Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. С. Кашин, А. В. Мелешкина, Об n -членных приближениях по фреймам, ограниченным в $L^p(0, 1)$, $2 < p < \infty$, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 830–835

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10456>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 15:52:04

УДК 517.518.8

Об n -членных приближениях по фреймам, ограниченным в $L^p(0, 1)$, $2 < p < \infty$

Б. С. Кашин, А. В. Мелешкина

В работе изучаются наилучшие канонические n -членные приближения по норме пространства $L^2(0, 1)$ семейства $\mathbb{I}$ характеристических функций интервалов.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10456

В работе изучаются наилучшие канонические n -членные приближения по норме пространства $L^2(0, 1)$ семейства $\mathbb{I}$ характеристических функций интервалов, лежащих в интервале $(0, 1)$:

$$\mathbb{I} = \{I_\omega, \omega \subset (0, 1)\},$$

где $\omega = (\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ и

$$I_\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \omega; \\ 0, & \text{если } x \notin \omega. \end{cases}$$

Системы функций, полиномами по которым осуществляется приближение, – это жесткие фреймы $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty \subset L^2(0, 1)$ с дополнительным свойством

$$\|\varphi_k\|_{L^p(0,1)} \leq D, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad 2 < p \leq \infty. \quad (1)$$

Каноническим разложением функции $f \in L^2(0, 1)$ по жесткому фрейму Φ называется сходящийся по норме $L^2(0, 1)$ ряд

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k. \quad (2)$$

Здесь и ниже $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L^2(0, 1)$. Кроме того, мы используем обозначения $\|f\|_p = \|f\|_{L^p(0,1)}$, $\#\Lambda$ – число элементов в конечном множестве Λ , $[x]$ – целая часть действительного числа x .

Данная работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00476-а).

Наилучшим каноническим n -членным приближением функции $f \in L^2(0, 1)$ по жесткому фрейму Φ называется величина

$$\sigma_n(f, \Phi) = \inf_{\Lambda \subset \mathbb{N}, \#\Lambda \leq n} \left\| f - \sum_{k \in \Lambda} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_2. \quad (3)$$

Далее, если F – подмножество $L^2(0, 1)$, то наилучшим каноническим n -членным приближением F называется величина

$$\sigma_n(F, \Phi) = \sup_{f \in F} \sigma_n(f, \Phi). \quad (4)$$

В случае, когда жесткий фрейм – это полная ортонормированная система, величины (3), (4) совпадают с обычными наилучшими приближениями n -членными полиномами. Подробнее о фреймах см., например, [1].

Пример полной ортонормированной системы Хаара $\mathbb{X}$, для которой

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \mathbb{X}) \leq 2^{-n/4+2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

(см., например, [2], где установлена также экспоненциальная оценка снизу для $\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi)$ и произвольной ортонормированной системы Φ), показывает, что для систем Φ без ограничения (1) величины $\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi)$ могут убывать экспоненциально.

С другой стороны, в [2] показано (см. также [3]), что для ортонормированной системы Φ со свойством (1) при $p = \infty$ имеет место оценка

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi) \geq Cn^{-1/2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad C > 0. \quad (6)$$

Сопоставление оценок (5) и (6) естественно приводит к вопросу о возможном порядке убывания величин $\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi)$ для ортонормированных систем или фреймов с условием (1) при $2 < p < \infty$.

ТЕОРЕМА 1. Для произвольного жесткого фрейма Φ с условием (1)

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi) \geq c_{p,D} \cdot n^{-p/(2(p-2))}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(здесь и далее через $c_{p,D}$, C_p обозначаются положительные величины, зависящие от указанных параметров).

ТЕОРЕМА 2. Существует жесткий фрейм Φ с условием (1) такой, что

$$\sigma_n(\mathbb{I}, \Phi) \leq C_p \cdot n^{-p/(2(p-1))}, \quad n = 1, 2, \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для фрейма Φ , построенного в теореме 2, величина D в (1) зависит от p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 весьма просто. Пусть n задано, N – натуральный параметр, значение которого уточняется ниже. Пусть также

$$f_0 = I_\omega \subset \mathbb{I}, \quad \omega = \left(0, \frac{1}{N}\right).$$

