Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Цзичунь Лю, Миаосен Чэнь, Евклидовы модули, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 937–946

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10455>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 17:36:11

Евклидовы модули

Цзичунь Лю, Миаосен Чэнь

Вводится понятие евклидова модуля и слабо евклидова кольца. Основной результат состоит в том, что слабая евклидовость коммутативного кольца R равносильна евклидовости всякого циклического R -модуля, а также слабой евклидовости кольца $\text{End}(R M)$ для всех циклических R -модулей M . Кроме того, приводятся некоторые свойства евклидовых модулей без кручения.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm10455

1. Введение. В этой статье буквой R мы всегда обозначаем кольцо с единицей (коммутативность R оговаривается отдельно), а под модулем M всегда подразумевается унитарный левый R -модуль. Напомним, что евклидово кольцо – это интегральная область D , на которой определена функция $\varphi: D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел), удовлетворяющая следующим условиям: каковы бы ни были элементы $a (\neq 0)$, $b \in D$, найдутся $q, r \in D$, для которых $b = qa + r$, причем либо $r = 0$, либо $\varphi(r) < \varphi(a)$.

Один из классических результатов абстрактной алгебры состоит в том, что всякое евклидово кольцо является областью главных идеалов, а всякая область главных идеалов является дедекиндовым кольцом. В 1996 г. Неоум и Аль-Алван [1] обобщили понятие дедекиндова кольца на случай модулей и ввели понятие дедекиндова модуля. В 2005 г. Алкан, Сарак и Тирас [2] охарактеризовали дедекиндовы модули и кольца. В 2002 г. Рахими [3] распространил понятие евклидова кольца на евклидовы модули над коммутативными кольцами и показал, что циклический модуль без кручения над коммутативным кольцом R с единицей евклидов тогда и только тогда, когда R является евклидовым кольцом.

В [3] приводится такое определение евклидова модуля: унитарный R -модуль A евклидов, если на $A \setminus \{0\}$ определена функция ϕ с неотрицательными целыми значениями, которая удовлетворяет следующим условиям:

- (1) если $r \in R$ и $a \in A$, причем $ra \neq 0$, то $\phi(a) \leq \phi(ra)$;
- (2) если $a, b \in A$ и $b \neq 0$, то существуют $r \in R$ и $c \in A$, для которых $a = rb + c$, причем либо $c = 0$, либо $c \neq 0$ и $\phi(c) < \phi(b)$.

Определение евклидова модуля, которое мы используем в этой статье, несколько отличается от определения Рахими; мы обобщаем основной результат статьи [3].

В п. 2 приводятся определения и некоторые элементарные свойства евклидовых модулей. Как и в случае идеалов из евклидова кольца, можно показать, что все

подмодули евклидова модуля являются циклическими. Кроме того, мы доказываем, что все подмодули и гомоморфные образы евклидовых модулей евклидовы.

Пункт 3 содержит основной результат этой статьи, который можно сформулировать следующим образом:

ТЕОРЕМА 1.1. *Для коммутативного кольца R следующие условия равносильны:*

- (1) R является слабо евклидовым кольцом;
- (2) всякий циклический R -модуль евклидов;
- (3) всякий фактор-модуль модуля ${}_R R$ евклидов;
- (4) для любого циклического R -модуля M кольцо $\text{End}({}_R M)$ слабо евклидово;
- (5) для любого циклического R -модуля M всякий циклический $\text{End}({}_R M)$ -модуль евклидов.

В качестве следствия получается характеристика глобальной размерности слабо евклидова кольца.

В п. 4 в основном рассматриваются евклидовы модули без кручения. Мы показываем, что любой евклидов модуль без кручения является дедекиндовым модулем и равномерным модулем.

