Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Желябин, А. С. Захаров, Специальность йордановых супералгебр, связанных с алгебрами Новикова–Пуассона, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 359–367

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:05:27

Специальность йордановых супералгебр, связанных с алгебрами Новикова–Пуассона

В. Н. Желябин, А. С. Захаров

В работе доказывается специальность йордановых супералгебр, соответствующих алгебрам Новикова–Пуассона.

Библиография: 24 названий.

DOI: 10.4213/mzm10452

Введение. Хорошо известно, что йордановы (супер)алгебры делятся на специальные и исключительные (супер)алгебры. К специальным относятся те (супер)алгебры, которые являются подалгебрами йордановых (супер)алгебр, ассоциированных с ассоциативными алгебрами.

В работе [1] Кантор ввел в рассмотрение функтор, ставящий в соответствие ассоциативной коммутативной (супер)алгебре йорданову супералгебру. Эта конструкция получила название дубль Кантора и позволяет построить йорданову супералгебру по ассоциативной коммутативной супералгебре с заданной на ней билинейной суперкососимметричной операцией, которую называют скобкой. Полученную супералгебру также называют супералгеброй йордановой скобки или точка-скобка супералгеброй (см. [2]). Естественно, возникает вопрос специальности супералгебры йордановой скобки.

Шестаков в [3], а также Кинг и МакКриммон в [2], [4] показали, что йорданова супералгебра, построенная по скобке векторного типа, является специальной. Кроме того, в [2], [4] показано, что йордановы супералгебры, построенные из алгебр классических и грассмановых скобок Пуассона, не являются специальными. С другой стороны, Скосырский [5] и Шестаков [6] показали, что йордановы супералгебры классических и грассмановых скобок Пуассона являются гомоморфными образами специальных алгебр, т.е. являются слабоспециальными. Затем в работе [7] было показано, что если алгебра Пуассона допускает алгебраическую деформацию квантования, то соответствующая ей йорданова супералгебра слабоспециальна. Используя этот факт, Зельманов, Мартинес и Шестаков показали в [8], что супералгебра йордановой скобки является слабоспециальной. В [9] Шестаковым найдены необходимые условия специальности супералгебры йордановой скобки.

Алгебры Новикова возникли в работах Гельфанда и Дорфмана [10], Балинского и Новикова [11]. Изучению простых алгебр Новикова посвящены работы [12]–[17].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00014).

Алгебры Новикова–Пуассона были введены Ксу [18]. Каждая алгебра Новикова–Пуассона с ассоциативной коммутативной единицей может быть получена из ассоциативной коммутативной алгебры с дифференцированием. Такие алгебры будем называть алгебрами Новикова–Пуассона векторного типа. Отметим, что все описанные в [13], [17], [19] примеры простых алгебр Новикова является алгебрами Новикова–Пуассона векторного типа.

Связь между йордановыми супералгебрами и алгебрами Новикова–Пуассона с ассоциативной коммутативной единицей была установлена в [20]. Как оказалось, йорданова супералгебра, соответствующая такой алгебре Новикова–Пуассона, является супералгеброй векторного типа. Более того, в [21] показано, что в этом случае алгебра Новикова–Пуассона проста тогда и только тогда, когда проста соответствующая ей йорданова супералгебра. Там же был поставлен вопрос о необходимости условия наличия ассоциативной коммутативной единицы. В работе [22] был дан ответ на этот вопрос. В частности, показано, что коммутатор относительно умножения Новикова является йордановой скобкой на ассоциативной коммутативной части алгебры Новикова–Пуассона.

Как уже отмечалось, каждой алгебре Новикова–Пуассона векторного типа соответствует йорданова супералгебра векторного типа, которая является специальной йордановой супералгеброй. В [23] показана специальность соответствующей йордановой супералгебры в случае, когда ассоциативная коммутативная часть алгебры Новикова–Пуассона имеет хотя бы один делитель нуля. А именно, строится вложение алгебры Новикова–Пуассона, с хотя бы одним делителем нуля ассоциативной коммутативной алгебры, в алгебру Новикова–Пуассона векторного типа. В данной работе доказывается специальность йордановой супералгебры, соответствующей алгебре Новикова–Пуассона, в общем случае.

