Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Кудрявцева, Об инвариантах сопряженности на группе, сохраняющих площади диффеоморфизмов круга, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 951–954

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 10:45:18

Об инвариантах сопряженности на группе сохраняющих площади диффеоморфизмов круга

Е. А. Кудрявцева

Пусть $\mathcal{G} = S \operatorname{Diff}(B^2)$ – группа диффеоморфизмов круга $B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ на себя, сохраняющих форму площади $\omega = dx \wedge dy$, т.е. группа симплектоморфизмов круга (B^2, ω) . В настоящей работе изучаются инварианты сопряженности на группе $\tilde{\mathcal{G}}$ – универсальной накрывающей группы $\mathcal{G}$. Мы доказываем, что любой инвариант сопряженности на $\tilde{\mathcal{G}}$, имеющий регулярную и C^1 -непрерывную производную, выражается через инвариант Калаби. Перейдем к точным формулировкам.

1. Инварианты сопряженности на группе $\tilde{\mathcal{G}}$. Рассмотрим группу $\mathcal{G} = S \operatorname{Diff}(B^2)$ сохраняющих площади диффеоморфизмов (т.е. симплектоморфизмов) круга с C^∞ -топологией. Эта группа линейно связна, так как она является (сильным деформационным) ретрактом [1] линейно связной [2] группы $\operatorname{Diff}(B^2)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов. Более того, для любого симплектоморфизма $\varphi \in \mathcal{G}$ существует кусочно-гладкое семейство симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{G}$, $0 \leq t \leq 1$, такое, что $\varphi_0 = \operatorname{id}_{B^2}$ и $\varphi_1 = \varphi$. Ясно, что при любом $t \in [0, 1]$ поле скоростей $(d/dt)\varphi_t$ является гамильтоновым на (B^2, ω) с функцией Гамильтона $H_t \in C^\infty(B^2)$, постоянной на окружности ∂B^2 . Без ограничения общности мы можем и будем считать, что $H_t|_{\partial B^2} = 0$; обозначим множество гладких функций на B^2 с этим свойством через $C_0^\infty(B^2, \partial B^2)$. Итак, рассматриваемое семейство симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{G}$ эквивалентным образом задается (кусочно-гладким) семейством функций

$$H_t \in C_0^\infty(B^2, \partial B^2), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1)$$

Универсальную накрывающую $\tilde{\mathcal{G}}$ группы $\mathcal{G}$ можно определить так. Любой ее элемент $\tilde{\varphi}$ задается (кусочно-гладким) семейством симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{G}$, $0 \leq t \leq 1$, таким, что $\varphi_0 = \operatorname{id}_{B^2}$. Два семейства $\varphi_t, \psi_t \in \mathcal{G}$, $0 \leq t \leq 1$, с $\varphi_0 = \psi_0 = \operatorname{id}_{B^2}$ задают один и тот же элемент группы $\tilde{\mathcal{G}}$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1 = \psi_1$ и пути $\varphi_t(1, 0)$ и $\psi_t(1, 0)$ гомотопны на окружности ∂B^2 относительно концов. Имеем каноническую проекцию $p: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$, $\tilde{\varphi} \mapsto \varphi_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $I: G \rightarrow \mathbb{R}$ на группе G называется *инвариантом сопряженности*, если $I(ghg^{-1}) = I(h)$ для любых элементов $g, h \in G$.

ПРИМЕР 1. *Инвариант Калаби* [3] на группе $\tilde{\mathcal{G}}$ определяется формулой

$$\operatorname{Cal}(\tilde{\varphi}) := \int_0^1 \left(\int_{B^2} H_t \omega \right) dt, \quad \tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{G}},$$

где $H_t \in C_0^\infty(B^2, \partial B^2)$, $0 \leq t \leq 1$, – семейство функций (1), отвечающее кусочно-гладкому семейству симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{G}$, $0 \leq t \leq 1$, $\varphi_0 = \operatorname{id}_{B^2}$, задающему элемент $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{G}}$. Нетрудно показать, что функция $\operatorname{Cal}: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}$ определена корректно и является гомоморфизмом в абелеву группу $(\mathbb{R}, +)$, а потому является инвариантом сопряженности. Другие известные инварианты сопряженности на $\tilde{\mathcal{G}}$ – *норма Хоффера* [4], количество или площадь множества неподвижных точек, спектральные инварианты.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00748-а) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-581.2014.1).

