14) многочлен (38) равен 0, а случаи 6) и 13) тривиально сводятся к случаю 1). Как нетрудно убедиться, случаи 2) и 5) сводятся к случаю 12). Рассмотрим случай 12). Так как $\alpha = \delta = 1, \beta = \gamma = 0$, многочлен (38) имеет вид

$$w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2) - w_{j_1}(e_1, e_2)w_{j_2}(e_1, e_2) \cdots w_{j_t}(e_1, e_2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u_{11}h_1u_{12} &= u_{11}(w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2) \\ &\quad - w_{j_1}(e_1, e_2)w_{j_2}(e_1, e_2) \cdots w_{j_t}(e_1, e_2))u_{12}. \end{aligned}$$

Покажем, что если $u_{11}(w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2))u_{12}$ является одночленом многочлена f_1 , то и слово $u_{11}(w_{j_1}(e_1, e_2)w_{j_2}(e_1, e_2) \cdots w_{j_t}(e_1, e_2))u_{12}$ является одночленом многочлена f_1 . Предположим, что

$$u_{11}(w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2))u_{12} = w_{l_1}(e_1, e_2)w_{l_2}(e_1, e_2) \cdots w_{l_k}(e_1, e_2).$$

Тогда слово $w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2)$ должно быть подсловом слова $w_{l_1}(e_1, e_2)w_{l_2}(e_1, e_2) \cdots w_{l_k}(e_1, e_2)$. Поэтому в кольце $F_\omega \mathfrak{J}$ выполняется равенство

$$w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2) = w_{l_1}(e_1, e_2)w_{l_2}(e_1, e_2) \cdots w_{l_{k-p}}(e_1, e_2) \quad (47)$$

или существует r такое, что $w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2)$ является подсловом слова $w_{l_r}(e_1, e_2)$. Заметим, что, поскольку выполняется равенство (47), слово $u_{11}(w_{j_1}(e_1, e_2)w_{j_2}(e_1, e_2) \cdots w_{j_t}(e_1, e_2))u_{12}$ является одночленом многочлена f_1 и имеет вид $w_{j_1}(e_1, e_2)w_{j_2}(e_1, e_2) \cdots w_{j_t}(e_1, e_2)w_{l_{k-p+1}}(e_1, e_2) \cdots w_{l_k}(e_1, e_2)$. Предположим теперь, что $w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2)$ является подсловом слова $w_{l_r}(e_1, e_2)$. Тогда это слово должно быть равно одному из следующих пяти слов:

$$e_1e_2^i, \quad i \in \{0, 1, \dots, 5\}, \quad (e_1e_2^3)(e_1e_2^4), \quad (e_1e_2^4)(e_1e_2^5), \quad E(e_1, e_2), \quad E(e_1, e_2)e_2^q.$$

Заметим, что длины первых четырех слов не превосходят 20, а длина слова $w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2)$ больше 40. Таким образом, в кольце $F_\omega \mathfrak{J}$ должно выполняться равенство вида $w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2) = E(e_1, e_2)e_2^q$. Из этого равенства очевидным образом вытекает одно из следующих равенств:

$$w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_{s-1}}(e_1, e_2) = e_2, \quad w_{i_s}(e_1, e_2) = e_2.$$

Так как оба эти равенства ложны, то $w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2)$ не является подсловом слова $w_{l_r}(e_1, e_2)$, а значит, слово $u_{11}(w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_s}(e_1, e_2))u_{12}$ является одночленом многочлена f_1 тогда и только тогда, когда слово $u_{11}(w_{j_1}(e_1, e_2)w_{j_2}(e_1, e_2) \cdots w_{j_t}(e_1, e_2))u_{12}$ является одночленом этого многочлена.

Итак, мы показали, что если многочлен h_1 соответствует тождеству многообразия $\mathfrak{M}$, то многочлен $u_{11}h_1u_{12}$ представим в виде суммы $f_1 + f_2$, где f_1 и f_2 – многочлены с указанными выше свойствами.

Случай многообразия $\mathfrak{B}$. Так как многочлен h_1 получен из тождества многообразия $\mathfrak{B}$, он имеет вид $zw_1(x, y)w_2(x, y) - zw_2(x, y)w_1(x, y)$. Без ограничения общности можно считать, что в многочлен $\sum_{i,j} u_{ii}h_ju_{i2}$ входят только образующие e_1 и e_2 .