2. Основные понятия и элементарные свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Кольцо R называется *слабо евклидовым слева*, если существует функция $\varphi: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющая следующему условию: каковы бы ни были элементы $a (\neq 0)$, $b \in R$, найдутся $q, r \in R$, для которых $b = qa + r$, причем

$$\text{либо } r = 0, \quad \text{либо } \varphi(r) < \varphi(a).$$

Функция φ называется *присоединенной евклидовой функцией* кольца R .

Слабо евклидовы справа кольца определяются аналогично. Если кольцо R слабо евклидово одновременно слева и справа, то R называется *слабо евклидовым* кольцом. Для коммутативного кольца R понятия слабой евклидовости слева и справа совпадают; мы будем говорить, что такое R слабо евклидово, если R слабо евклидово с какой-нибудь стороны. Итак, мы обобщили понятие евклидова кольца на произвольные кольца, которые не обязаны быть коммутативными и могут содержать делители нуля.

Теперь мы дадим определение евклидова модуля.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Левый R -модуль M называется *евклидовым модулем*, если существует функция $\varphi: M \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, удовлетворяющая следующему условию: для любых $m_1, m_2 (\neq 0) \in M$ найдутся такие $r \in R$ и $m_3 \in M$, что $m_1 = rm_2 + m_3$, причем

$$\text{либо } m_3 = 0, \quad \text{либо } \varphi(m_3) < \varphi(m_2).$$

Функция φ называется *присоединенной евклидовой функцией* модуля M .

Из определения 2.2 легко выводится, что всякий простой модуль евклидов.

Ниже мы приводим некоторые основные свойства евклидовых модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Каждый подмодуль евклидова R -модуля является циклическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – евклидов R -модуль, φ – присоединенная евклидова функция и K – подмодуль модуля M .

Если $K = 0$, то $K = \langle 0 \rangle$.

Если $K \neq 0$, то множество

$$A = \{\varphi(k) \mid k \in K \text{ и } k \neq 0\}$$

является непустым подмножеством множества $\mathbb{N} \cup \{0\}$; значит, в этом множестве есть минимальный элемент. Предположим, что k_0 – ненулевой элемент подмодуля K , для которого $\varphi(k_0)$ минимально; покажем, что $K = \langle k_0 \rangle$.

Очевидно, $\langle k_0 \rangle \subseteq K$, поскольку k_0 принадлежит подмодулю K . Для любого $k \in K$ найдутся такие $r \in R$ и $m \in M$, что $k = rk_0 + m$, причем либо $m = 0$, либо $\varphi(m) < \varphi(k_0)$, потому что модуль M евклидов. Если $m \neq 0$, то $m = k - rk_0 \in K$. Но $\varphi(m) < \varphi(k_0)$ в противоречие с выбором k_0 ; значит, $m = 0$. Следовательно, $k = rk_0 \in \langle k_0 \rangle$ и $K \subseteq \langle k_0 \rangle$, что и требовалось.

Из предложения 2.3 вытекает следующее простое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Все евклидовы R -модули нётеровы.*

Согласно предложению 2.3 все евклидовы модули являются циклическими. Таким образом, справедливы следующие включения классов модулей:

$$\{\text{простые модули}\} \subseteq \{\text{евклидовы модули}\} \subseteq \{\text{циклические модули}\}.$$

Оба включения строгие. Это показывают следующие два примера.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathbb{Z}$. Очевидно, он является евклидовым, потому что $\mathbb{Z}$ – евклидово кольцо. Однако модуль $\mathbb{Z}$ не является простым, поскольку он содержит собственный подмодуль $2\mathbb{Z}$.

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим интегральную область

$$\mathbb{Z}[\theta] = \{a + b\theta \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{где } \theta = \frac{1 + \sqrt{-19}}{2}.$$

В 1988 г. Камполи [4] доказал, что $\mathbb{Z}[\theta]$ является областью главных идеалов, но не является евклидовым кольцом. Значит, $\mathbb{Z}[\theta]$ -модуль $\mathbb{Z}[\theta]$ является циклическим модулем, но не является евклидовым модулем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Все подмодули и гомоморфные образы евклидовых R -модулей евклидовы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – евклидов R -модуль и φ – присоединенная евклидова функция.