1. Йордановы и $(-1, 1)$ -супералгебры. Пусть $\mathbb{F}$ – поле характеристики, не равной 2. Тогда $\mathbb{Z}_2$ -градуированной алгеброй или супералгеброй мы будем называть алгебру $A = A_0 \oplus A_1$, где компоненты A_0, A_1 умножаются по правилу

$$A_i A_j \subseteq A_{i+j \pmod{2}}.$$

Подпространство A_0 – четная часть супералгебры A , A_1 – нечетная. Определим для однородных элементов $x \in A_0 \cup A_1$ функцию четности, полагая

$$|x| = i \quad \text{при} \quad x \in A_i.$$

Пусть G – алгебра Грассмана над $\mathbb{F}$, т.е. ассоциативная алгебра, заданная образующими $1, e_1, e_2, \dots$ и определяющими соотношениями $e_i e_j = -e_j e_i$. Произведения $1, e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, образуют базис алгебры G . Пусть G_0, G_1 это подпространства, порожденные, соответственно, произведениями четной и нечетной длины. Тогда $G = G_0 + G_1$ – супералгебра.

Пусть $A = A_0 + A_1$ – произвольная супералгебра. Рассмотрим тензорное произведение $G \otimes A$ над полем $\mathbb{F}$. Тогда $G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$ является подалгеброй в алгебре $G \otimes A$ и называется *грассмановой оболочкой* супералгебры A . Супералгебра A называется *йордановой супералгеброй* тогда и только тогда, когда ее грассманова оболочка $G(A)$ – йорданова алгебра, т.е. в $G(A)$ выполняются тождества:

$$xy = yx, \quad (x^2 y)x = x^2(yx).$$

Супералгебра A называется $(-1, 1)$ -супералгеброй, если ее грассманова оболочка является $(-1, 1)$ -алгеброй, т.е. выполняются тождества:

$$(x, y, y) = 0, \quad (x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0,$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ – ассоциатор элементов x, y, z .

После линеаризации тождеств получим, что в A для однородных элементов должны быть выполнены тождества

$$(x, y, z) + (-1)^{|y||z|}(x, z, y) = 0, \quad (1.1)$$

$$(x, y, z) + (-1)^{|x||y|+|x||z|}(y, z, x) + (-1)^{|x||z|+|y||z|}(z, x, y) = 0. \quad (1.2)$$

ПРИМЕР 1. Пусть Γ – коммутативная ассоциативная супералгебра над $\mathbb{F}$, D – ненулевое четное дифференцирование Γ , т.е. $D(\Gamma_i) \subseteq \Gamma_i$ и $\gamma \in \Gamma_0$. Через $\Gamma\xi$ обозначим изоморфную копию пространства Γ . На прямой сумме векторных пространств $B(\Gamma, D, \gamma) = \Gamma + \Gamma\xi$ определим умножение, полагая

$$\begin{aligned} a \cdot b &= ab, & a \cdot b\xi &= (ab)\xi, & a\xi \cdot b &= (-1)^{|b|}ab\xi, \\ a\xi \cdot b\xi &= (-1)^{|b|}(\gamma ab + 2D(a)b + aD(b)), \end{aligned}$$

где $a, b \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ и ab – произведение в алгебре Γ . Определим на $B(\Gamma, D, \gamma)$ $\mathbb{Z}_2$ -градуировку, полагая

$$B(\Gamma, D, \gamma)_0 = \Gamma_0 + \Gamma_1\xi, \quad B(\Gamma, D, \gamma)_1 = \Gamma_1 + \Gamma_0\xi.$$

Тогда $B(\Gamma, D, \gamma)$ является $(-1, 1)$ -супералгеброй и называется *скрученной супералгеброй векторного типа* [24].