Очевидно, что

$$\sigma_n(f_0, \Phi) \geq \inf_{\Lambda \subset \mathbb{N}, \#\Lambda \leq n} \left\| f_0 - \sum_{k \in \Lambda} \langle f_0, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_{L^2(0, 1/N)}. \quad (7)$$

Используя определение жесткого фрейма для любого $\Lambda \subset \mathbb{N}$, $\#\Lambda \leq n$, имеем

$$\begin{aligned} & \left\| f_0 - \sum_{k \in \Lambda} \langle f_0, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_{L^2(0, 1/N)} \\ & \geq N^{-1/2} - \left(\sum_{k \in \Lambda} |\langle f_0, \varphi_k \rangle| \right) \sup_{k=1, 2, \dots} \|\varphi_k\|_{L^2(0, 1/N)} \\ & \geq N^{-1/2} - n^{1/2} \left(\sum_{k \in \Lambda} \langle f_0, \varphi_k \rangle^2 \right)^{1/2} \sup_{k=1, 2, \dots} \|\varphi_k\|_{L^2(0, 1/N)} \\ & \geq N^{-1/2} - n^{1/2} N^{-1/2} \sup_{k=1, 2, \dots} \|\varphi_k\|_{L^2(0, 1/N)}. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом в силу (1) и неравенства Гёльдера с показателями $p/2$ и $p/(p-2)$ при $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \int_0^{1/N} \varphi_k^2 dx &= \int_0^{1/N} 1(|\varphi_k|^p)^{2/p} dx \\ &\leq \left(\int_0^{1/N} |\varphi_k|^p dx \right)^{2/p} \left(\int_0^{1/N} 1 dx \right)^{(p-2)/p} \leq D^2 \cdot N^{-(p-2)/p}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sup_{k=1, 2, \dots} \|\varphi_k\|_{L^2(0, 1/N)} \leq D \cdot N^{-(p-2)/(2p)}. \quad (9)$$

Положим

$$N = \lceil (4nD^2)^{p/(p-2)} \rceil + 1.$$

Тогда из (7)–(9) вытекает, что

$$\sigma_n(f_0, \Phi) \geq \frac{1}{2} N^{-1/2} \geq c_{p,D} \cdot n^{-p/(2(p-2))},$$

что и требовалось проверить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Построим полную в $L^2(0, 1)$ ортонормированную систему $\Psi = \{\psi_m\}_{m=1}^\infty$ с

$$\|\psi_m\|_{L^p(0, 1)} \leq D_p, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

такую, что для любого интервала $\omega \subset (0, 1/2)$ и $n = 1, 2, \dots$ найдется множество $\Lambda = \Lambda(n, \omega) \subset \mathbb{N}$ с

$$\left(\sum_{m \notin \Lambda} \langle I_\omega, \psi_m \rangle^2 \right)^{1/2} \leq C_p \cdot n^{-p/(2(p-1))}, \quad \#\Lambda \leq n. \quad (11)$$

Тогда для жесткого фрейма $\tilde{\Phi}$ в пространстве $L^2(0, 1/2)$ с элементами $\psi_m(x)$, $x \in (0, 1/2)$, $m = 1, 2, \dots$, имеем

$$\sigma_n(\mathbb{I}_{(0,1/2)}, \tilde{\Phi}) \leq C_p \cdot n^{-p/(2(p-1))},$$

где

$$\mathbb{I}_{(0,1/2)} = \left\{ I_\omega \subset \mathbb{I}, \omega \subset \left(0, \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Действительно, из (11) и неравенства Бесселя для рядов по системе Ψ вытекает, что для $\omega \subset (0, 1/2)$

$$\left\| I_\omega - \sum_{m \in \Lambda} \langle I_\omega, \psi_m \rangle \psi_m \right\|_{L^2(0,1/2)} \leq C_p \cdot n^{-p/(2(p-1))}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Преобразование

$$T: L^2\left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow L^2(0, 1), \quad \text{где} \quad (Tf)(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{z}{2}\right)$$

переводит фрейм $\tilde{\Phi}$ в жесткий фрейм Φ , удовлетворяющий всем требованиям теоремы 2.