Рассмотрим подмодуль K модуля M . Пусть φ_K – сужение функции φ на $K \setminus \{0\}$. Легко проверить, что φ_K является евклидовой функцией для модуля K , а значит, K является евклидовым модулем.

Пусть $f: M \rightarrow N$ – эпиморфизм R -модулей. Определим функцию $\varphi^N: N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, полагая

$$n \mapsto \min\{\varphi(m) \mid f(m) = n\}.$$

Эта функция определена корректно, потому что f является эпиморфизмом. Для $n_1 \in N$ и $n_2 (\neq 0) \in N$ можно выбрать $m_1, m_2 \in M$ так, чтобы выполнялись условия

$$f(m_1) = n_1, \quad f(m_2) = n_2, \quad \varphi^N(n_2) = \varphi(m_2).$$

Очевидно, $m_2 \neq 0$, поскольку $n_2 \neq 0$. Из евклидовости модуля M вытекает существование элементов $r \in R$ и $m_3 \in M$, для которых $m_1 = rm_2 + m_3$, причем либо $m_3 = 0$, либо $\varphi(m_3) < \varphi(m_2)$. Таким образом, $f(m_1) = rf(m_2) + f(m_3)$, т.е. $n_1 = rn_2 + n_3$ (здесь мы положили $f(m_3) = n_3$). Если $n_3 \neq 0$, то

$$\varphi^N(n_3) = \min\{\varphi(m) \mid f(m) = n_3\} \leq \varphi(m_3) < \varphi(m_2) = \varphi^N(n_2),$$

т.е. $\varphi^N(n_3) < \varphi^N(n_2)$. Значит, φ^N является искомой евклидовой функцией для N , так что модуль N евклидов.

Однако утверждение, обратное к предложению 2.5, неверно. Рассмотрим, например, короткую точную последовательность $\mathbb{Z}$ -модулей

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0.$$

Очевидно, $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathbb{Z}$ евклидов, поскольку он является евклидовым кольцом. Модуль $\mathbb{Z}_2$, который является гомоморфным образом модуля $\mathbb{Z}$, тоже евклидов. Однако модуль $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ не может быть евклидовым, потому что он нециклический. Этот пример показывает, что прямая сумма евклидовых модулей не обязательно является евклидовым модулем.

В качестве обобщения понятия наибольшего общего делителя в евклидовом кольце мы определим понятие наибольшего общего делителя в евклидовом модуле. Пусть M – евклидов модуль и $m_1, m_2 (\neq 0) \in M$. Скажем, что m_2 делит m_1 , или m_2 является *делителем* элемента m_1 , если существует $r \in R$, для которого $m_1 = rm_2$. Если m_2 делит m_1 , мы пишем $m_2 \mid m_1$. Пусть элементы $m_1, m_2 \in M$ таковы, что по крайней мере один из них ненулевой. В этом случае мы говорим, что $m \in M$ является *наибольшим общим делителем* элементов m_1 и m_2 , если выполнены следующие условия:

- (1) $m \mid m_1$ и $m \mid m_2$, т.е. существуют $r_1, r_2 \in R$, для которых $m_1 = r_1m$ и $m_2 = r_2m$;
- (2) для любого m' , удовлетворяющего условиям $m' \mid m_1$ и $m' \mid m_2$, выполнено также и условие $m' \mid m$.

Если m является наибольшим общим делителем элементов m_1 и m_2 , то мы пишем $m = \text{НОД}(m_1, m_2)$.