Пусть $B = B_0 + B_1$ – $(-1, 1)$ -супералгебра. Тогда векторное пространство B с новым умножением

$$a \odot_s b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{|a||b|}ba)$$

будет йордановой супералгеброй, которую мы обозначим через $B^{(+)}_s$.

Как уже отмечалось, одним из способов получения йордановых алгебр является конструкция Кантора. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ – произвольная ассоциативная коммутативная алгебра с билинейной кососимметрической операцией $\{ \cdot, \cdot \}$, которую мы будем называть *скобкой*. Построим по $\langle A, \cdot \rangle$ новую супералгебру, которую мы будем называть *дубль Кантора*. Пусть $J(A) = A + A\xi$, где $A\xi$ – изоморфная копия A . Введем на $J(A)$ умножение $\bullet$ следующим образом:

$$a \bullet b = ab, \quad a\xi \bullet b = a \bullet b\xi = (ab)\xi, \quad a\xi \bullet b\xi = \{a, b\},$$

где $a, b \in A$, а ab – произведение элементов a и b в алгебре A . Полученную супералгебру обозначим через $J(A, \{ \cdot, \cdot \})$. Скобка $\{ \cdot, \cdot \}$ называется *йордановой*, если $J(A, \{ \cdot, \cdot \})$ является йордановой супералгеброй. Векторное пространство A – четная часть супералгебры $J(A, \{ \cdot, \cdot \})$, а $A\xi$ – нечетная часть.

ПРИМЕР 2. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ – ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированием ∂ . Определим скобку следующим образом:

$$\{a, b\} = \partial(a)b - a\partial(b).$$

Тогда $J(A, \{\cdot, \cdot\})$ – йорданова супералгебра (см. [2], [3]), которая называется *йордановой супералгеброй векторного типа* и обозначается $J(A, \partial)$. В этом случае скобка $\{\cdot, \cdot\}$ называется *йордановой скобкой векторного типа*. Как легко заметить, для ассоциативно коммутативной алгебры Γ , $B(\Gamma, D, \gamma)^{(+)*}$ является йордановой супералгеброй векторного типа.

Напомним определение специальности йордановой супералгебры. Пусть $B = B_0 + B_1$ – ассоциативная супералгебра с операцией умножения $*$. Также как и в случае $(-1, 1)$ -алгебр определим на пространстве B суперсимметрическое произведение

$$a \odot_s b = \frac{1}{2}(a * b + (-1)^{|a||b|}b * a), \quad a, b \in B_0 \cup B_1,$$

мы получим йорданову супералгебру $B^{(+)*}$.

Йорданова супералгебра $J = J_0 + J_1$ называется *специальной*, если она вложима (как $\mathbb{Z}_2$ -градуированная алгебра) в супералгебру $B^{(+)*}$ для подходящей ассоциативной $\mathbb{Z}_2$ -градуированной алгебры B .

Пусть $J(\Gamma, \partial)$ – йорданова супералгебра векторного типа, где ∂ – ненулевое дифференцирование. В [2]–[4] доказано, что йорданова супералгебра $J(\Gamma, \partial)$ специальна.

2. Обобщенные алгебры Новикова–Пуассона. Пусть $\mathbb{F}$ – поле. Рассмотрим алгебраическую систему $\langle A, \cdot, \circ \rangle$, с двумя операциями умножения $\cdot$ и $\circ$ такую, что $\langle A, \cdot \rangle$ – ассоциативная коммутативная алгебра, в которой верны тождества¹

$$xy \circ z = x(y \circ z), \quad (2.1)$$

$$zx \circ y - x \circ yz = zy \circ x - y \circ xz. \quad (2.2)$$

Назовем $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ *обобщенной алгеброй Новикова–Пуассона*.

