Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Давлетшина, Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга два и их деформации, заданные солитонными уравнениями, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 350–358

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10451>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:02:06

Самосопряженные коммутирующие дифференциальные операторы ранга два и их деформации, заданные солитонными уравнениями

В. Н. Давлетшина

В этой работе мы изучаем деформации коммутативных колец самосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов ранга два, заданные солитонными уравнениями.

Библиография: 22 названий.

DOI: 10.4213/mzm10451

1. Введение. Кричевером и Новиковым в [1], [2] введен замечательный класс точных решений солитонных уравнений – решений ранга $l > 1$. Этот класс выделяется следующим условием: совместные собственные функции операторов, входящих в пару Лакса (Захарова–Шабата), и вспомогательных линейных операторов, коммутирующих с ними, образуют векторное расслоение ранга l над спектральной кривой. В этой работе мы изучаем решения ранга два системы

$$V_t = \frac{1}{4}(6VV_x + 6W_x + V_{xxx}), \quad W_t = \frac{1}{2}(-3VW_x - W_{xxx}). \quad (1.1)$$

Эта система эквивалентна условию коммутации самосопряженного оператора четвертого порядка и кососимметричного оператора третьего порядка

$$[L_4, \partial_t - A] = 0, \quad (1.2)$$

где

$$L_4 = (\partial_x^2 + V(x, t))^2 + W(x, t), \quad A = \partial_x^3 + \frac{3}{2}V(x, t)\partial_x + \frac{3}{4}V_x(x, t).$$

При этом мы предполагаем, что при каждом t оператор L_4 входит в коммутативное кольцо дифференциальных операторов ранга 2, т.е. все операторы, коммутирующие с L_4 , имеют четный порядок. По-другому это означает, что размерность пространства совместных собственных функций L_4 и коммутирующего с ним оператора L_{4g+2} при фиксированных общих собственных числах z, w равна двум:

$$\dim_{\mathbb{C}}\{\psi : L_4\psi = z\psi, L_{4g+2}\psi = w\psi\} = 2.$$

Работа выполнена при поддержке Гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований (договор № 14.В25.31.0029) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00124а).

Точка $P = (z, w)$ лежит на гиперэллиптической спектральной кривой Γ , заданной уравнением

$$w^2 = F_g(z) = z^{2g+1} + c_{2g}z^{2g} + \dots + c_0. \quad (1.3)$$

Решение ранга один системы (1.1) (т.е. когда L_4 коммутирует с оператором нечетного порядка) были найдены Дринфельдом и Соколовым [3]. Сложность построения решений ранга два заключается в том, что существует только классификация, полученная Кричевером [4], коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов высокого ранга, но в общем случае такие операторы не найдены. Кричевером и Новиковым [1] найдены операторы ранга два, отвечающие эллиптическим спектральным кривым. Эти операторы изучались в работах [5]–[12]. На ранг три этот результат обобщен Моховым [13]. В случае спектральных кривых рода больше чем один известны только примеры операторов ранга $l > 1$ [14]–[20].

В [15] изучались операторы ранга два L_4 и L_{4g+2} , отвечающие гиперэллиптическим спектральным кривым. Операторы $L_4 - z$, $L_{4g+2} - w$ имеют общий правый делитель $L_2 = \partial_x^2 - \chi_1(x, P)\partial_x - \chi_0(x, P)$:

$$L_4 - z = \tilde{L}_2 L_2, \quad L_{4g+2} - w = \tilde{L}_{4g} L_2.$$

Функции $\chi_0(x, P)$, $\chi_1(x, P)$ – рациональные функции на Γ , удовлетворяющие уравнениям Кричевера–Новикова. Оператор L_4 самосопряжен тогда и только тогда, когда $\chi_1(x, P) = \chi_1(x, \sigma(P))$ [15]. При $g \geq 1$ справедлива теорема [15].