Кроме того, в силу дистрибутивности и линейности вхождения z в многочлен $u_{11}h_1u_{12}$ можно считать, что z – одночлен. Представим x и y в виде $\alpha e_1 + \beta e_2 + x^*(e_1, e_2)$ и $\gamma e_1 + \delta e_2 + y^*(e_1, e_2)$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1\}$, $x^*(e_1, e_2), y^*(e_1, e_2)$ – многочлены от e_1, e_2 , нижняя степень которых не меньше 2. Тогда

$$\begin{aligned} & zw_1(x, y)w_2(x, y) - zw_2(x, y)w_1(x, y) \\ &= zw_1(\alpha e_1 + \beta e_2 + x^*(e_1, e_2), \gamma e_1 + \delta e_2 + y^*(e_1, e_2)) \\ &\quad w_2(\alpha e_1 + \beta e_2 + x^*(e_1, e_2), \gamma e_1 + \delta e_2 + y^*(e_1, e_2)) \\ &\quad - zw_2(\alpha e_1 + \beta e_2 + x^*(e_1, e_2), \gamma e_1 + \delta e_2 + y^*(e_1, e_2)) \\ &\quad w_1(\alpha e_1 + \beta e_2 + x^*(e_1, e_2), \gamma e_1 + \delta e_2 + y^*(e_1, e_2)) \\ &= zw_1(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2)w_2(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) \\ &\quad - zw_2(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2)w_1(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) + U(e_1, e_2), \end{aligned}$$

где $U(e_1, e_2)$ – многочлен, в каждый одночлен которого в качестве подслова входит одночлен многочлена $x^*(e_1, e_2)$ или $y^*(e_1, e_2)$. Покажем, что каждый одночлен многочлена $U(e_1, e_2)$ является одночленом многочлена f_2 . Допустим противное. Тогда в кольце $F_\omega \mathfrak{J}$ должно выполняться равенство следующего вида:

$$w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) \cdots w_{i_k}(e_1, e_2) = zw_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)w_2(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4), \quad (48)$$

причем для некоторого j $\eta_j \neq e_1$ и $\eta_j \neq e_2$.

ЛЕММА 10. *Равенство (48) ложно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что равенство (48) имеет место. Пусть $k = 1$. Тогда равенство (48) имеет вид $w_{i_1}(e_1, e_2) = zw_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)w_2(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4)$. Отсюда, как нетрудно убедиться, вытекает одна из следующих систем равенств:

$$E(e_1, e_2)e_2^s = zw_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2), \quad E(e_1, e_2) = w_2(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4); \quad (49)$$

$$E(e_1, e_2)e_2^s = w_2(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4), \quad E(e_1, e_2) = zw_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2). \quad (50)$$

Рассмотрим систему (49). Легко понять, что длина слова $w_2(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4)$ больше 40, а длина слова $E(e_1, e_2)$ равна 20. Следовательно, второе равенство системы (49) не выполняется, а значит, система (49) ложна. Из системы (50) вытекает одно из следующих равенств:

$$e_2 = (((\cdots((((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9))(((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13}\eta_{14}))$$

$$((((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20}))))\eta_{21}) \cdots \eta_{t+20})),$$

$$e_2 = ((((((\eta_{t+21}\eta_{t+22})\eta_{t+23})\eta_{t+24})(((\eta_{t+25}\eta_{t+26})\eta_{t+27})\eta_{t+28})\eta_{t+29}))$$

$$((((((\eta_{t+30}\eta_{t+31})\eta_{t+32})\eta_{t+33}\eta_{t+34})((((((\eta_{t+35}\eta_{t+36})\eta_{t+37})\eta_{t+38})\eta_{t+39})\eta_{t+40})))))).$$

Очевидно, что оба эти равенства ложны. Следовательно, ложна и система (50). Таким образом, при $k = 1$ равенство (48) ложно. Пусть $k = 2$. Тогда равенство (48) имеет вид $w_{i_1}(e_1, e_2)w_{i_2}(e_1, e_2) = zw_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)w_2(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4)$. Отсюда, как нетрудно убедиться, вытекает одна из следующих систем равенств:

$$w_{i_1}(e_1, e_2) = zw_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2), \quad w_{i_2}(e_1, e_2) = w_2(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4); \quad (51)$$

$$w_{i_1}(e_1, e_2) = w_2(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4), \quad w_{i_2}(e_1, e_2) = zw_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2). \quad (52)$$