Напомним, что модуль называется *модулем Безу*, если все его конечно порожденные подмодули являются циклическими. По аналогии со случаем евклидова кольца, верно следующее утверждение, согласно которому все евклидовы модули являются модулями Безу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть M – евклидов R -модуль и $m_1, m_2 \in M$ таковы, что $m_1 \neq 0$ или $m_2 \neq 0$. Тогда существует наибольший общий делитель элементов m_1 и m_2 ; более того, существуют $r_1, r_2 \in R$, для которых

$$\text{НОД}(m_1, m_2) = r_1m_1 + r_2m_2.$$

3. Кольца эндоморфизмов евклидовых модулей. В этой статье мы пишем эндоморфизмы левых модулей справа от (элементов) модулей, а эндоморфизмы правых модулей – слева. В такой системе обозначений имеем

$$(m)(fg) = g(f(m)), \quad \text{где } f, g \in \text{End}({}_R M).$$

Напомним, что бимодуль ${}_R M_S$ называется *уравновешенным*, если левое и правое умножения λ и ρ сюръективны; здесь

$$\lambda: R \rightarrow \text{End}(M_S), \quad \rho: S \rightarrow \text{End}({}_R M)$$

– отображения, определенные правилами

$$\lambda(r): x \mapsto rx, \quad \rho(s): x \mapsto xs \quad \text{для } r \in R, \quad x \in M, \quad s \in S.$$

Для доказательства основного результата этой статьи нам понадобится следующая простая лемма.

ЛЕММА 3.1. Пусть R – коммутативное кольцо и M – циклический R -модуль. Тогда

- (1) ${}_R M_R$ является уравновешенным бимодулем;
- (2) $\text{End}({}_R M)$ является коммутативным кольцом.

Следует отметить, что если условия (1) и (2) в лемме 3.1 выполнены и, кроме того, аннулятор $r_R(M) = \{r \in R \mid Mr = 0\}$ модуля M равен нулю, то R также является коммутативным кольцом.

Следующее утверждение представляет собой простое следствие предложения 2.3 и леммы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Если R – коммутативное кольцо, а M – евклидов модуль, то модуль ${}_R M_R$ уравновешен, а кольцо $\text{End}({}_R M)$ коммутативно.

Теперь все готово для доказательства основной теоремы этой статьи.

ТЕОРЕМА 3.3. Для коммутативного кольца R следующие условия равносильны:

- (1) R слабо евклидово;
- (2) всякий циклический R -модуль евклидов;
- (3) всякий фактор-модуль модуля ${}_R R$ евклидов;
- (4) для любого циклического R -модуля M кольцо $\text{End}({}_R M)$ слабо евклидово;
- (5) для любого циклического R -модуля M все циклические $\text{End}({}_R M)$ -модули евклидовы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2). Если R – слабо евклидово кольцо, то R является евклидовым R -модулем. Поскольку всякий циклический R -модуль является гомоморфным образом модуля R , из предложения 2.5 вытекает, что всякий циклический R -модуль евклидов.

(2) $\Rightarrow$ (1). Эта импликация очевидна, поскольку R является циклическим R -модулем.

(2) $\Leftrightarrow$ (3). Требуемое утверждение вытекает из следствия 3.9 в [5].

(2) $\Rightarrow$ (4). Если M – циклический модуль, то M евклидов. Предположим, что $M = Rm_0 = m_0R$ ($m_0 \neq 0$) и φ – присоединенная евклидова функция. Если $0 \neq f \in \text{End}({}_R M)$, то $f(m_0) \neq 0$, поскольку $f \neq 0$. Определим функцию

$$\phi: \text{End}({}_R M) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

правилом $f \mapsto \varphi(f(m_0))$.

Для $f_1 \in \text{End}({}_R M)$ и $0 \neq f_2 \in \text{End}({}_R M)$ имеем $f_2(m_0) \neq 0$. Поскольку M – евклидов модуль, существуют $r \in R$ и $m_3 \in M$, для которых

$$f_1(m_0) = rf_2(m_0) + m_3,$$

причем

$$\text{либо } m_3 = 0, \quad \text{либо } \varphi(m_3) < \varphi(f_2(m_0)).$$

Пусть $m_3 = r'm_0 = m_0r'$. Определим функцию

$$f_3: {}_R M \rightarrow {}_R M$$

правилом $m \mapsto mr$ и функцию

$$f_4: {}_R M \rightarrow {}_R M$$

правилом $m \mapsto mr'$. Легко проверить, что $f_3, f_4 \in \text{End}({}_R M)$. Если $f_2(m_0) = r_1m_0$, то

$$(m_0)f_2f_3 = (r_1m_0)f_3 = r_1(m_0f_3) = r_1(m_0r') = (r_1m_0)r = rf_2(m_0).$$