ТЕОРЕМА 1. *Имеют место равенства*

$$\chi_0 = -\frac{Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - V, \quad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q},$$

где Q – полином по z степени g с коэффициентами, зависящими от x :

$$Q = z^g + \alpha_{g-1}(x)z^{g-1} + \dots + \alpha_0(x).$$

Полином Q удовлетворяет уравнению

$$4F_g(z) = 4(z - W)Q^2 - 4V(Q_x)^2 + (Q_{xx})^2 - 2Q_x Q_{xxx} + 2Q(2V_x Q_x + 4V Q_{xx} + Q_{xxx}). \quad (1.4)$$

В [14]–[16] с помощью теоремы 1 построены примеры операторов ранга два для спектральных кривых произвольного рода. Основная цель этой работы – изучить динамику полинома Q при условии, что V и W удовлетворяют (1.1).

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что потенциалы V и W самосопряженного оператора $L_4 = (\partial_x^2 + V(x, t))^2 + W(x, t)$, коммутирующего с оператором L_{4g+2} , удовлетворяют системе (1.1). Тогда полином Q , определенный выше, удовлетворяет уравнению*

$$Q_t = \frac{1}{2}(-3VQ_x - Q_{xxx}). \quad (1.5)$$

Отметим, что (1.5) задает симметрию уравнения (1.4).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогично можно получить эволюционное уравнение на Q , если в (1.2) заменить оператор A на кососимметричный оператор порядка $2n + 1$. Например, при $n = 2, 3$

$$Q_{t_2} = \frac{1}{8}(-4QW_x + 2V_xQ_{xx} + Q_x(8z - 5V^2 + 2W - V_{xx}) - 2VQ_{xxx}), \quad (1.6)$$

$$Q_{t_3} = \frac{1}{32}(-14V^3Q_x - 2V(-6(2QW_x + V_xQ_{xx}) + Q_x(24z + 18W + 5V_{xx})) - 6V^2Q_{xxx} + 2(6W_xQ_{xx} - (8z + 6W + V_{xx})Q_{xxx} + Q_{xx}V_{xxx} + 4QW_{xxx}) - Q_x(7V_x^2 + 10W_{xx} + V_{xxx})). \quad (1.7)$$

Уравнения (1.6) и (1.7) также задают симметрию уравнения (1.4). Ниже мы покажем, что при $g = 1$ уравнение (1.5) сводится к уравнению Кричевера–Новикова, а уравнения (1.6) и (1.7) к уравнениям из иерархии Кричевера–Новикова. Было бы очень интересно записать уравнение (1.5) в более эффектном виде при $g \geq 2$.

Сопоставим теорему 2 с аналогичными результатами для конечнозонных решений уравнения Кортевега–де Фриза (КдВ)

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}).$$

КдВ эквивалентно условию коммутативности дифференциальных операторов

$$\left[\partial_x^2 + u(x, t), \partial_t - \left(\partial_x^3 + \frac{3}{2}u(x, t)\partial_x + \frac{3}{4}u_x(x, t) \right) \right] = 0.$$

Конечнозонные решения выделяются условием

$$[\partial_x^2 + u(x, t), L_{2g+1}] = 0,$$

где L_{2g+1} – дифференциальный оператор порядка $2g + 1$ с коэффициентами, зависящими от t . При этом

$$\partial_x^2 + u(x, t) - z = (\partial_x + \chi)(\partial_x - \chi),$$

где

$$\chi = \frac{w}{2Q} + \frac{Q_x}{Q}, \quad Q(x, t, z) = z^g + \alpha_{g-1}(x, t)z^{g-1} + \dots + \alpha_0(x, t).$$

Полином Q удовлетворяет уравнению

$$4F_g(z) = 4Q^2(z - u) + Q_x^2 - 2QQ_{xx}. \quad (1.8)$$

Спектральная кривая задается уравнением (1.3). Временная динамика Q задается уравнением (см. [21])

$$Q_t = \frac{1}{2}(2z + u)Q_x - \frac{1}{2}Q u_x. \quad (1.9)$$

Таким образом, уравнения (1.4), (1.5) – это аналоги уравнений (1.8), (1.9).