Искомую систему Ψ мы построим, преобразуя систему Хаара (см. [4; с. 70])

$$\mathbb{X} = \{\chi_0^0, \chi_k^i, k = 0, 1, \dots, i = 1, \dots, 2^k\}.$$

Рассмотрим при $k = 2, 3, \dots$ ортогональные $(2^k \times 2^k)$ -матрицы $A_k = \{\alpha_{is}^k\}$ с

$$\alpha_{is}^k = \begin{cases} 1 - (2^k - 1)^{-1}, & \text{если } 1 \leq i = s < 2^k, \\ 0, & \text{если } i = s = 2^k, \\ -(2^k - 1)^{-1}, & \text{если } i \neq s, i, s < 2^k, \\ (2^k - 1)^{-1/2}, & \text{если } i \neq s, i = 2^k \text{ или } s = 2^k. \end{cases}$$

Матрицы A_k используются в теории ортогональных рядов начиная с работ Олевского (см. также [4; с. 441]).

Определим новую, полную в $L^2(0, 1)$ ортонормированную систему $\{\tilde{\chi}_k^i\}$, положив

$$\tilde{\chi}_k^i = \chi_k^i, \quad k = 0, 1, \quad \text{и} \quad \tilde{\chi}_k^i = \sum_{s=1}^{2^k} \alpha_{is}^k \chi_k^s, \quad k = 2, 3, \dots, \quad i = 1, \dots, 2^k.$$

Легко видеть, что при $k = 2, 3, \dots$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{а) } w_k(x) \equiv \tilde{\chi}_k^{2^k}(x) = r_{k+1}(x) \frac{2^{k/2}}{2^k - 1} I_{(0,1-2^{-k})}(x), \\ \text{где } r_{k+1}(x) - (k+1)\text{-я функция Радемахера (см. [4; с. 22]);} \\ \text{б) при } i = 1, \dots, 2^k - 1 \\ \tilde{\chi}_k^i(x) = \begin{cases} \chi_k^i(x) - r_{k+1} \frac{2^{k/2}}{(2^k - 1)}, & \text{если } 0 < x < 1 - 2^{-k}, \\ (2^k - 1)^{-1/2} \chi_k^{2^k}, & \text{если } 1 - 2^{-k} < x < 1. \end{cases} \end{array} \right. \quad (12)$$

Из (12) вытекает, что для $2 < p \leq \infty$

$$\begin{cases} 1) & \text{равномерно по } i = 1, 2, \dots, 2^k - 1 \text{ при } k \rightarrow \infty \quad \|\tilde{\chi}_k^i\|_p \cdot 2^{-k(1/2-1/p)} \rightarrow 1; \\ 2) & \|\tilde{\chi}_k^i\|_{L^p(1-2^{-k}, 1)} \leq 2 \cdot 2^{-k/p}, \quad i = 1, 2, \dots, 2^k - 1. \end{cases} \quad (13)$$

Пусть

$$\beta_k = 2^{[k(1-2/p)]+1}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (14)$$

и U_{β_k} – ортогональная матрица Уолша порядка β_k , для элементов которой имеет место равенство $|(U_{\beta_k})_{rs}| = \beta_k^{-1/2}$, $1 \leq r, s \leq \beta_k$. Для краткости введем обозначение $u_k = U_{\beta_k}$, $k = 2, 3, \dots$. Определим также последовательность натуральных чисел s_k , $k = 2, 3, \dots$, положив

$$s_2 = 1, \quad s_k = s_{k-1} + \beta_{k-1} - 1, \quad k = 3, 4, \dots$$

Построим теперь искомую полную в $L^2(0, 1)$ ортонормированную систему Ψ , элементы которой будем нумеровать тремя индексами k, i, ν , положив

$$\begin{cases} \psi_k^{i,1} = \chi_k^i & \text{при } k = 0, 1, 1 \leq i \leq 2^k, \nu = 1, \\ \psi_k^{i,\nu} = (u_k)_{\nu,1} \cdot \tilde{\chi}_k^i + \sum_{\mu=2}^{\beta_k} (u_k)_{\nu,\mu} \cdot w_{s_k+\mu-1} & \text{при } k = 2, 3, \dots, 1 \leq i \leq 2^k, \nu = 1, \dots, \beta_k. \end{cases} \quad (15)$$

В силу соотношений (12)–(14) и неравенства Хинчина для системы Радемахера (см. [4; с. 34])

$$\sup_{k,i,\nu} \|\psi_k^{i,\nu}\|_p \leq D_p, \quad (16)$$

(в (16) $\sup$ берется по всем допустимым значениям параметров k, i, ν).