Значит,

$$(m_0)f_1 = (m_0)f_2f_3 + (m_0)f_4 = (m_0)(f_2f_3 + f_4).$$

Поскольку $M = Rm_0 = m_0R$, имеем $f_1 = f_2f_3 + f_4$. Если $m_3 = 0$, то $f_4 = 0$. Если $m_3 \neq 0$, то $f_4 \neq 0$ и

$$\phi(f_4) = \varphi(f_4(m_0)) = \varphi(m_3) < \varphi(f_2(m_0)) = \phi(f_2).$$

Таким образом, ϕ – искомая евклидова функция для $\text{End}({}_R M)$, и $\text{End}({}_R M)$ является слабо евклидовым справа кольцом. Но кольцо $\text{End}({}_R M)$ коммутативно по лемме 3.1; значит, $\text{End}({}_R M)$ – слабо евклидово кольцо.

(4) $\Rightarrow$ (2). Если M – циклический R -модуль, то $\text{End}({}_R M)$ является слабо евклидовым кольцом. Пусть ϕ – присоединенная евклидова функция и $M = Rm_0 = m_0R$, где $m_0 \in M$. Для $0 \neq m \in M$ положим $m = rm_0 = m_0r$. Определим функцию

$$f: {}_R M \rightarrow {}_R M$$

правилом $m \mapsto mr$; тогда $f(m_0) = m_0r = m$. Значит, для всех $0 \neq m \in M$ множество $\{\phi(f) \mid f(m_0) = m\}$ является непустым подмножеством множества $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Теперь мы можем определить функцию

$$\varphi: M \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$$

правилом

$$m \mapsto \min\{\phi(f) \mid f(m_0) = m\}.$$

Очевидно, эта функция определена корректно. Покажем, что φ – искомая евклидова функция для M .

Для $m_1 \in M$ и $0 \neq m_2 \in M$ можно выбрать эндоморфизм $f_2 \in \text{End}({}_R M)$, для которого $f_2(m_0) = m_2$ и $\varphi(m_2) = \phi(f_2)$. Очевидно, $f_2 \neq 0$.

Если $m_1 = 0$, то $0 = 0m_2 + 0$.

Если $m_1 \neq 0$, то можно выбрать $f_1 \in \text{End}({}_R M)$, для которого $f_1(m_0) = m_1$. Поскольку $\text{End}({}_R M)$ – слабо евклидово кольцо, существуют $f_3, f_4 \in \text{End}({}_R M)$, удовлетворяющие условию $f_1 = f_2 f_3 + f_4$, причем либо $f_4 = 0$, либо $\phi(f_4) < \phi(f_2)$. Следовательно,

$$(m_0)f_1 = (m_0)(f_2 f_3 + f_4) = (m_0)f_2 f_3 + (m_0)f_4 = (m_2)f_3 + m_3$$

(здесь мы положили $f_4(m_0) = m_3$), т.е. $m_1 = f_3(m_2) + m_3$. Из леммы 3.1 вытекает, что бимодуль ${}_R M_R$ уравновешен; значит, существует $r \in R$, для которого $f_3(m_2) = m_2 r = r m_2$. Следовательно, $m_1 = r m_2 + m_3$.

Если $f_4 = 0$, то $m_3 = f_4(m_0) = 0$.