Если $\langle A, \cdot \rangle$ – алгебра с единицей 1, то отображение $\partial: A \mapsto A$, заданное следующим образом:

$$\partial(a) = 1 \circ a - a \circ 1,$$

будет дифференцированием алгебры $\langle A, \cdot \rangle$ (см. [18], [21]). Более того, операция $\circ$ будет задаваться следующим правилом:

$$a \circ b = a\partial(b) + (1 \circ 1)ab.$$

Отсюда следует, что $\langle A, \circ \rangle$ – алгебра Новикова, т.е. в ней верны тождества

$$(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ y, \quad (2.3)$$

$$(x \circ y) \circ z - x \circ (y \circ z) = (y \circ x) \circ z - y \circ (x \circ z). \quad (2.4)$$

Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ – обобщенная алгебра Новикова–Пуассона. Если при этом $\langle A, \circ \rangle$ – алгебра Новикова, то $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ – *алгебра Новикова–Пуассона*.

ПРИМЕР 3. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ – ассоциативная алгебра с дифференцированием ∂ . Тогда определим $\circ$ следующим образом:

$$a \circ b = a\partial(b) + \alpha ab,$$

¹Здесь и далее по тексту будем считать, что операция $\cdot$ перед $\circ$ имеет приоритет. При этом символ $\cdot$ мы будем опускать.

где $\alpha \in A$. Тогда $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ будет алгеброй Новикова–Пуассона, которую мы будем называть *алгеброй Новикова–Пуассона векторного типа*. В этом случае алгебру Новикова $\langle A, \circ \rangle$ будем называть *алгеброй Новикова векторного типа*. В частности, если $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ – обобщенная алгебра Новикова–Пуассона и $\langle A, \cdot \rangle$ – алгебра с единицей, то $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ – алгебра Новикова–Пуассона векторного типа.

Рассмотрим произвольную обобщенную алгебру Новикова–Пуассона $\langle A, \cdot, \circ \rangle$. Тогда в качестве скобки можно взять коммутатор относительно умножения Новикова, т.е.

$$\{a, b\} = a \circ b - b \circ a.$$

Если $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ – алгебра Новикова–Пуассона векторного типа, то

$$\{a, b\} = a\partial(b) - b\partial(a),$$

поэтому скобка $\{\cdot, \cdot\}$ является йордановой скобкой векторного типа.

В работе [22] была доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ – обобщенная алгебра Новикова–Пуассона. Тогда коммутатор $\{a, b\} = a \circ b - b \circ a$ будет йордановой скобкой, т.е., построенный по $\langle A, \cdot \rangle$ дубль Кантора $J(A, \{\cdot, \cdot\})$ будет йордановой супералгеброй.

Поэтому, для алгебры Новикова–Пуассона векторного типа, соответствующий ей дубль Кантора будет специальной йордановой супералгеброй.

Также (см. [23]) справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ – обобщенная алгебра Новикова–Пуассона и x неединица нуля в $\langle A, \cdot \rangle$. Тогда соответствующий дубль Кантора $J(A, \{\cdot, \cdot\})$ будет специальной йордановой супералгеброй.

3. Специальность йордановых супералгебр. Основным результатам работы является

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ – обобщенная алгебра Новикова–Пуассона и

$$\{a, b\} = a \circ b - b \circ a.$$

Тогда $J(A, \{\cdot, \cdot\})$ – специальная йорданова супералгебра.

Для доказательства этого факта мы построим по обобщенной алгебре Новикова–Пуассона соответствующую ей $(-1, 1)$ -супералгебру.

Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ – обобщенная алгебра Новикова–Пуассона. Рассмотрим $B(A) = A + A\xi$, где $A\xi$ – изоморфная копия векторного пространства A . Определим на $B(A)$ новое умножение $*$ следующим образом:

$$a * b = ab, \quad a * b\xi = a\xi * b = (ab)\xi, \quad a\xi * b\xi = -2a \circ b - 4b \circ a.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ – обобщенная алгебра Новикова–Пуассона. Тогда $\langle B(A), * \rangle$ – $(-1, 1)$ -супералгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать выполнение тождеств (1.1) и (1.2), т.е.

$$(x, y, z) + (-1)^{|y||z|}(x, z, y) = 0,$$

$$(x, y, z) + (-1)^{|x||y|+|x||z|}(y, z, x) + (-1)^{|x||z|+|y||z|}(z, x, y) = 0.$$

Для этого мы будем использовать тождества (2.1) и (2.2).

Докажем тождество (1.1). Очевидно, что

$$(A, A, A) = (A, A, A\xi) = (A, A\xi, A) = (A\xi, A, A) = 0.$$

Достаточно рассмотреть следующие четыре варианта.

Пусть $x = a$, $y = b\xi$, $z = c\xi$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) + (-1)^{|y||z|}(x, z, y) &= (ab\xi) * c\xi - a(b\xi * c\xi) - (ac\xi) * b\xi + a(c\xi * b\xi) \\ &= -2ab \circ c - 4c \circ ab + a(2b \circ c + 4c \circ b) + (2ac \circ b + 4b \circ ac) - a(2c \circ b + 4b \circ c) \\ &= -4c \circ ab + 4ac \circ b + 4b \circ ac - 4ab \circ c = 0 \end{aligned}$$

в силу (2.2).

Пусть $x = a\xi$, $y = b$, $z = c\xi$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) + (-1)^{|y||z|}(x, z, y) &= (ab\xi) * c\xi - a\xi * bc\xi + (a\xi * c\xi)b - a\xi * (bc\xi) \\ &= -2ab \circ c - 4c \circ ab - (-2a \circ bc - 4bc \circ a) \\ &\quad + (-2a \circ c - 4c \circ a)b - (-2a \circ bc - 4bc \circ a) \\ &= -4ab \circ c - 4c \circ ab + 4bc \circ a + 4a \circ bc = 0. \end{aligned}$$

Пусть $x = a\xi$, $y = b\xi$, $z = c$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) + (-1)^{|y||z|}(x, z, y) &= (a\xi * b\xi)c - a\xi * (bc\xi) + ac\xi * b\xi - a\xi * bc\xi \\ &= (-2a \circ b - 4b \circ a)c - (-2a \circ bc - 4bc \circ a) \\ &\quad + (-2ac \circ b - 4b \circ ac) - (-2a \circ bc - 4bc \circ a) \\ &= -4ac \circ b + 4a \circ bc + 4bc \circ a - 4b \circ ac = 0. \end{aligned}$$

Пусть $x = a\xi$, $y = b\xi$, $z = c\xi$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) + (-1)^{|y||z|}(x, z, y) &= (a\xi * b\xi) * c\xi - a\xi * (b\xi * c\xi) - (a\xi * c\xi) * b\xi + a\xi * (c\xi * b\xi) \\ &= (-2a \circ b - 4b \circ a) * c\xi - a\xi * (-2b \circ c - 4c \circ b) \\ &\quad - (-2a \circ c - 4c \circ a) * b\xi + a\xi * (-2c \circ b - 4b \circ c) \\ &= (-2ac \circ b - 4bc \circ a + 2ab \circ c + 4ac \circ b + 2ab \circ c + 4bc \circ a - 2ac \circ b - 4ab \circ c)\xi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, (1.1) доказано.

Докажем тождество (1.2). Аналогично предыдущему случаю, достаточно рассмотреть четыре варианта.