Рассмотрим систему (51). В силу леммы 3 из равенства $w_{i_2}(e_1, e_2) = w_2(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4)$ вытекает, что если для любого j η_j входит в w_2 , то $\eta_j = e_1$ или $\eta_j = e_2$. Следовательно, существует j такое, что $\eta_j \neq e_1$ и $\eta_j \neq e_2$, и, кроме того, η_j – подслово слова w_1 . Из равенства $w_{i_1}(e_1, e_2) = zw_1(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4)$ вытекает одно из следующих равенств:

$$E(e_1, e_2)e_2^s = w_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2), \quad E(e_1, e_2) = w_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2).$$

Поскольку длина слова $w_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)$ больше 40, а длина слова $E(e_1, e_2)$ равна 20, второе равенство ложно. Из первого равенства вытекает одно из следующих двух равенств:

$$\begin{aligned} e_2 &= ((\cdots (((((\eta_1\eta_2)\eta_3)\eta_4)((\eta_5\eta_6)\eta_7)\eta_8)\eta_9))(((\eta_{10}\eta_{11})\eta_{12})\eta_{13}\eta_{14}) \\ &\quad (((((\eta_{15}\eta_{16})\eta_{17})\eta_{18})\eta_{19})\eta_{20})))\eta_{21})\cdots)\eta_{t+20}), \\ e_2 &= (((((\eta_{t+21}\eta_{t+22})\eta_{t+23})\eta_{t+24})(((\eta_{t+25}\eta_{t+26})\eta_{t+27})\eta_{t+28})\eta_{t+29})) \\ &\quad (((((\eta_{t+30}\eta_{t+31})\eta_{t+32})\eta_{t+33})\eta_{t+34})(((\eta_{t+35}\eta_{t+36})\eta_{t+37})\eta_{t+38})\eta_{t+39})\eta_{t+40}))). \end{aligned}$$

Так как оба эти равенства ложны, то ложно и равенство $w_{i_1}(e_1, e_2) = zw_1(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4)$. Следовательно, система (51) ложна. Система (52) рассматривается аналогично. Поэтому при $k = 2$ равенство (48) не выполняется. Допустим теперь, что $k \geq 3$. Тогда из равенства (48) вытекает одна из следующих систем равенств:

$$w_{i_1}(e_1, e_2) \cdots w_{i_{k-1}}(e_1, e_2) = zw_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2), \quad w_{i_k}(e_1, e_2) = w_2(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4); \quad (53)$$

$$w_{i_1}(e_1, e_2) \cdots w_{i_{k-1}}(e_1, e_2) = w_2(\vec{\eta}_3, \vec{\eta}_4), \quad w_{i_k}(e_1, e_2) = zw_1(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2). \quad (54)$$

В силу леммы 3 второе равенство системы (53) и первое равенство системы (54) ложны. Таким образом, для любого k равенство (48) неверно. Лемма 10 доказана.

ЛЕММА 11. *Если выполняется равенство*

$$w_{i_1}(e_1, e_2) \cdots w_{i_k}(e_1, e_2) = zw_1(x, y)w_2(x, y), \quad (55)$$

то $w_{j_1}(e_1, e_2) \cdots w_{j_p}(e_1, e_2) = z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (55) при $k > 2$ получаем

$$w_{i_1}(e_1, e_2) \cdots w_{i_{k-1}}(e_1, e_2) = zw_1(x, y), \quad w_{i_k}(e_1, e_2) = w_2(x, y) \quad (56)$$

или

$$w_{i_1}(e_1, e_2) \cdots w_{i_{k-1}}(e_1, e_2) = w_2(x, y), \quad w_{i_k}(e_1, e_2) = zw_1(x, y). \quad (57)$$

Рассмотрим систему (56). Из первого равенства этой системы получаем

$$w_{i_1}(e_1, e_2) \cdots w_{i_{k-2}}(e_1, e_2) = z, \quad w_{i_{k-1}}(e_1, e_2) = w_1(x, y)$$

или

$$w_{i_1}(e_1, e_2) \cdots w_{i_{k-2}}(e_1, e_2) = w_1(x, y), \quad w_{i_{k-1}}(e_1, e_2) = z,$$