Если $f_4 \neq 0$, то

$$\varphi(m_3) = \min\{\phi(f) \mid f(m_0) = m_3\} \leq \phi(f_4) < \phi(f_2) = \varphi(m_2),$$

т.е. $\varphi(m_3) < \varphi(m_2)$. Таким образом, φ – искомая евклидова функция для M , и M является евклидовым модулем.

(4) $\Leftrightarrow$ (5). Эта импликация является частным случаем импликации (1) $\Leftrightarrow$ (2), поскольку кольцо $\text{End}({}_R M)$ коммутативно для всякого циклического R -модуля M .

Из доказательства теоремы 3.3 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. *Если R – коммутативное кольцо, а ${}_R M$ – евклидов модуль, то кольцо $\text{End}({}_R M)$ слабо евклидово.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Заметим, что при доказательстве импликации (1) $\Leftrightarrow$ (2) в теореме 3.3 мы не пользовались коммутативностью кольца R . Таким образом, на самом деле мы доказали, что кольцо R слабо евклидово слева тогда и только тогда, когда каждый циклический левый R -модуль евклидов.

Из замечания 3.5 вытекает, что если кольцо R слабо евклидово слева, то класс евклидовых R -модулей совпадает с классом циклических R -модулей. Этот факт позволяет охарактеризовать левую глобальную размерность слабо евклидова слева кольца. Обозначим левую глобальную размерность кольца R через $\text{Lgd } R$. Для модуля ${}_R N$ через $\text{Pd } N$ обозначим проективную размерность N . Мы начнем с переформулировки результата Ауслендера.

ЛЕММА 3.6 (Ауслендер). *Левая глобальная размерность $\text{Lgd } R$ равна*

$$\sup\{\text{Pd } N \mid N \text{ является циклическим } R\text{-модулем}\}.$$

Следующее интересное следствие легко выводится из замечания 3.5 и леммы 3.6.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. *Если R – левое слабо евклидово кольцо, то*

$$\text{Lgd } R = \sup\{\text{Pd } N \mid N \text{ является левым евклидовым } R\text{-модулем}\}.$$

4. Евклидовы модули без кручения. Говорят, что R -модуль M является модулем *без кручения*, если из $rt = 0$ (где $r \in R$ и $t \in M$) вытекает, что либо $r = 0$, либо $t = 0$. В этом пункте рассматриваются евклидовы модули без кручения и приводятся некоторые хорошие свойства таких модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Всякий евклидов модуль без кручения проективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение очевидно, поскольку евклидовы модули являются циклическими, а всякий циклический R -модуль без кручения изоморфен модулю ${}_R R$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Пусть M – евклидов R -модуль без кручения и $J = J(R)$ – радикал Джекобсона кольца R . Тогда*

$$J(\text{End}({}_R M)) = \text{Hom}_R(M, JM), \quad \text{End}({}_R M)/J(\text{End}({}_R M)) \cong \text{End}({}_R M/JM).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение следует из теоремы 10.4(1), предложения 17.10 и следствия 17.12 из [5] и предложения 4.1.

Идеал I коммутативного кольца R называется *обратимым*, если $II' = R$, где $I' = \{x \in R \mid Ix \subseteq R\}$ и K – полное фактор-кольцо кольца R . В 1996 г. Неоум и Аль-Алван [1] обобщили это понятие для модулей. Пусть M – R -модуль и S – множество неделителей нуля кольца R . Легко проверить, что подмножество

$$T = \{t \in S \mid tm = 0 \text{ для некоторого } m \in M \Rightarrow m = 0\}$$

кольца R замкнуто относительно умножения. Следовательно, мы можем локализовать R и получить кольцо $T^{-1}R$. Для коммутативного кольца R и R -модуля M локализации R и M относительно простого идеала P кольца R обозначаются через R_P и M_P соответственно. Пусть N – подмодуль модуля M и

$$N' = \{x \in T^{-1}R \mid xN \subseteq M\}.$$

Подмодуль N называется *обратимым* в M , если $N'N = M$. Модуль M называется *дедекиндовым*, если любой его ненулевой подмодуль обратим. Из определения вытекает, что ${}_R R$ является дедекиндовым модулем для любой дедекиндовой области R .