В п. 2 мы напомним определение вектор-функции Бейкера–Ахиезера, а также напомним уравнения Кричевера–Новикова на параметры Тюринга. В п. 3 мы дадим доказательство теоремы 2. В п. 4 мы укажем частные решения уравнений (1.5)–(1.7) при $g = 1$.

2. Функция Бейкера–Ахиезера. Совместная собственная функция попарно коммутирующих операторов L_4 , L_{4g+2} и $\partial_t - A$ является функцией Бейкера–Ахиезера [1]. Напомним ее определение. Пусть задан набор спектральных данных

$$\{\Gamma, q, k^{-1}, \gamma, \alpha\},$$

где Γ – произвольная риманова поверхность рода g , $q \in \Gamma$, k^{-1} – локальный параметр в окрестности точки q , $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_{2g}$ – дивизор, α – множество векторов вида $(1, \alpha_1), \dots, (1, \alpha_{2g})$.

Вектор-функцией Бейкера–Ахиезера называется функция $\psi = (\psi_0, \psi_1)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) в окрестности q вектор-функция ψ имеет вид

$$\psi(x, t, P) = \sum_{s=0}^{\infty} (\xi_s(x, t) k^{-s}) \Psi(x, t, P),$$

где $\xi_0 = (1, 0)$. Матричная функция $\Psi(x, t, P)$ удовлетворяет системе матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = A_1 \Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = A_2 \Psi,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+u & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{u_x}{u} & k + \frac{u}{2} \\ k^2 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{2} - \frac{u_{xx}}{u} & \frac{u_x}{u} \end{pmatrix},$$

u удовлетворяет уравнению $4u_t = u_{xxx} - 6uu_x$. При этом A_1 , A_2 удовлетворяют условию совместности

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_2}{\partial x} = [A_2, A_1];$$

2) компоненты ψ мероморфны на $\Gamma - \{q\}$ с простыми полюсами в $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$, при этом

$$\text{Res}_{\gamma_i} \psi_0 = \alpha_i \text{Res}_{\gamma_i} \psi_1, \quad 1 \leq i \leq 2g.$$

Пара (γ, α) называется *параметрами Тюринга*. Эти параметры определяют полустабильное голоморфное векторное расслоение ранга два на Γ степени $2g$ с набором η_1, η_2 голоморфных сечений, $\gamma_1, \dots, \gamma_{2g}$ – точки их линейной зависимости $\eta_2(\gamma_i) = \alpha_i \eta_1(\gamma_i)$.

Для мероморфных функций $f(P)$ и $g(P)$ с единственными полюсами в q существуют дифференциальные операторы L_f и L_g такие, что

$$L_f \psi = f(P) \psi, \quad L_g \psi = g(P) \psi.$$

Функция ψ удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t - A) \psi = \partial_t \psi - (\partial_x^3 + u_1(x, t) \partial_x + u_2(x, t)) \psi = 0,$$

при этом

$$[L_f, L_g] = 0, \quad [L_f, \partial_t - A] = [L_g, \partial_t - A] = 0.$$

Основная сложность при построении операторов ранга $l > 1$ заключается в том, что ψ нельзя найти явно. Тем не менее операторы и решения высокого ранга можно находить с помощью метода деформации параметров Тюринга, открытого Кричевером и Новиковым [1]. Напомним этот метод. Обозначим через Φ матрицу Вронского

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi_0 & \psi_1 \\ \psi_{0x} & \psi_{1x} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим логарифмические производные χ и Σ матрицы Φ

$$(\partial_x - \chi)\Phi = 0, \quad (\partial_t - \Sigma)\Phi = 0,$$

где

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_0 & \chi_1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_3 & \Sigma_4 \end{pmatrix}.$$

Компоненты этих матриц являются мероморфными функциями с $2g$ простыми полюсами $P_1(x, t), \dots, P_{2g}(x, t)$. Кроме того, в окрестности q справедливы разложения:

$$\chi_0(x, t, P) = k + u(x, t) + O(k^{-1}), \quad \chi_1(x, t, P) = O(k^{-1}),$$