что и требовалось доказать. Допустим, что выполняется система (57). Тогда из первого равенства этой системы получаем

$$E(e_1, e_2)e_2^s = z, \quad E(e_1, e_2) = w_1(x, y); \quad (58)$$

$$E(e_1, e_2)e_2^s = w_1(x, y), \quad E(e_1, e_2) = z. \quad (59)$$

Очевидно, что второе равенство системы (58) неверно, следовательно, она ложна. Из первого равенства системы (59) получаем одно из следующих двух равенств:

$$\begin{aligned} &(((\cdots((((((x_1 y_1) y_2) y_3) (((x_2 y_4) y_5) y_6) y_7))((((x_3 y_8) y_9) y_{10}) y_{11}) \\ &((((((x_4 y_{12}) y_{13}) y_{14}) y_{15}) y_{16}))) y_{17}) \cdots) y_{t+17} = e_2, \\ &((((((x_5 y_{t+18}) y_{t+19}) y_{t+20}) (((x_6 y_{t+21}) y_{t+22}) y_{t+23}) y_{t+24})) \\ &((((((x_7 y_{t+25}) y_{t+26}) y_{t+27}) y_{t+28}) (((x_8 y_{t+29}) y_{t+30}) y_{t+31}) y_{t+32}) y_{t+33})) = e_2. \end{aligned}$$

Так как оба эти равенства ложны, то ложна система (59), а значит, и система (57). Таким образом, при $k > 2$ равенство (55) не выполняется. Пусть $k = 2$. Тогда из равенства (55) получаем

$$\begin{aligned} w_{i_1}(e_1, e_2) &= zw_1(x, y), & w_{i_2}(e_1, e_2) &= w_2(x, y); \\ w_{i_2}(e_1, e_2) &= zw_1(x, y), & w_{i_1}(e_1, e_2) &= w_2(x, y). \end{aligned}$$

При рассмотрении системы (57) мы показали, что равенства $w_i(e_1, e_2) = zw_j(x, y)$ ложны. Следовательно, при $k = 2$ равенство (55) неверно.

Пусть теперь $k = 1$. Тогда обязательно должно выполняться одно из следующих равенств: $E(e_1, e_2) = zw_1(x, y)$, $E(e_1, e_2) = w_2(x, y)$. Так как длины слов $zw_1(x, y)$ и $w_2(x, y)$ больше 40, а длина слова $E(e_1, e_2)$ равна 20, оба эти равенства ложны. Следовательно, при $k = 1$ равенство (55) неверно. Лемма 11 доказана.

Итак, для завершения доказательства в случае многообразия $\mathfrak{B}$ ввиду лемм 10 и 11 достаточно показать, что многочлен

$$\begin{aligned} &u_{11}(zw_1(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2)w_2(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2) \\ &- zw_2(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2)w_1(\alpha e_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2))u_{12} \end{aligned}$$

при $z = w_{i_1}(e_1, e_2) \cdots w_{i_k}(e_1, e_2)$ представим в виде суммы $f_1 + f_2$, где f_1 и f_2 — многочлены с указанными выше свойствами. Проверка этого факта совершенно аналогична рассуждениям, проведенным при рассмотрении многообразия $\mathfrak{M}$. Лемма 2 доказана.

В силу свободы кольца $F_\omega \mathfrak{J}$ из равенства $\mathfrak{F}(e_1, e_2) = f_1 + f_2$ очевидным образом вытекает, что $\mathfrak{F}(e_1, e_2) = f_1$, $f_2 = 0$. Индукцией по числу одночленов в многочлене f_1 покажем, что если в кольце $\mathfrak{F}(e_1, e_2) = f_1 + f_2$ выполняется равенство $\mathfrak{H} = f_1$, где $\mathfrak{H}$ — многочлен, полученный из многочлена

$$\begin{aligned} &Q_i(e_1, e_2)A^{\xi_1}(e_1, e_2)B^{\xi_2}(e_1, e_2)C(e_1, e_2)D(e_1, e_2) \\ &+ Q_j(e_1, e_2)A^{\eta_1}(e_1, e_2)B^{\eta_2}(e_1, e_2)C(e_1, e_2)D(e_1, e_2) \end{aligned} \quad (60)$$

конечным числом перестановок вида

$$\begin{aligned} A(e_1, e_2)B(e_1, e_2) &\leftrightarrow B(e_1, e_2)A(e_1, e_2), & A(e_1, e_2)D(e_1, e_2) &\leftrightarrow D(e_1, e_2)A(e_1, e_2), \\ B(e_1, e_2)C(e_1, e_2) &\leftrightarrow C(e_1, e_2)B(e_1, e_2), & C(e_1, e_2)D(e_1, e_2) &\leftrightarrow D(e_1, e_2)C(e_1, e_2), \end{aligned} \quad (61)$$

то существует конечное вычисление на машине M , при помощи которого она переходит либо из конфигурации $q_i \xi_1 \xi_2$ в конфигурацию $q_j \eta_1 \eta_2$, либо наоборот.

