Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Боккуто, В. А. Скворцов, Ф. Тулоне, Интегрирование функций со значениями в комплексном пространстве Рисса и некоторые приложения в гармоническом анализе, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 1, 12–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 18:20:28

Интегрирование функций со значениями в комплексном пространстве Рисса и некоторые приложения в гармоническом анализе

А. Боккуто, В. А. Скворцов, Ф. Тулоне

Теория интеграла Хенстока–Курцвейля распространяется на случай функций со значениями в комплексном пространстве Рисса R , определенных на любых нульмерных компактных абелевых группах. Построенный интеграл применяется для решения задачи восстановления с помощью обобщенных формул Фурье, R -значных коэффициентов рядов по системам характеров указанных групп.

Библиография: 33 названия.

DOI: 10.4213/mzm10463

1. Введение. Теория обобщенных интегралов, решающих задачу восстановления коэффициентов ортогонального ряда по его сумме, берет свое начало с работ Данжуа, который в [1] определил процесс интегрирования, названный *тотализацией* T_{2s} и настолько общий, что сумма любого всюду сходящегося тригонометрического ряда интегрируема и коэффициенты вычисляются по формулам Фурье, в которых используется этот интеграл. Эта теория была развита и упрощена многими авторами (подробнее см. [2]–[5]). Позднее та же проблема восстановления коэффициентов была рассмотрена и для других ортогональных систем.

Поскольку сумма всюду сходящегося ортогонального ряда, для которого имеет место теорема единственности, может не быть интегрируемой по Лебегу, то возникает необходимость для восстановления коэффициентов ввести некоторые обобщения интеграла Лебега, как это было сделано в упомянутом выше классическом тригонометрическом случае.

Первый интеграл, решающий проблему восстановления коэффициентов для рядов Уолша (и Хаара), был введен в [6] в форме дескриптивного определения. Конструктивное определение типа Данжуа, базирующееся на трансфинитной индукции, было дано в [7], а затем независимо в [8]. Для рядов Виленкина та же проблема была рассмотрена в [9] (см. также [10]–[14]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 14-01-00417), программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-3682.2014.1) и при частичной поддержке Института математики Быдгощского университета, Польша (UKW, Bydgoszcz, Poland).

Единый подход к решению проблемы восстановления коэффициентов для широкого класса ортогональных систем удастся получить с помощью конструкции Хенстока–Курцвейля (см. [15]–[17]). Идея заключается в том, чтобы свести эту проблему к проблеме восстановления функции по ее производной относительно дифференциального базиса, который определяется системой и рассматриваемым типом сходимости. В свою очередь задача восстановления первообразной решается путем построения интеграла типа Хенстока–Курцвейля, соответствующего выбранному базису. При этом существенным моментом является обеспечение единственности первообразной.

Метод Хенстока–Курцвейля может быть применен и в случае, когда рассматривается представление векторно-значных функций. По поводу интегралов типа Хенстока–Курцвейля для банаховозначных функций см. [18], [19], а для функций со значениями в пространствах Рисса (векторных решетках) см., например, [20], [21] и библиографию к этим работам.

В [22] были рассмотрены ряды Уолша с коэффициентами из пространств Рисса, и задача восстановления коэффициентов сходящихся рядов Уолша по их сумме с помощью обобщенных формул Фурье была решена путем введения соответствующего интеграла типа Хенстока–Курцвейля, определенного для функций со значениями в пространствах Рисса. В этой статье мы распространяем этот результат на случай рядов по системам характеров любых нульмерных компактных абелевых групп. Столь общая постановка задачи покрывает, наряду с упомянутым случаем системы Уолша, также случай системы Виленкина–Прайса и системы характеров группы целых p -адических чисел. Целесообразность рассмотрения этой теории в классе функций со значениями в пространствах Рисса вытекает из многочисленных примеров применения таких функций в различных разделах анализа (см. [20], [23], [24]).

Поскольку в общем случае характеры являются комплексно-значными функциями, мы должны будем рассмотреть комплексные пространства Рисса, которые могут быть получены путем *комплексификации* обычных пространств Рисса. Мы напомним соответствующие определения в п. 2. В связи с этим нам придется распространить теорию интеграла Хенстока–Курцвейля на этот случай. Мы это обсудим в п. 3. Используя дифференциальный базис на нульмерной локально-компактной абелевой группе (см. [25]), мы обобщим соответствующее определение интеграла типа Хенстока–Курцвейля относительно этого базиса на случай функций со значениями в комплексном пространстве Рисса. В этом же разделе мы введем такое понятие производной относительно базиса, которое обеспечит единственность первообразной, и покажем, что введенный интеграл решает задачу восстановления первообразной по этой производной. Наконец, в п. 4 мы применим этот результат к упомянутой выше задаче восстановления коэффициентов ряда по системе характеров.

2. Виды сходимости в пространствах Рисса. Комплексификация. Напомним основные понятия, связанные с пространствами Рисса и их комплексификацией (см. [20], [24], [26], [27]).

Пространством Рисса (или векторной решеткой) называется вещественное частично упорядоченное векторное пространство R , в котором структуры векторного пространства и упорядоченного множества естественным образом согласованы и для

любых двух элементов существует их супремум. В отечественной литературе пространства Рисса иногда называют K -линеалами (см. [26]).