В качестве обобщения простых идеалов колец можно определить простой подмодуль следующим образом: собственный подмодуль N модуля M называется *простым*, если для любых $r \in R$ и $t \in M$ со свойством $rt \in N$ выполнено: либо $rM \subseteq N$, либо $t \in N$. R -Модуль M называется *мультипликативным*, если для любого его подмодуля N существует идеал I кольца R со свойством $N = IM$.

Напомним, что модуль M называется *равномерным*, если пересечение любых двух его ненулевых подмодулей – ненулевой подмодуль.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть M – евклидов R -модуль без кручения. Тогда M является равномерным модулем, и потому каждый ненулевой подмодуль модуля M существует в M .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M_1 и M_2 – два ненулевых подмодуля в M ; тогда оба они являются циклическими, потому что M евклидов. Можно считать, что $M_1 = Rm_1$ ($m_1 \neq 0$) и $M_2 = Rm_2$ ($m_2 \neq 0$). Согласно предложению 2.6 найдутся $r_1, r_2 \in R$,

для которых $\text{НОД}(m_1, m_2) = r_1 m_1 + r_2 m_2$ (здесь мы положили $\text{НОД}(m_1, m_2) = m_0$). Поскольку m_0 делит m_1 , существует $r_3 \in R$, для которого $m_1 = r_3 m_0$. Значит,

$$m_1 = r_3(r_1 m_1 + r_2 m_2), \quad \text{т.е.} \quad (1 - r_3 r_1)m_1 = r_3 r_2 m_2.$$

Если $r_3 r_2 m_2 \neq 0$, то $r_3 r_2 m_2 \in Rm_1 \cap Rm_2$, откуда $Rm_1 \cap Rm_2 \neq 0$.

Пусть $r_3 r_2 m_2 = 0$. Мы знаем, что $r_3 \neq 0$, поскольку $m_1 \neq 0$, а значит, $r_2 m_2 = 0$, потому что M – модуль без кручения. Таким образом, $m_0 = r_1 m_1$. Из того, что m_0 делит m_2 , вытекает существование элемента $r_4 \in R$, для которого

$$m_2 = r_4 m_0 = r_4 r_1 m_1.$$

Следовательно, $Rm_1 \cap Rm_2 \neq 0$, поскольку $m_2 \in Rm_1 \cap Rm_2$. Значит, M – равномерный модуль.

Без условия, что M – модуль без кручения, доказанная теорема становится неверной.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathbb{Z}_6$. Очевидно, этот модуль евклидов, потому что он является гомоморфным образом модуля $\mathbb{Z}$. Но он не равномерен, поскольку для ненулевых подмодулей $M_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ и $M_2 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ имеем $M_1 \cap M_2 = \bar{0}$.

Для доказательства теоремы 4.5 нам понадобится следующая лемма из [1].

ЛЕММА 4.4 [1; предложение 1.3 (ii)]. Пусть M – ненулевой R -модуль и N – ненулевой циклический подмодуль модуля M . Предположим, что $N = Rn$ для некоторого $n \in N$. Тогда N обратим в том и только том случае, если для всякого $m \in M$ найдутся $t \in T$ и $r \in R$ со свойством $tm = rn$.

ТЕОРЕМА 4.5. Если R – коммутативное кольцо, то любой евклидов R -модуль без кручения является дедекиндовым модулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть M – евклидов R -модуль без кручения и N – его ненулевой подмодуль. Тогда N циклический и можно считать, что $N = Rn$ ($n \neq 0$). По теореме 4.3 Rn – существенный подмодуль модуля M . Для $m \in M$ существуют $r_0 \in R$ и $m_1 \in M$ такие, что $m = r_0 n + m_1$.

Если $m_1 = 0$, то, полагая $t = 1$ и $r = r_0$, получим $1m = r_0 n$.