Пусть $x = a$, $y = b\xi$, $z = c\xi$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) + (-1)^{|x||y|+|x||z|}(y, z, x) + (-1)^{|x||z|+|y||z|}(z, x, y) &= ab\xi * c\xi - a(b\xi * c\xi) + (b\xi * c\xi)a - b\xi * ac\xi - ac\xi * b\xi + c\xi * ab\xi \\ &= (-2ab \circ c - 4c \circ ab) - a(-2b \circ c - 4c \circ b) + (-2b \circ c - 4c \circ b)a \\ &\quad - (-2b \circ ac - 4ac \circ b) - (-2ac \circ b - 4b \circ ac) + (-2c \circ ab - 4ab \circ c) \\ &= -6ab \circ c - 6c \circ ab + 6ac \circ b + 6b \circ ac = 0 \end{aligned}$$

в силу (2.2).

Варианты, когда $x = a\xi$, $y = b$, $z = c\xi$ и $x = a\xi$, $y = b\xi$, $z = c$ следуют из предыдущего случая. Действительно, мы доказали

$$(a, b\xi, c\xi) + (b\xi, c\xi, a) - (c\xi, a, b\xi) = 0.$$

Тогда, сделав замену $a := b$, $b := c$, $c := a$, получим

$$(b, c\xi, a\xi) + (c\xi, a\xi, b) - (a\xi, b, c\xi) = -((a\xi, b, c\xi) - (b, c\xi, a\xi) - (c\xi, a\xi, b)) = 0,$$

и замену $a := c$, $b := a$, $c := b$,

$$(c, a\xi, b\xi) + (a\xi, b\xi, c) - (b\xi, c, a\xi) = (a\xi, b\xi, c) - (b\xi, c, a\xi) + (c, a\xi, b\xi) = 0,$$

что и доказывает тождество (1.2) при условии, что один из элементов и A . Теперь пусть $x = a\xi$, $y = b\xi$, $z = c\xi$,

$$\begin{aligned} & (x, y, z) + (-1)^{|x||y|+|x||z|}(y, z, x) + (-1)^{|x||z|+|y||z|}(z, x, y) \\ &= (a\xi * b\xi) * c\xi - a\xi * (b\xi * c\xi) \\ &\quad + (b\xi * c\xi) * a\xi - b\xi * (c\xi * a\xi) + (c\xi * a\xi) * b\xi - c\xi * (a\xi * b\xi) \\ &= (-2a \circ b - 4b \circ a)c - a(-2b \circ c - 4c \circ b) + (-2b \circ c - 4c \circ b)a \\ &\quad - b(-2c \circ a - 4a \circ c) + (-2c \circ a - 4a \circ c)b - c(-2a \circ b - 4b \circ a) \\ &= -2ac \circ b - 4bc \circ a + 2ab \circ c + 4ac \circ b - 2ab \circ c - 4ac \circ b \\ &\quad + 2bc \circ a + 4ab \circ c - 2bc \circ a - 4ab \circ c + 2ac \circ b + 4bc \circ a = 0 \end{aligned}$$

Таким образом, $\langle B(A), * \rangle$ — $(-1, 1)$ -супералгебра.

Заметим, что если $\langle A, \cdot, \circ \rangle$ — алгебра Новикова–Пуассона векторного типа, то

$$a\xi * b\xi = -2a \circ b - 4b \circ a = -2a\partial(b) - 4b\partial(a) - 6(1 \circ 1)ab,$$

т.е. полученная $(-1, 1)$ -супералгебра $\langle B(A), * \rangle$ является супералгеброй векторного типа $B(A, -2\partial, -6(1 \circ 1))$.