Оценим коэффициенты разложения функции I_ω , $\omega \subset (0, 1/2)$, по системе Ψ . Прежде всего отметим, что для каждого $k = 0, 1, \dots$ найдется не более двух функций Хаара “ранга” k , для которых $\langle \chi_k^i, I_\omega \rangle \neq 0$. Для таких функций Хаара, очевидно, имеет место оценка $|\langle I_\omega, \chi_k^i \rangle| \leq 2^{-k/2}$, а значит (см. определение функций $\tilde{\chi}_k^i$), для тех же значений i

$$|\langle I_\omega, \tilde{\chi}_k^i \rangle| \leq 2^{-k/2}.$$

Для остальных значений i скалярное произведение $\langle I_\omega, \tilde{\chi}_k^i \rangle$ оценивается так:

$$|\langle I_\omega, \tilde{\chi}_k^i \rangle| \leq 2 \cdot 2^{-(3k)/2}.$$

Следовательно (см. (15)), при $k = 2, 3, \dots$ среди скалярных произведений $\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu} \rangle$ имеется не более $2\beta_k$ величин, оцениваемых следующим образом:

$$|\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu} \rangle| \leq 2^{-k/2} \beta_k^{-1/2} + 2^{-s_k+1} \beta_k^{-1/2} \leq C_p \cdot 2^{-k/2} \beta_k^{-1/2}. \quad (17)$$

Все остальные числа $\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu} \rangle$ допускают оценку

$$|\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu} \rangle| \leq 2^{-(3k)/2+1} \beta_k^{-1/2} + 2^{-s_k+1} \beta_k^{-1/2} \leq C_p \cdot 2^{-(3k)/2} \beta_k^{-1/2} \quad (18)$$

(в (17), (18) мы учли быстрый рост последовательности s_k , $k = 2, 3, \dots$). Определим для данного n множество индексов Λ , $\#\Lambda \leq n$, для которого

$$\left(\sum_{(k,i,\nu) \notin \Lambda} \langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu} \rangle^2 \right)^{1/2} \leq C_p \cdot n^{-p/(2(p-1))}.$$

Включим в Λ не более чем $n/2$ троек (k, i, ν) , соответствующих всем “большим” коэффициентам $\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu} \rangle$, которые оцениваются по неравенству (17) с $k \leq k_0$. Число k_0 определяется из соотношения

$$k_0 = \max \left\{ \nu : \sum_{k=2}^{\nu} 2\beta_k \leq \frac{n}{2} \right\}. \quad (19)$$

Из (19) и (14) имеем

$$k_0 \geq \frac{p}{p-2} (\log_2 n - C'_p). \quad (20)$$

Оставшуюся часть Λ' , $\#\Lambda' \geq n/2$, множества Λ составят все оставшиеся тройки (k, i, ν) с $k \leq k_1$. Для чисел k_1 справедлива оценка $2^{k_1} \beta_{k_1} \geq C''_p n$, откуда получаем

$$k_1 \geq \frac{p}{2(p-1)} (\log_2 n - C'''_p). \quad (21)$$

Используя соотношения (20), (21) и оценки (17), (18) для коэффициентов $\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu} \rangle$ мы получаем

$$\begin{aligned} S^2 &\equiv \sum_{(k,i,\nu) \notin \Lambda} |\langle I_\omega, \psi_k^{i,\nu} \rangle|^2 \\ &\leq C_p \left(\sum_{k > k_0} \beta_k \frac{2^{-k}}{\beta_k} + \sum_{k > k_1} 2^k \beta_k \frac{2^{-3k}}{\beta_k} \right) \leq C'_p (2^{-k_0} + 2^{-2k_1}) \leq C''_p \cdot n^{-p/(p-1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, $S \leq C_p \cdot n^{-p/(2(p-1))}$ и нужное нам соотношение (11) проверено. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
- [2] B. S. Kashin, “On lower estimates for n -term approximation in Hilbert spaces”, *Approximation Theory*, DARBA, Sofia, 2002, 241–257.
- [3] Б. С. Кашин, Т. Ю. Куликова, “О справедливости для фреймов одного результата об ортогональных системах”, *Матем. заметки*, **77**:2 (2005), 311–312.
- [4] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.

Б. С. Кашин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
г. Москва
E-mail: kashin@mi.ras.ru

Поступило

26.12.2013

А. В. Мелешкина

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: meleshkina-anna@mail.ru