DOI: 10.4213/mzm10459

© Е. А. Кудрявцева, 2014

2. Дифференцируемые функции на группе $\tilde{\mathcal{G}}$. Мотивировка следующего определения такова. Группа $\tilde{\mathcal{G}}$ – это “бесконечномерная группа Ли”, причем “касательное пространство” $T_{\tilde{\varphi}}\tilde{\mathcal{G}}$ в любой его точке $\tilde{\varphi}$ состоит из всех гамильтоновых (или бездивергентных) векторных полей с функциями Гамильтона $H \in C_0^\infty(B^2, \partial B^2)$. Поэтому векторное пространство $T_{\tilde{\varphi}}\tilde{\mathcal{G}} = S \text{Vect}(B^2)$ можно отождествить с пространством $C_0^\infty(B^2, \partial B^2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию $I: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}$ назовем *дифференцируемой* в точке $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{G}}$, если существует линейный вещественнозначный функционал на векторном пространстве

$$C_0^\infty(B^2, \partial B^2) \approx S \text{Vect}(B^2) = T_{\tilde{\varphi}}\tilde{\mathcal{G}},$$

обозначаемый через $dI_{\tilde{\varphi}}$ и называемый *производной* функции I в точке $\tilde{\varphi}$, такой, что для любого гладкого семейства симплектоморфизмов $\varphi_t \in \mathcal{G}$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, со свойством $\varphi_0 = \text{id}_{B^2}$ и для соответствующего семейства функций $H_t \in C_0^\infty(B^2, \partial B^2)$, $-\varepsilon < t < \varepsilon$, выполнено

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} I(\tilde{\varphi}_t \tilde{\varphi}) = dI_{\tilde{\varphi}}(H_0).$$

Здесь $\varepsilon > 0$, через $\tilde{\varphi}_t$ обозначен элемент группы $\tilde{\mathcal{G}}$, задаваемый семейством симплектоморфизмов $\varphi_\tau \in \mathcal{G}$, $0 \leq \tau \leq t$, если $t \geq 0$ (семейством $\varphi_{-\tau} \in \mathcal{G}$, $0 \leq \tau \leq -t$, если $t < 0$). Производную $dI_{\tilde{\varphi}}$ назовем *регулярной*, если она является регулярным элементом двойственного пространства $C_0^\infty(B^2, \partial B^2)^*$, т.е. ее значение на любой функции $H \in C_0^\infty(B^2, \partial B^2)$ имеет вид

$$dI_{\tilde{\varphi}}(H) = \int_{B^2} K_I(\tilde{\varphi}, x, y) H(x, y) dx dy$$

для некоторой измеримой функции $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot)$ в круге B^2 , называемой *плотностью* функционала $dI_{\tilde{\varphi}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть функция $I: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема всюду на $\tilde{\mathcal{G}}$ и имеет регулярную производную. Будем говорить, что производная *непрерывна относительно C^k -топологии* на $\tilde{\mathcal{G}}$ (для $k \geq 0$), если ее плотность $K_I = K_I(\tilde{\varphi}, x, y)$ непрерывна на $\tilde{\mathcal{G}} \times B^2$ относительно топологии прямого произведения, где группа $\tilde{\mathcal{G}}$ снабжена C^k -топологией.

ПРИМЕР 2. Инвариант Калаби дифференцируем всюду на $\tilde{\mathcal{G}}$. Его производная регулярна и имеет постоянную плотность $K_{\text{Cal}} = 1$. Поэтому его производная непрерывна относительно любой топологии на группе $\tilde{\mathcal{G}}$.