Тождество (1.1) означает, что любая $(-1, 1)$ -супералгебра является правоальтернативной. Хорошо известно (см., например, [3]), что для любой правоальтернативной супералгебры B супералгебра $B^{(+)}_s$ является специальной йордановой супералгеброй. Приведем доказательство этого факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $B = B_0 + B_1$ — правоальтернативная супералгебра. Тогда $B^{(+)}_s$ — специальная йорданова супералгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если B не унитарна, то присоединив единицу к алгебре B , получим унитарную алгебру. Поэтому можно считать, что B — унитарная супералгебра. Рассмотрим ассоциативную супералгебру

$$\text{End } B = \text{End}_0 B + \text{End}_1 B, \quad \text{где} \quad \text{End}_i B = \{\phi \in \text{End } B \mid \phi(B_j) \subseteq B_{j+i}, j = 1, 0\}.$$

Если $a \in B_i$, то оператор правого умножения (на элемент a) $R_a \in \text{End}_i B$. Тогда отображение $R: B \rightarrow \text{End } B$, сопоставляющее $b \mapsto R_b$ является вложением векторных

пространств. Заметим, что

$$\begin{aligned}
 R(a \odot_s b)(x) &= R\left(\frac{1}{2}(a * b + (-1)^{|a||b|}b * a)\right)(x) = R_{\frac{1}{2}(a * b + (-1)^{|a||b|}b * a)}(x) \\
 &= \frac{1}{2}(x * (a * b) + (-1)^{|a||b|}x * (b * a)) \\
 &= \frac{1}{2}((x * a) * b - (x, a, b) + (-1)^{|a||b|}(x * b) * a - (-1)^{|a||b|}(x, b, a)) \\
 &= \frac{1}{2}(R_a R_b + (-1)^{|a||b|}R_b R_a)(x) = (R_a \odot_s R_b)(x).
 \end{aligned}$$

Таким образом, R – вложение йордановых супералгебр. Так как $\text{End } B$ – ассоциативная алгебра, то $B^{(+)}_s$ – специальная йорданова супералгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим $(-1, 1)$ -супералгебру $\langle B(A), * \rangle$, построенную по обобщенной алгебре Новикова–Пуассона $\langle A, \cdot, \circ \rangle$. Заметим, что

$$\langle B(A), * \rangle^{(+)}_s = J(A, \{ \cdot, \cdot \}).$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
 a \odot_s b &= \frac{1}{2}(a * b + b * a) = \frac{1}{2}(ab + ba) = a \bullet b, \\
 a \odot_s b\xi &= \frac{1}{2}(a * b\xi + b\xi * a) = \frac{1}{2}(ab\xi + ba\xi) = a \bullet b\xi, \\
 a\xi \odot_s b &= \frac{1}{2}(a\xi * b + b * a\xi) = \frac{1}{2}(ab\xi + ba\xi) = a\xi \bullet b, \\
 a\xi \odot_s b\xi &= \frac{1}{2}(a\xi * b\xi - b\xi * a\xi) \\
 &= \frac{1}{2}(-2a \circ b - 4b \circ a + 2b \circ a + 4a \circ b) = a \circ b - b \circ a = \{a, b\} = a\xi \bullet b\xi.
 \end{aligned}$$

Так как $\langle B(A), * \rangle$ – $(-1, 1)$ -супералгебра, то, в частности, $\langle B(A), * \rangle$ – правоальтернативная супералгебра и по предложению 2 $J(A, \{ \cdot, \cdot \})$ – специальная йорданова супералгебра.

В качестве следствия мы также получаем еще одно доказательство теоремы 1. Действительно, как было отмечено,

$$J(A, \{ \cdot, \cdot \}) = \langle B(A), * \rangle^{(+)}_s.$$

Поскольку $\langle B(A), * \rangle^{(+)}_s$ – йорданова супералгебра, то $J(A, \{ \cdot, \cdot \})$ – йорданова супералгебра.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Л. Кантор, “Йордановы и лиевы супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона”, *Алгебра и анализ*, Изд-во ТГУ, Томск, 1989, 55–80.
- [2] D. King, K. McCrimmon, “The Kantor construction of Jordan superalgebras”, *Comm. Algebra*, **20**:1 (1992), 109–126.
- [3] И. П. Шестаков, “Супералгебры и контрпримеры”, *Сиб. матем. журн.*, **32**:6 (1991), 187–196.