и

$$\begin{aligned} \Sigma_1(x, t, P) &= -\frac{u_x(x, t)}{u(x, t)} + O(k^{-1}), & \Sigma_2(x, t, P) &= k + \frac{u(x, t)}{2} + O(k^{-1}), \\ \Sigma_3(x, t, P) &= k^2 - \frac{u(x, t)}{2} - \frac{u^2(x, t)}{2} - \frac{u_{xx}(x, t)}{u(x, t)} + O(k^{-1}), \\ \Sigma_4(x, t, P) &= \frac{u_x(x, t)}{u(x, t)} + O(k^{-1}). \end{aligned}$$

Пусть $k - \gamma_i(x, t)$ – локальный параметр в окрестности $P_i(x, t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \chi_s &= \frac{c_{i,s}(x, t)}{k - \gamma_i(x, t)} + d_{i,s}(x, t) + O(k - \gamma_i(x, t)), \\ \Sigma_r &= \frac{v_{i,r}(x, t)}{k - \gamma_i(x, t)} + h_{i,r}(x, t) + O(k - \gamma_i(x, t)), \quad 1 \leq r \leq 4. \end{aligned}$$

Справедлива теорема [1]

ТЕОРЕМА 3 (И. М. Кричевер, С. П. Новиков). Пусть

$$\alpha_{i,0} = \frac{c_{i,0}(x, t)}{c_{i,1}(x, t)}, \quad \beta_{i,1} = \frac{v_{i,1}(x, t)}{v_{i,2}(x, t)}, \quad \beta_{i,2} = \frac{v_{i,3}(x, t)}{v_{i,4}(x, t)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \partial_x \gamma_i &= -c_{i,1}(x, t), \\ \partial_x \alpha_{i,0}(x, t) &= -d_{i,0}(x, t) + \alpha_{i,0}(x, t)^2 + \alpha_{i,0}(x, t)d_{i,1}(x, t), \\ \partial_t \gamma_i &= -(v_{i,1}(x, t) + v_{i,2}(x, t)), \\ \partial_t \beta_{i,1}(x, t) &= \beta_{i,1}^2(x, t)h_{i,2}(x, t) - \beta_{i,1}(x, t)h_{i,1}(x, t) \\ &\quad + \beta_{i,1}(x, t)\beta_{i,2}(x, t)h_{i,4}(x, t) - \beta_{i,2}(x, t)h_{i,3}(x, t), \\ \partial_t \beta_{i,2}(x, t) &= (\beta_{i,1}^2(x, t) - 1)(\beta_{i,1}(x, t)h_{i,2}(x, t) + \beta_{i,2}(x, t)h_{i,4}(x, t)). \end{aligned}$$

Для нахождения операторов достаточно решить уравнения из предыдущей теоремы. Таким способом эффективно находятся операторы и решения ранга два в случае эллиптических спектральных кривых [1].

3. Доказательство теоремы 2. Перейдем к доказательству теоремы 2. Напомним, что для оператора L_4 , входящего в (1.2), справедливо разложение (см. [15])

$$L_4 - z = (\partial_x^2 + \chi_1 \partial_x + \chi_3)(\partial_x^2 - \chi_1 \partial_x - \chi_0),$$

где

$$\chi_3 = \chi_0 + \chi_1^2 + 2(V + \chi_{1x}), \quad \chi_0 = -\frac{Q_{xx}}{2Q} + \frac{w}{Q} - V(x, t), \quad \chi_1 = \frac{Q_x}{Q},$$

$$Q = z^g + \alpha_{g-1}(x, t)z^{g-1} + \dots + \alpha_0(x, t).$$

Функция Бейкера–Ахиезера, удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{aligned} L_4 \psi &= z\psi, & L_{4g+2} \psi &= w\psi, \\ \left(\partial_x^3 + \frac{3}{2} V(x, t) \partial_x + \frac{3}{4} V_x(x, t) \right) \psi &= \partial_t \psi, \end{aligned} \quad (3.1)$$