Допустим, что число одночленов в многочлене f_1 равно 0. Тогда утверждение очевидно. Пусть утверждение справедливо для некоторого числа одночленов d . Покажем, что оно верно и для $d + 1$. Предположим, что в кольце $F_\omega \mathfrak{J}$ выполняется равенство

$\mathfrak{H} = f_1$ и число одночленов в многочлене f_1 не превосходит $d + 1$. Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ одночлены многочлена $\mathfrak{H}$. В силу того, что $\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = \sum_{i,j} v_{i1} h_j v_{i2}$ – равенство в свободном кольце, получаем, что $\mathfrak{H}_1$ является одночленом многочлена $v_{i1} h_j v_{i2}$ для некоторых i, j . Без ограничения общности можно считать, что $i = j = 1$. Так как $v_{11} h_1 v_{12} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$ и $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_1$, из равенства $\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = \sum_{i,j} v_{i1} h_j v_{i2}$ вытекает равенство $\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{H}_2 = \sum_{i>1,j} v_{i1} h_j v_{i2}$. По построению многочлена f_1 , если h_1 соответствует тождеству многообразия $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{H}_2$ – многочлен, полученный при помощи преобразований (61) из многочлена

$$Q_i(e_1, e_2) A^{\xi_1}(e_1, e_2) B^{\xi_2}(e_1, e_2) C(e_1, e_2) D(e_1, e_2) \\ + Q_l(e_1, e_2) A^{\tau_1}(e_1, e_2) B^{\tau_2}(e_1, e_2) C(e_1, e_2) D(e_1, e_2),$$

причем существует команда машины M , при помощи которой машина переходит из конфигурации $q_i \xi_1 \xi_2$ в конфигурацию $q_j \tau_1 \tau_2$, либо наоборот; если же h_1 соответствует тождеству многообразия $\mathfrak{B}$, то замена $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{H}_2$ есть применение одного из преобразований (61). Отсюда вытекает, в силу того что число одночленов в многочлене $\sum_{i>1,j} v_{i1} h_j v_{i2}$ меньше $d + 1$, возможность применения индуктивного предположения к равенству $\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{H}_2 = \sum_{i>1,j} v_{i1} h_j v_{i2}$. Таким образом, из равенства (60) вытекает существование вычисления на машине M между конфигурациями $q_i \xi_1 \xi_2$ и $q_j \eta_1 \eta_2$. Пусть $i = 1, j = 0, \xi_1 = 2^n, \xi_2 = 0, \eta_1 = 1, \eta_2 = 0$. Тогда из равенства (1) вытекает, что существует конечное вычисление на машине M , при помощи которого она переходит из конфигурации $q_1 2^n 0$ в конфигурацию $q_0 1 0$. По определению машины M это означает, что $n \in P$. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 12. Если $n \in P$, то $\mathfrak{X} \models \mathfrak{F}(x, y) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если машина M через конечное число тактов работы переходит из конфигурации $q_i \xi_1 \xi_2$ в конфигурацию $q_j \eta_1 \eta_2$, то в многообразии $\mathfrak{X}$ выполняется тождество

$$Q_i(x, y) A^{\xi_1}(x, y) B^{\xi_2}(x, y) C(x, y) D(x, y) = Q_j(x, y) A^{\eta_1}(x, y) B^{\eta_2}(x, y) C(x, y) D(x, y).$$

Сделаем это индукцией по числу r тактов работы машины M . Допустим, что $r = 0$. Тогда утверждение очевидно. Пусть оно справедливо для некоторого r . Покажем, что оно верно и для $r + 1$. Предположим, что на $(r + 1)$ -м шаге машина M , выполняя команду $q_j \delta_1 \delta_2 \rightarrow q_l \varepsilon_1 \varepsilon_2$, переходит из конфигурации $q_j \eta_1 \eta_2$ в конфигурацию $q_l (\eta_1 + \varepsilon_1)(\eta_2 + \varepsilon_2)$. Следует разобрать четыре случая в зависимости от значений δ_1 и δ_2 . Разберем только случай $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0$, поскольку остальные рассматриваются аналогично. Так как $\delta_1 = 1, \delta_2 = 2$, то $\eta_1 = 0, \eta_2 \neq 0$ и на $(r + 1)$ -м шаге выполняется команда $q_j 1 0 \rightarrow q_l \varepsilon_1 \varepsilon_2$. Следовательно, в многообразии $\mathfrak{X}$ выполняется тождество

$$Q_j(x, y) B(x, y) C(x, y) = Q_l(x, y) A^{\varepsilon_1}(x, y) B^{\varepsilon_2+1}(x, y) C(x, y).$$

