Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

З. А. Нахушева, Задача Самарского для уравнения
фрактальной диффузии, *Матем. заметки*, 2014, том 95,
выпуск 6, 878–883

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10457>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 12:53:57

Задача Самарского для уравнения фрактальной диффузии

З. А. Нахушева

Доказаны существование и единственность решения задачи Самарского в видоизмененной постановке для нагруженного дифференциального уравнения фрактальной диффузии; предложена конструктивная схема эквивалентной редукции этой нелокальной краевой задачи к локальной.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10457

В работе установлены существование и единственность решения задачи А. А. Самарского в видоизмененной постановке для уравнения фрактальной диффузии; предложена конструктивная схема редукции этой нелокальной краевой задачи к локальной.

В прямоугольной области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < T\}$ евклидовой плоскости точек (x, y) рассмотрим уравнение фрактальной диффузии

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, \eta) = \beta u_{xx}(x, y), \quad (1)$$

где $\beta = \text{const} > 0$, D_{0y}^{α} – оператор дробного дифференцирования Римана–Лиувилля порядка α , $0 < \alpha \leq 1$:

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial y} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, \eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{u(x, \eta)}{(y-\eta)^{\alpha}} d\eta,$$

$\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Уравнение (1) относится к классу нагруженных дифференциальных уравнений с частной производной по переменной y дробного порядка и является математической моделью многих процессов и явлений в средах с фрактальной топологией [1]–[4]. В этих моделях независимая переменная y играет роль безразмерной временной переменной.

Задача Самарского в видоизмененной постановке состоит в отыскании решения $u(x, y)$ уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющего условиям:

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{1-\alpha} u(x, y) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, y) = u_0(y), \quad 0 < y \leq T, \quad (3)$$

$$\int_0^l u(x, y) dx = \mu y^{\alpha-1}, \quad 0 < y \leq T, \quad (4)$$

где $\tau(x)$ и $u_0(y)$ – заданные функции, μ – заданное действительное число.

Предполагается, что функция $y^{1-\alpha}u(x, y)$ непрерывна в замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω , $u(x, y)$ в области Ω обладает производной порядка α по y , суммируемой по $x \in [0, l]$ для всех $y \in]0, T]$, $\tau(x) \in C[0, l]$, $u_0(y) \in C[0, T]$ и при $y \rightarrow 0$ может обращаться в бесконечность порядка $\leq 1 - \alpha$, u_{xx} существует и конечна для всех $x \in [0, l]$, $y \in]0, T]$.

Условие

$$\int_0^l \tau(x) dx = \mu \quad (5)$$

является необходимым условием разрешимости задачи (1)–(4).

В силу (5) интегральное условие (4) эквивалентно уравнению

$$D_{0y}^\alpha \int_0^l u(x, \eta) dx = 0, \quad 0 < y \leq T. \quad (6)$$

Из уравнений (1) и (6) следует, что условие (4) можно заменить краевым условием

$$u_x(0, y) = u_x(l, y), \quad 0 < y \leq T. \quad (7)$$

При $\alpha = 1$ задача (1)–(3), (7) переходит в краевую задачу второго класса по терминологии Стеклова [5]. Этой и более общей нелокальной двухточечной краевой задаче посвящены работы Ионкина и Моисеева [6], [7].

Редукция задачи Самарского (1)–(4) к локальной краевой задаче осуществляется по следующей схеме.

Любое решение $u(x, y)$ уравнения (1) в области Ω представимо в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y), \quad (8)$$

где

$$2v(x, y) = u(x, y) + u(l - x, y), \quad (9)$$

$$2w(x, y) = u(x, y) - u(l - x, y). \quad (10)$$

Так как $w(0, y) + w(l, y) = 0$, $w_x(0, y) = w_x(l, y)$, то функции (9) и (10) являются решениями уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющими краевым условиям

$$\lim_{y \rightarrow 0} v(x, y)y^{1-\alpha} = \tau^+(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (11)$$

$$v_x(0, y) = 0, \quad v_x(l, y) = 0, \quad 0 < y \leq T, \quad (12)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} w(x, y)y^{1-\alpha} = \tau^-(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (13)$$

$$w(0, y) = \varphi_0(y), \quad w(l, y) = \varphi_l(y), \quad 0 < y \leq T, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} 2\tau^+(x) &= \tau(x) + \tau(l - x), & 2\tau^-(x) &= \tau(x) - \tau(l - x), \\ \varphi_0(y) &= u_0(y) - v(0, y), & \varphi_l(y) &= -\varphi_0(y). \end{aligned} \quad (15)$$

Нелокальная задача (2)–(4) для уравнения (1) в области Ω свелась к последовательному решению двух локальных краевых задач (11), (12) и (13), (14) для этого же уравнения в этой же области Ω .