удовлетворяет также уравнению

$$\partial_x^2 \psi = \chi_1 \partial_x \psi + \chi_0 \psi. \quad (3.2)$$

Кроме того,

$$\partial_t \psi = \Sigma_2 \partial_x \psi + \Sigma_1 \psi, \quad (3.3)$$

где Σ_1, Σ_2 – компоненты логарифмической производной матрицы Вронского. Найдем Σ_1 и Σ_2 . Для этого в (3.1) понизим производные по x функции ψ с помощью (3.2). Это дает

$$\Sigma_1 = \frac{QV_x + 2(2VQ_x + Q_{xxx})}{4Q}, \quad \Sigma_2 = \frac{-2QV - 4w - 2Q_{xx}}{4Q}.$$

Теперь из (3.3) находим оставшиеся компоненты матрицы Σ :

$$\begin{aligned} \partial_t \psi_x &= \Sigma_3 \psi + \Sigma_4 \psi_x, \\ \Sigma_3 &= \frac{V(2w - Q_{xx}) + Q(-4z + 2V^2 + 4W + V_{xx})}{4Q}, & \Sigma_4 &= \frac{2QVQ_x - Q^2 V_x}{4Q^2}. \end{aligned}$$

Используя уравнения (1.1) и (1.4), из совместности (3.2) и (3.3) приходим к уравнению (1.5). Теорема 2 доказана.

Аналогично выводятся уравнения (1.6) и (1.7).

4. Иерархия Кричевера–Новикова. В этом разделе мы исследуем уравнения (1.1), (1.5)–(1.7) в случае эллиптической спектральной кривой и получим их частные решения.

Пусть спектральная кривая задается уравнением

$$w^2 = F_1(z) = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0.$$

Тогда из (1.4) вытекает, что при $g = 1$ оператор $L_4 = (\partial_x^2 + V)^2 + W$, где

$$V = \frac{-16F_1((-c_2 - W)/2) + W_{xx}^2 - 2W_x W_{xxx}}{4W_x^2}. \quad (4.1)$$

Система (1.1), а также уравнение (1.5) при выполнении (4.1), сводится к уравнению Кричевера–Новикова

$$W_{t_1} = \frac{48F_1((-c_2 - W)/2) - 3W_{xx}^2 + 2W_x W_{xxx}}{8W_x}. \quad (4.2)$$

Уравнение (4.2) возникает при построении решений ранга два уравнения Кадомцева–Петвиашвили [1]. Уравнения

$$[L_4, \partial_{t_n} - A_{2n+1}] = 0$$

при $n = 2, 3$, где

$$\begin{aligned} A_5 &= \partial_x^5 + \frac{5}{2}V\partial_x^3 + \frac{15}{4}V_x\partial_x^2 + \frac{5}{8}(3V^2 + 2W + 5V_{xx})\partial_x + \frac{5}{16}(6VV_x + 2W_x + 3W_{xxx}), \\ A_7 &= \partial_x^7 + \frac{7}{2}V\partial_x^5 + \frac{35}{4}V_x\partial_x^4 + \frac{7}{8}(5V^2 + 2W + 15V_{xx})\partial_x^3 \\ &\quad + \frac{7}{16}(30VV_x + 6W_x + 25V_{xxx})\partial_x^2 \\ &\quad + \frac{7}{32}(10V^3 + 35V_x^2 + 2V(6W + 25V_{xx}) + 14W_{xx} + 23V_{xxx})\partial_x \\ &\quad + \frac{7}{64}(30V^2V_x + 12WV_x + 60V_xV_{xx} + 6V(2W_x + 5V_{xxx}) + 10W_{xxx} + 9V_{xxxx}) \end{aligned}$$