3. Основной результат. Наш результат аналогичен следующим результатам. Любой гомоморфизм группы $\tilde{\mathcal{G}}$ в группу $(\mathbb{R}, +)$ имеет вид $h \circ \text{Cal}$ для некоторого гомоморфизма $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ [5]. Любой инвариант “первого порядка” уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости в ограниченной области в $\mathbb{R}^3$ выражается через энергию и спиральность [6].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $I: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}$ – инвариант сопряженности на группе $\tilde{\mathcal{G}}$, дифференцируемый всюду на $\tilde{\mathcal{G}}$ и имеющий регулярную и непрерывную производную относительно C^1 -топологии на $\tilde{\mathcal{G}}$. Тогда этот инвариант выражается через инвариант Калаби, т.е. имеет вид $I = h \circ \text{Cal}$ для некоторой функции $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

ЛЕММА. Пусть $I: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}$ – инвариант сопряженности, дифференцируемый в точке $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{G}}$. Тогда для любого элемента $\psi \in \tilde{\mathcal{G}}$, коммутирующего с $\tilde{\varphi}$, и любой функции $H \in C_0^\infty(B^2, \partial B^2)$ выполнено равенство $dI_{\tilde{\varphi}}(H) = dI_{\tilde{\varphi}}(H \circ \psi)$, где $\psi := p(\tilde{\psi}) \in \mathcal{G}$, $p: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{G}$ – проекция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в обозначениях определения 2 имеем

$$I(\tilde{\varphi}_t \tilde{\varphi}) = I(\tilde{\psi}^{-1} \tilde{\varphi}_t \tilde{\varphi} \tilde{\psi}) = I(\tilde{\psi}^{-1} \tilde{\varphi}_t \tilde{\psi} \tilde{\varphi}) = I(\tilde{\chi}_t \tilde{\varphi}),$$

где $\tilde{\chi}_t := \tilde{\psi}^{-1} \tilde{\varphi}_t \tilde{\psi}$. Семейству $\tilde{\chi}_t$ отвечает семейство функций $H_t \circ \psi \in C_0^\infty(B^2, \partial B^2)$. Дифференцируя доказанное соотношение $I(\tilde{\varphi}_t \tilde{\varphi}) = I(\tilde{\chi}_t \tilde{\varphi})$ по t при $t = 0$, получаем требуемое равенство для $H = H_0$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что в условиях леммы производная $dI_{\tilde{\varphi}}$ в точке $\tilde{\varphi}$ регулярна и ее плотность $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot)$ непрерывна на круге B^2 . Тогда верно равенство $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot) = K_I(\tilde{\varphi}, \psi(\cdot))$ на круге B^2 . В частности, $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot) = K_I(\tilde{\varphi}, \varphi(\cdot))$, т.е. функция $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot)$ постоянна на любой φ -орбите, а потому и на замыкании любой φ -орбиты в круге B^2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, равенство из леммы переписывается в виде

$$\int_{B^2} K_I(\tilde{\varphi}, \cdot) H \omega = \int_{B^2} K_I(\tilde{\varphi}, \cdot) (H \circ \psi) \omega, \quad H \in C_0^\infty(B^2, \partial B^2).$$

Так как диффеоморфизм $\psi \in \mathcal{G}$ сохраняет 2-форму ω , левая часть этого равенства равна $\int_{B^2} K_I(\tilde{\varphi}, \psi(\cdot)) (H \circ \psi) \omega$. Так как полученное равенство верно для любой функции $H \in C_0^\infty(B^2, \partial B^2)$ и функция $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot)$ непрерывна на круге B^2 , получаем требуемое равенство. Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что симплектоморфизм $\varphi = p(\tilde{\varphi}) \in \mathcal{G}$ топологически транзитивен, т.е. его орбита всюду плотна в круге B^2 . Так как замыкание этой орбиты совпадает с кругом B^2 , в силу следствия функция $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot)$ постоянна в круге B^2 . Согласно результату [7; теорема 3.1] из консервативной динамики множество топологически транзитивных элементов C^1 -плотно в $\mathcal{G}$ (и, более того, является C^1 -мощным, т.е. содержит пересечение счетного семейства C^1 -плотных C^1 -открытых подмножеств). Значит, для “почти всех” (т.е. образующих C^1 -мощное подмножество в $\tilde{\mathcal{G}}$) элементов $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{G}}$ функция $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot)$ постоянна в круге B^2 .