Отсюда вытекает, что

$$Q_i(x, y) A^{\xi_1}(x, y) B^{\xi_2}(x, y) C(x, y) D(x, y) = Q_j(x, y) A^{\eta_1}(x, y) B^{\eta_2}(x, y) C(x, y) D(x, y) \\ = Q_j(x, y) B^{\eta_2}(x, y) C(x, y) D(x, y) = Q_j(x, y) B(x, y) C(x, y) B^{\eta_2-1}(x, y) D(x, y) \\ = Q_l(x, y) A^{\varepsilon_1}(x, y) B^{\varepsilon_2+1}(x, y) C(x, y) B^{\eta_2-1}(x, y) D(x, y) \\ = Q_l(x, y) A^{\varepsilon_1}(x, y) B^{\varepsilon_2+\eta_2}(x, y) C(x, y) D(x, y) \\ = Q_l(x, y) A^{\varepsilon_1+\eta_1}(x, y) B^{\varepsilon_2+\eta_2}(x, y) C(x, y) D(x, y).$$

Заметим, что первое равенство в данной цепочке равенств выполняется по предположению индукции, второе и шестое – согласно $\eta_1 = 0$, третье и пятое – в силу тождества $yB(x, y)C(x, y) = yC(x, y)B(x, y)$, четвертое – в силу тождества

$$Q_j(x, y)B(x, y)C(x, y) = Q_l(x, y)A^{\varepsilon_1}(x, y)B^{\varepsilon_2+1}(x, y)C(x, y).$$

Допустим, что $n \in P$. Тогда по определению машины M существует конечное вычисление на машине M , при помощи которого она переходит из конфигурации $q_1 2^n 0$ в конфигурацию $q_0 10$. Следовательно, в многообразии $\mathfrak{X}$ в силу сказанного выше выполняется тождество

$$Q_1(x, y)A^{2^n}(x, y)C(x, y)D(x, y) = Q_0(x, y)A(x, y)C(x, y)D(x, y). \quad (62)$$

Лемма 12 доказана.

В силу лемм 1 и 12 получаем, что в многообразии $\mathfrak{X}$ тождество (62) выполняется тогда и только тогда, когда $n \in P$. Так как множество P не рекурсивно, то теория $\forall \mathfrak{X}$ неразрешима. Теорема доказана.

Заметим, что все выкладки доказательства теоремы без малейших изменений можно перенести на случай, когда вместо многообразия, заданного тождествами $2x = 0$, $x^2 = 0$, рассматривается многообразие, заданное тождествами $2xy = 0$, $x^2 = 0$. Легко понять, что при этом мы построим пример конечно базируемого многообразия колец с неразрешимой эквациональной теорией, в котором свободное кольцо не является кольцом характеристики 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Chin L. H., Tarski A. Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras // Univ. California Publ. Math. (N.S.). 1951. V. 1. P. 341–384.
- [2] Tarski A. Some metalogical results concerning the calculus of relations // J. Symbolic Logic. 1953. V. 18. P. 188–189.
- [3] Tarski A., Givant S. A Formalization of Set Theory without Variables. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 41. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1987.
- [4] Kharlampovich O. G., Sapir M. V. Algorithmic problems in varieties // Internat. J. Algebra Comput. 1995. V. 5. № 4–5. P. 379–602.
- [5] Мальцев А. И. Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп // Матем. сб. 1966. Т. 69. № 1. С. 3–12.
- [6] Коуровская тетрадь. 10-е изд. Новосибирск, 1986.
- [7] Мурский В. Л. Несколько примеров многообразий полугрупп // Матем. заметки. 1968. Т. 3. № 6. С. 663–670.
- [8] Клейман Ю. Г. О тождествах в группах // Тр. ММО. 1982. Т. 44. С. 62–108.
- [9] Попов В. Ю. Эквациональные теории многообразий метабелевых и коммутативных колец // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. № 3. С. 347–361.