- [4] K. McCrimmon, “Speciality and nonspeciality of two Jordan superalgebras”, *J. Algebra*, **149**:2 (1992), 326–351.
- [5] В. Г. Скосырский, “Первичные йордановы супералгебры и конструкция Кантора”, *Алгебра и логика*, **30**:3 (1994), 301–306.
- [6] И. П. Шестаков, “Квантование алгебр Пуассона и слабая специальность связанных с ними йордановых супералгебр”, *Докл. РАН*, **334**:1 (1994), 29–31.
- [7] И. П. Шестаков, “Квантизация супералгебр Пуассона и специальность йордановых супералгебр пуассонова типа”, *Алгебра и логика*, **32**:5 (1993), 571–584.
- [8] C. Martínez, I. Shestakov, E. Zelmanov, “Jordan superalgebras defined by brackets”, *J. London Math. Soc.* (2), **64**:2 (2001), 357–368.
- [9] I. Shestakov, “On speciality of Jordan brackets”, *Algebra Discrete Math.*, 2009, № 3, 94–101.
- [10] И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, “Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры”, *Функци. анализ и его прил.*, **13**:4 (1979), 13–30.
- [11] А. А. Балинский, С. П. Новиков, “Скобки Пуассона гидродинамического типа, фробениусовы алгебры и алгебры Ли”, *Докл. АН СССР*, **283**:5 (1985), 1036–1039.
- [12] Е. И. Зельманов, “Об одном классе локальных трансляционно инвариантных алгебр Ли”, *Докл. АН СССР*, **292**:6 (1987), 1294–1297.
- [13] В. Т. Филипов, “Об одном классе простых неассоциативных алгебр”, *Матем. заметки*, **45**:1 (1989), 101–105.
- [14] J. M. Osborn, “Modules for Novikov algebras”, *Second International Conference on Algebra* (Barnaul, 1991), *Contemp. Math.*, **184**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 327–338.
- [15] J. M. Osborn, “Novikov algebras”, *Nova J. Algebra Geom.*, **1**:1 (1992), 1–13.
- [16] J. M. Osborn, “Simple Novikov algebra with an idempotent”, *Comm. Algebra*, **20**:9 (1992), 2729–2753.
- [17] X. Xu, “Classification of simple Novikov algebra and their irreducible modules of characteristic 0”, *J. Algebra*, **246**:2 (2001), 673–707.
- [18] X. Xu, “Novikov–Poisson algebra”, *J. Algebra*, **190**:2 (1997), 253–279.
- [19] X. Xu, “On simple Novikov algebras and their irreducible modules”, *J. Algebra*, **185**:3 (1996), 905–934.
- [20] А. С. Тихов, “Алгебры Новикова–Пуассона и йордановы супералгебры”, *Проблемы теоретической и прикладной математики*, Ин-т матем. мех. УрО РАН, Екатеринбург, 2006, 76–79.
- [21] В. Н. Желябин, А. С. Тихов, “Алгебры Новикова–Пуассона и ассоциативные коммутативные дифференциальные алгебры”, *Алгебра и логика*, **47**:2 (2008), 186–202.
- [22] A. S. Zakharov, “Novikov–Poisson algebras and superalgebras of Jordan brackets”, *Comm. Algebra*, **42**:5 (2014), 2285–2298.
- [23] А. С. Захаров, “Вложение алгебр Новикова–Пуассона в алгебры Новикова–Пуассона векторного типа”, *Алгебра и логика*, **52**:3 (2013), 352–369.
- [24] И. П. Шестаков, “Простые супералгебры типа $(-1, 1)$ ”, *Алгебра и логика*, **37**:6 (1998), 721–739.

В. Н. Желябин

Новосибирский государственный университет
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: vicnic@math.nsc.ru

Поступило

17.12.2013

Исправленный вариант

24.05.2014

А. С. Захаров

Новосибирский государственный университет
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
E-mail: antzakh@gmail.com