По условию теоремы непрерывная функция $K_I(\tilde{\varphi}, \cdot)$ на круге B^2 непрерывно зависит от элемента $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{G}}$ относительно C^1 -топологии на $\tilde{\mathcal{G}}$. Но по доказанному выше эта функция постоянна в круге B^2 для “почти всех” (в смысле C^1 -топологии) элементов $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{G}}$. Поэтому она постоянна в круге B^2 для всех элементов $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{G}}$, т.е. является константой $K_I(\tilde{\varphi}) := K_I(\tilde{\varphi}, x, y)$ на круге, не зависящей от точки $(x, y) \in B^2$.

Имеем

$$dI_{\tilde{\varphi}}(H) = K_I(\tilde{\varphi}) \int_{B^2} H \omega = K_I(\tilde{\varphi}) d\text{Cal}_{\tilde{\varphi}}(H).$$

Значит, функция I локально постоянна на любом множестве уровня $\text{Cal}^{-1}(c)$ инварианта Калаби, $c \in \mathbb{R}$. Хорошо известно, что любое множество уровня $\text{Cal}^{-1}(c)$ в $\tilde{\mathcal{G}}$ линейно связно (это очевидно следует из того, что семейства функций (1) со средним значением c образуют выпуклое подмножество). Поэтому на множестве $\text{Cal}^{-1}(c)$ функция I постоянна, т.е. равна некоторой константе $h(c)$, зависящей только от $c \in \mathbb{R}$ (для некоторой функции $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$). Таким образом, $I(\tilde{\varphi}) = h(\text{Cal}(\tilde{\varphi}))$ для любого $\tilde{\varphi} \in \tilde{\mathcal{G}}$. Теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $I: \tilde{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}$ – инвариант сопряженности на группе $\tilde{\mathcal{G}}$, дифференцируемый на C^1 -открытом подмножестве $U \subset \tilde{\mathcal{G}}$ и имеющий регулярную и непрерывную производную относительно C^1 -топологии на $U \subset \tilde{\mathcal{G}}$. Тогда инвариант $I|_U$ постоянен на любой линейно-связной компоненте множества уровня $U \cap \text{Cal}^{-1}(c)$ инварианта Калаби в U , $c \in \mathbb{R}$.*

Известно [8], [9] описание инвариантов сопряженности на множестве “невыврожденных интегрируемых симплектоморфизмов” в группе гомеоморфизмов $\text{Homeo}(M^2) \supset S\text{Diff}(M^2)$, где M^2 – замкнутая ориентируемая поверхность, снабженная формой площади ω . (Указанное множество состоит из отображений за время 1 потоков гамильтоновых векторных полей на (M^2, ω) с морсовскими функциями Гамильтона $H \in C^\infty(M^2)$, не зависящими от

времени.) Автором исследовалась [10], [11] непрерывность этих инвариантов (и их комбинаций) относительно C^∞ -топологии на $C^\infty(M^2)$.

Автор выражает благодарность Г. Хорнигу и Х. Цишангу за полезные обсуждения и организацию в 2000–2001 г. семинара по топологическим инвариантам магнитных полей, Л. В. Полтеровичу за указание на работу [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Moser, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120** (1965), 286–294. [2] S. Smale, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10**:4 (1959), 621–626. [3] E. Calabi, *Problems in Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970, 1–26. [4] H. Hofer, *Comment. Math. Helv.*, **68**:1 (1993), 48–72. [5] A. Banyaga, *Comment. Math. Helv.*, **53**:2 (1978), 174–227. [6] D. Serre, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **289**:4 (1979), 267–270; *Phys. D*, **13**:1-2 (1984), 105–136. [7] C. Bonatti, S. Crovisier, *Invent. Math.*, **158**:1 (2004), 33–104. [8] A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*. 15–2, Зап. научн. сем. ПОМИ, **235**, ПОМИ, СПб., 1996, 22–53. [9] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:1 (1995), 65–102. [10] Е. А. Кудрявцева, *Докл. РАН*, **361**:3 (1998), 314–317. [11] Ю. А. Браилов, Е. А. Кудрявцева, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1999, № 2, 20–27.

Е. А. Кудрявцева

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: eakudr@mech.math.msu.su

Поступило

09.01.2014