принимают вид

$$V_{t_2} = \frac{1}{16}(30V^2V_x + 20WV_x + 20V_xV_{xx} + 10V(2W_x + V_{xxx}) + 10W_{xxx} + \partial_x^5V), \quad (4.3)$$

$$W_{t_2} = \frac{1}{8}(-5V^2W_x + 10WW_x - 5W_xV_{xx} - 10V_xW_{xx} - 10VW_{xxx} - 2\partial_x^5W), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} V_{t_3} &= \frac{1}{64}(140V^3V_x + 70V_x^3 + 168WW_x + 28WV_{xxx} + 70V_{xx}V_{xxx} \\ &\quad + 14V^2(6W_x + 5V_{xxx}) + V_x(-56W_{xx} + 42\partial_x^4V) \\ &\quad + 14V(12WV_x + 20V_xV_{xx} - 2W_{xxx} + \partial_x^5V) - 14\partial_x^5W + \partial_x^7V), \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} W_{t_3} &= \frac{1}{32}(-14V^3W_x - 7V_x^2W_x - 70W_xW_{xx} + 42W_{xx}V_{xxx} + 42V^2W_{xxx} \\ &\quad - 28WW_{xxx} + 70V_{xx}W_{xxx} + 7W_x\partial_x^4V + 56V_x\partial_x^4W \\ &\quad + 14V(-6WW_x + W_xV_{xx} + 6V_xW_{xx}^2 + 2\partial_x^5W) + 4\partial_x^7W). \end{aligned} \quad (4.6)$$

При подстановке (4.1) эти системы сводятся к уравнениям иерархии Кричевера–Новикова

$$\begin{aligned} W_{t_2} &= \frac{1}{128W_x^3}(-1280F_1^2(\gamma) - 16(4c_2 + 2W - F_{1xx}(\gamma))W_x^4 - 45W_{xx}^4 \\ &\quad + 100W_xW_{xx}^2W_{xxx} + 160F_1(\gamma)(5W_{xx}^2 - 2W_xW_{xxx}) \\ &\quad + 20W_x^2(-W_{xxx}^2 + 2W_{xx}(4F_{1x}(\gamma) - \partial_x^4W)) + 8W_x^3\partial_x^5W), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
W_{t_3} = & \frac{1}{1024W_x^5} (28672F_1^3(\gamma) + 64W_x^6W_{xx} - 1575W_{xx}^6 \\
& + 4998W_xW_{xx}^4W_{xxx} + 8960)F_1^2(\gamma)(-7W_{xx}^2 + 2W_xW_{xxx}) \\
& - 28W_x^2W_{xx}^2(139W_{xxx}^2 + 66W_{xx}\partial_x^4W) \\
& + 56W_x^3(7W_{xxx}^3 + 34W_{xx}W_{xxx}\partial_x^4W + 9W_{xx}^2\partial_x^5W) - 16F_1(\gamma) - 1813W_{xx}^4 \\
& + 4W_x(24(2c_2 - W)W_x^3 + 595W_{xx}^2W_{xxx} \\
& - 7W_x(11W_{xxx}^2 + 18W_{xx}\partial_x^4W) + 14W_x^2\partial_x^5W) \\
& + 8W_x^4(-7(3(\partial_x^4W)^2 + 4W_{xxx}\partial_x^5W) + 2W_{xx}(6(2c_2 - W)W_{xx} - 7\partial_x^7W)) \\
& + 16W_x^5(4(-2c_2 + W)W_{xxx} + \partial_x^7W), \tag{4.8}
\end{aligned}$$

где $\gamma = -(c_2 + W)/2$.

Найдем автомодельные решения уравнений (1.1), (4.3) и (4.4), (4.5) и (4.6).