Поскольку

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{(y\eta)^{1-\alpha} u(x, y\eta)}{\eta^{1-\alpha} (1-\eta)^\alpha} d\eta = \tau(x) \Gamma(\alpha),$$

то условия (11) и (13) можно переписать в виде

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} v(x, y) = \tau^+(x) \Gamma(\alpha), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (16)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} w(x, y) = \tau^-(x) \Gamma(\alpha), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (17)$$

Далее, не нарушая общности рассуждения, будем считать, что $\beta = 1$. Единственное решение $v(x, y)$ краевой задачи (12), (16) для уравнения

$$D_{0y}^\alpha v(x, y) = v_{xx}(x, y) \quad (18)$$

определяется формулой

$$v(x, y) = \Gamma(\alpha) \int_0^l G^+(x, y; \xi, 0) \tau^+(\xi) d\xi. \quad (19)$$

Здесь

$$G^+(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\Gamma_n(x - \xi, y - \eta) + \Gamma_n(x + \xi, y - \eta)]$$

– функция Грина задачи (12), (16), где

$$\Gamma_n(s, t) = \frac{1}{2} t^{\alpha/2-1} e_{1, \alpha/2}^{1, \alpha/2} \left(-\frac{|s + 2nl|}{t^{\alpha/2}} \right)$$

– фундаментальное решение,

$$e_{\alpha, \beta}^{\mu, \delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \mu) \Gamma(\delta - \beta n)}$$

– функция типа Райта [4].

Если начальная функция $\tau^+(x)$ представима в виде ряда Фурье

$$\tau^+(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \sqrt{\lambda_k} x, \quad \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2,$$

то функция $v(x, y)$ находится по формуле

$$v(x, y) = y^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp_{\alpha}(-\lambda_k y^{\alpha}) \cos \sqrt{\lambda_k} x,$$

где

$$\exp_{\alpha}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha + \alpha j)}$$

– обобщенная экспоненциальная функция, которая относится к классу функций типа Миттаг-Леффлера [3].

Из (15) и (19) заключаем, что

$$\varphi_0(y) = u_0(y) - \Gamma(\alpha) \int_0^l G^+(0, y; \xi, 0) \tau^+(\xi) d\xi.$$

Решение $w(x, y)$ краевой задачи (14), (17) для уравнения

$$D_{0y}^\alpha w(x, y) = w_{xx} \quad (20)$$

определяется формулой

$$w(x, y) = \int_0^y \varphi_0(\eta) [G_\xi^-(x, y; 0, \eta) + G_\xi^-(x, y; l, \eta)] d\eta + \Gamma(\alpha) \int_0^l \tau^-(\xi) G^-(x, y; \xi, 0) d\xi \quad (21)$$

с функцией Грина

$$G^-(x, y; \xi, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\Gamma_n(x - \xi, y - \eta) - \Gamma_n(x + \xi, y - \eta)].$$

Единственное решение $u(x, y)$ задачи Самарского в видоизмененной постановке для уравнения фрактальной диффузии (1) (с $\beta = 1$) задается формулой (8), где функция $v(x, y)$ представима в виде (19), а функция $w(x, y)$ – в виде (21).

Для уравнения

$$D_{0y}^\alpha u(x, y) = u_{xx}(x, y), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (22)$$

рассмотрим теперь краевую задачу с локальными условиями (2), (3) и нелокальным условием

$$u_x(0, y) - u_x(l, y) = \gamma u(l, y), \quad 0 < y \leq T, \quad (23)$$

где $\gamma = \gamma(y) \in C[0, T]$ – заданная неотрицательная функция. При $\alpha = 1$, $\gamma = \text{const}$ эта задача исследована в работе [8] неклассическим методом разделения переменных.

Замена (8)–(10) редуцирует задачу (2), (3), (23) для уравнения (22) к задаче отыскания решения $v(x, y)$ уравнения (18), удовлетворяющего начальному условию (11) и граничным условиям

$$v_x(0, y) - \gamma v(0, y) = -\frac{\gamma u_0(y)}{2}, \quad v_x(l, y) + \gamma v(l, y) = \frac{\gamma u_0(y)}{2}, \quad 0 < y \leq T, \quad (24)$$