Если $m_1 \neq 0$, то по лемме 5.19 из [5] найдется $r_1 (\neq 0) \in R$, для которого $0 \neq r_1 m_1 \in Rn$, т.е. существует $r_2 \in R$, для которого $r_1 m_1 = r_2 n$. Значит,

$$r_1 m = r_1(r_0 n + m_1) = r_1 r_0 n + r_2 n = (r_1 r_0 + r_2)n.$$

Теперь докажем, что $r_1 \in T$. Для R -модуля без кручения имеем $S = T$. Следовательно, достаточно показать, что r_1 не является делителем нуля в R . Предположим, что $r'_1 r_1 = 0$; тогда $r'_1 r_1 m_1 = 0$. Из того, что M не имеет кручения и $r_1 m_1 \neq 0$, следует, что $r'_1 = 0$. Таким образом, r_1 не является делителем нуля в R .

Итак, для всякого $m \in M$ найдутся $t \in T$ и $r \in R$ со свойством $tm = rn$, и по лемме 4.4 подмодуль N обратим. Значит, M – дедекиндов модуль.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Пусть R – коммутативное кольцо и M евклидов R -модуль без кручения. Тогда каждый ненулевой элемент кольца $\text{End}(R M)$ является мономорфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение без труда выводится из леммы 2.1 в [1] и теоремы 4.5.

Без условия, что M не имеет кручения, теорема 4.5 (как и теорема 4.3) становится неверной.

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим $\mathbb{Z}_8$ -модуль $\mathbb{Z}_8$. Очевидно, он евклидов, но не дедекиндов. Рассмотрим циклический подмодуль $\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$. Возьмем $\bar{1} \in \mathbb{Z}_8$. Если $t\bar{1} = r\bar{2}$ для некоторых $t, r \in \mathbb{Z}$, то число t должно быть четным. Однако четное число t не может принадлежать множеству T , поскольку $\bar{4} \neq \bar{0}$ и $t\bar{4} = \bar{0}$. Поэтому из леммы 4.4 вытекает, что подмодуль $\langle \bar{2} \rangle$ необратим в $\mathbb{Z}_8$, так что модуль $\mathbb{Z}_8$ не дедекиндов.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть R – коммутативное кольцо и M – евклидов R -модуль без кручения. Тогда верны следующие утверждения:

- (1) R является дедекиндовой областью;
- (2) M является мультипликативным R -модулем;
- (3) любой ненулевой простой подмодуль модуля M максимален;
- (4) для любого максимального идеала P в R найдется такой элемент $\pi \in R_P$, что всякий подмодуль модуля M_P можно представить как $\pi^n M_P$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 4.1 и теоремы 4.5 следует, что модуль M проективен и дедекиндов, так что требуемое утверждение вытекает из теорем 3.12 и 3.14 в статье [2].

Авторы благодарят анонимного рецензента за полезные замечания, которые помогли улучшить статью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. G. Naoum, F. H. Al-Alwan, “Dedekind modules”, *Comm. Algebra*, **24**:2 (1996), 397–412.
- [2] M. Alkan, B. Sarac, Y. Tiras, “Dedekind modules”, *Comm. Algebra*, **33**:5 (2005), 1617–1626.
- [3] A. M. Rahimi, “Euclidean modules”, *Libertas Math.*, **22** (2002), 123–126.
- [4] O. A. Campoli, “A principal ideal domain that is not a Euclidean domain”, *Amer. Math. Monthly*, **95**:9 (1988), 868–871.
- [5] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Gradu. Texts in Math., **13**, Springer-Verlag, New York, 1974.

Цзичунь Лю

Zhejiang University, Китай,
Fujian Jiangxia University, Китай
E-mail: liujc1982@126.com

Поступило

04.06.2012

Исправленный вариант

15.03.2013

Миаосен Чэнь

Zhejiang Normal University, Китай
E-mail: mschen@zjnu.edu.cn