ТЕОРЕМА 4. Системы (1.1), (4.3) и (4.4), (4.5) и (4.6) имеют следующие решения:

$$\begin{aligned}
V(x, t_1) &= -10\wp(at_1 + x) - \frac{2a}{21}, \quad W(x, t_2) = -40\wp^2(at_1 + x) - \frac{20}{21}(8a + 7g_2)\wp(at_1 + x), \\
V(x, t_2) &= -8\wp(at_2 + x) - \frac{2g_2}{3}, \quad W(x, t_2) = 24\wp^2(at_2 + x) + 4g_2\wp(at_2 + x) + \frac{4a}{5}, \\
V(x, t_3) &= -10\wp(at_3 + x) + b, \quad W(x, t_3) = -40\wp^2(at_3 + x) + 8b\wp(at_3 + x),
\end{aligned}$$

a и b – некоторые константы, функция $\wp(z)$ – эллиптическая функция Вейерштрасса, удовлетворяющая уравнению

$$(\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) + g_2\wp^2(z) + g_1\wp(z) + g_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 4 заключается в прямой проверке. Отметим, что конечнозонные решения уравнения Кричевера–Новикова (4.2) изучались в [22].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения”, *УМН*, **35**:6 (1980), 47–68.
- [2] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Двумеризованная цепочка Тоды, коммутирующие разностные операторы и голоморфные расслоения”, *УМН*, **58**:3 (2003), 51–88.
- [3] В. Г. Дринфельд, В. В. Соколов, “Симметрии в уравнениях Лакса”, *Интегрируемые системы*, ред. А. Б. Шабат, Уфа, 1982.
- [4] И. М. Кричевер, “Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:3 (1978), 20–31.
- [5] P. Dehornoy, “Operateurs différentiels et courbes elliptiques”, *Compositio Math.*, **43**:1 (1981), 71–99.
- [6] П. Г. Гриневич, “Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:1 (1982), 19–24.
- [7] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, “О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами”, *Функц. анализ и его прил.*, **16**:1 (1982), 25–26.
- [8] F. A. Grünbaum, “Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six”, *Phis. D*, **31**:3 (1988), 424–433.

- [9] G. A. Latham, “Rank 2 commuting ordinary differential operators and Darboux conjugates of KdV”, *Appl. Math. Lett.*, **8**:6 (1995), 73–78.
- [10] G. Latham, E. Previato, “Darboux transformations for higher-rank Kadomtsev–Petviashvili and Krichever–Novikov equations”, *Acta Appl. Math.*, **39**:1–3 (1995), 405–433.
- [11] E. Previato, “Seventy years of spectral curves: 1923–1993”, *Integrable Systems at Quantum Groups*, Lecture Notes in Math., **1620**, Springer-Verlag, Berlin, 1996, 419–481.
- [12] E. Previato, G. Wilson, “Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves”, *Compositio Math.*, **81**:1 (1992), 107–119.
- [13] О. И. Мохов, “Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:6 (1989), 1291–1315.
- [14] В. Н. Давлетшина, “О самосопряженных коммутирующих дифференциальных операторах ранга два”, *Сиб. электрон. матем. изв.*, **10** (2013), 109–112.
- [15] A. E. Mironov, “Self-adjoint commuting ordinary differential operators”, *Invent. Math.*, **197**:2 (2014), 417–431.
- [16] A. E. Mironov, “Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **234** (2014), 309–322.
- [17] А. Е. Миронов, “Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два”, *Матем. сб.*, **195**:5 (2004), 103–114.
- [18] А. Е. Миронов, “Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 2”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:3 (2005), 91–94.
- [19] О. И. Мохов, “О коммутативных подалгебрах алгебр Вейля, связанных с коммутирующими операторами произвольного ранга и рода”, *Матем. заметки*, **94**:2 (2013), 314–316.
- [20] D. Zuo, “Commuting differential operators of rank 3 associated to a curve of genus 2”, *SIGMA*, **8** (2012), 044, 11 pp.
- [21] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, “Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия”, *УМН*, **31**:1 (1976), 55–136.
- [22] Д. П. Новиков, “Алгебро-геометрические решения уравнения Кричевера–Новикова”, *ТМФ*, **121**:3 (1999), 367–373.

В. Н. Давлетшина

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
Новосибирский государственный университет
E-mail: v.davletshina@gmail.com

Поступило

02.12.2013

Исправленный вариант

16.12.2013