и к задаче отыскания решения $w(x, y)$ уравнения (20) по начальному условию (13) и граничным условиям

$$w(0, y) = u_0(y) - v(0, y), \quad w(l, y) = v(l, y) - u_0(y). \quad (25)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} u(l, y) &= 2v(0, y) - u_0(y) = 2v(l, y) - u_0(y), \\ 2v_x(0, y) &= u_x(0, y) - u_x(l, y) = \gamma u(l, y) = \gamma [2v(0, y) - u_0(y)], \\ v_x(0, y) &= \gamma v(0, y) - \frac{\gamma}{2} u_0(y), \end{aligned}$$

$$2v_x(l, y) = u_x(l, y) - u_x(0, y) = -\gamma u(l, y) = -\gamma[2v(l, y) - u_0(y)],$$

$$v_x(l, y) = -\gamma v(l, y) + \frac{\gamma}{2} u_0(y).$$

Следовательно, нелокальная краевая задача (2), (3), (23) для уравнения (22), которая при $\alpha = 1$ является исключительным случаем задачи Стеклова второго класса, редуцируется к последовательному решению двух локальных краевых задач: задача (11), (24) для уравнения (18) и задача (13), (25) для уравнения (20).

Задача отыскания решения $v(x, y)$ уравнения

$$v_y = v_{xx} \quad (26)$$

при граничных условиях

$$v_x(0, y) - \gamma v(0, y) = 0, \quad v_x(l, y) + \gamma v(l, y) = 0, \quad (27)$$

где γ – коэффициент теплообмена, и при начальном условии

$$v(x, 0) = \tau^+(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (28)$$

известна как задача распространения тепла $v(x, y)$ в стержне $0 \leq x \leq l$, на концах которого происходит свободный теплообмен с окружающей средой.

Решение $u(x, y)$ задачи

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad u(0, y) = 0,$$

$$u_x(0, y) - u_x(l, y) = \gamma u(0, y), \quad 0 \leq y \leq T,$$

для уравнения теплопроводности $u_y = u_{xx}$ в области Ω представимо в виде (8), где $v(x, y)$ – решение задачи (26)–(28), а $w(x, y)$ – решение уравнения $w_y = w_{xx}$, удовлетворяющее условиям

$$w(x, 0) = \tau^-(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad w(0, y) = -v(0, y), \quad w(l, y) = v(l, y), \quad 0 \leq y \leq T.$$

Предложенный в работе [9] метод редукции краевой задачи с интегральным условием к локальной задаче можно реализовать и в случае задачи (1)–(4).

Действительно, в уравнении (22) совершим переход к новой зависимой переменной

$$U(x, y) = \int_0^x u(\xi, y) d\xi. \quad (29)$$

Функция (29) является решением уравнения

$$D_{0y}^\alpha U_x(x, y) - U_{xxx}(x, y) = 0 \quad (30)$$

и в силу (2), (3), (6) удовлетворяет следующим условиям:

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{1-\alpha} U_x(x, y) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (31)$$

$$U(0, y) = 0, \quad U_x(0, y) = u_0(y), \quad 0 < y \leq T, \quad (32)$$

$$D_{0y}^\alpha U(l, y) = 0. \quad (33)$$

Единственное решение $U(l, y)$ уравнения (33), удовлетворяющее условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{1-\alpha} U(l, y) = \tau_1(l),$$

определяется формулой

$$U(l, y) = \tau_1(l) y^{\alpha-1}, \quad 0 < y \leq T. \quad (34)$$

Задача Самарского (2)–(4) для уравнения (1) (при $\beta = 1$) свелась к локальной краевой задаче (31), (32), (34) для уравнения третьего порядка (30). При $\alpha = 1$ корректность этой локальной краевой задачи доказана в работе [10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. М. Зеленый, А. В. Милованов, “Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики”, *УФН*, **174**:8 (2004), 809–852.
- [2] А. М. Нахушев, *Нагруженные уравнения и их применение*, Наука, М., 2012.
- [3] В. А. Нахушева, *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов*, Наука, М., 2006.
- [4] А. В. Псху, *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005.
- [5] В. А. Стеклов, *Основные задачи математической физики*, Наука, М., 1983.
- [6] Н. И. Ионкин, “Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием”, *Дифференц. уравнения*, **13**:2 (1977), 294–304.
- [7] Н. И. Ионкин, Е. И. Моисеев, “О задаче теплопроводности с двухточечными краевыми условиями”, *Дифференц. уравнения*, **15**:7 (1979), 1284–1295.
- [8] А. Ю. Мокин, “Применение неклассического метода разделения переменных к решению нелокальной задачи теплопроводности”, *Дифференц. уравнения*, **49**:1 (2013), 60–67.
- [9] З. А. Нахушева, “Характеристические и смешанные задачи для уравнений второго порядка гиперболического типа”, *Дифференц. уравнения*, **48**:10 (2012), 1418–1427.
- [10] Т. Д. Джураев, *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, Фан, Ташкент, 1979.

З. А. Нахушева

Научно-исследовательский институт прикладной
математики и автоматизации КБ НЦ РАН,
г. Нальчик
E-mail: niipma@mail333.com

Поступило

23.04.2013

Исправленный вариант

10.07.2013