Пространство Рисса R называется *полным по Дедекинду*, если каждое непустое ограниченное сверху подмножество $A \subset R$ имеет супремум в R , который мы обозначим $\sup A$. Все функциональные пространства L_p , $1 \leq p \leq \infty$, являются полными по Дедекинду пространствами Рисса относительно поточечного упорядочения почти всюду, а пространство $C[0, 1]$ дает пример неполного по Дедекинду пространства.

Пространство R называется *архимедовым*, если для любых $a, b \in R$ из выполнения неравенства $na \leq b$ при всех $n \in \mathbb{N}$ следует $a \leq 0$. Примером неархимедова пространства Рисса является $\mathbb{R}^2$ в лексикографическом упорядочении.

Имеет место следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1 (см. [20; утверждение 2.10], [24; с. 125]). *Каждое полное по Дедекинду пространство Рисса является архимедовым.*

Сетью $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ в R , где $(\Lambda, \geq) \neq \emptyset$ является направленным множеством, называется любая функция из Λ в R . Сеть $(p_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ называется *(о)-сетью*, если она убывает (т.е. $p_{\lambda_1} \leq p_{\lambda_2}$ при $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$) и $\inf_\lambda p_\lambda = 0$. В частности, при $\Lambda = \mathbb{N}$ мы получаем определение *(о)-последовательности*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что сеть $(x_\lambda)_\lambda$ *сходится относительно порядка* (или *(о)-сходится*) к $x \in R$, если существует *(о)-сеть* $(p_\lambda)_\lambda$ (с тем же направленным множеством Λ), для которой $|x_\lambda - x| \leq p_\lambda$ при всех $\lambda \geq \lambda_0$ для некоторого $\lambda_0 \in \Lambda$. В этом случае пишем $x = (o) \lim_\lambda x_\lambda$. В случае $\Lambda = \mathbb{N}$ получаем определение *(о)-сходящейся последовательности*.

(о)-Сходимость ряда с членами из пространства Рисса определяется естественным образом через *(о)-сходимость* его частичных сумм.

Известно (см. [28]), что ограниченная сеть $(x_\lambda)_\lambda$ в полном по Дедекинду пространстве Рисса *(о)-сходится* к x тогда и только тогда, когда

$$(o) \liminf_\lambda x_\lambda = (o) \limsup_\lambda x_\lambda = x.$$

Для архимедовых пространств Рисса можно рассмотреть другой вид сходимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $e \in R$, $e \geq 0$, $e \neq 0$. Сеть $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *сходится e -равномерно* к $x \in R$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon) \in \Lambda$ такое, что

$$|x_\lambda - x| \leq \varepsilon e \quad \text{для всех } \lambda \geq \lambda_0.$$

Сеть x_λ *(r)-сходится (относительно равномерно сходится, по [24], или сходится относительно регулятора, по [26])* к $x \in R$, если существует положительный элемент $e \in R$ (*регулятор*) такой, что x_λ сходится e -равномерно к $x \in R$. В случае $\Lambda = \mathbb{N}$ получаем определение *(r)-сходимости* последовательности.

Скажем, что $(x_n)_n$ в R является *e -равномерно последовательностью Коши* (при $e \in R$, $e \geq 0$, $e \neq 0$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $n_1 = n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$|x_n - x_{n+p}| \leq \varepsilon e \quad \text{при всех } n \geq n_1, \quad p \in \mathbb{N}$$

(см. [24; определение 39.1]).

Пространство Рисса R называется *равномерно полным*, если для каждого $e \in R$, $e \geq 0$, $e \neq 0$, любая e -равномерная последовательность Коши e -равномерно сходится. Заметим, что *каждое полное по Дедекинду пространство Рисса равномерно полно* (см. [24; лемма 39.2 и теорема 39.4]), однако обратное утверждение неверно: пространство $\mathcal{C}([0, 1])$ дает нужный пример.

Легко проверить, что в архимедовом пространстве Рисса e -равномерная сходимос-ть влечет (o) -сходимость, но обратное, вообще говоря, неверно (см. [24], [26]). Однако это верно при некоторых дополнительных предположениях (см. ниже утверждение 2).

Скажем, что пространство Рисса обладает *свойством σ* (см. [24; с. 460]), если для любой последовательности $(u_n)_n$ в R такой, что $u_n \geq 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$, найдется последовательность $(k_n)_n$ положительных чисел, для которой последовательность $(k_n u_n)_n$ ограничена в R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [24; с. 478–479]. Полное по Дедекинду пространство Рисса называется *регулярным*, если оно обладает свойством σ и если для каждой сходящейся к нулю последовательности $(r_n)_n$ в R существует последовательность $(l_n)_n$ положительных чисел таких, что $\lim_n l_n = +\infty$ и последовательность $(l_n r_n)_n$ сходится относительно порядка к нулю.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2 [29; теорема 1 на с. 350]. В регулярном пространстве Рисса (o) -сходимость эквивалентна (r) -сходимости.

Напомним определение и основные свойства комплексного пространства Рисса (см. [27]).

Для данного пространства Рисса R , мы наделяем декартово произведение $R \times R$ структурой *комплексного пространства Рисса*, полагая

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ (a + ib)(x_1, y_1) &:= (ax_1 - by_1, ay_1 + bx_1)\end{aligned}$$

при каждых $x_j, y_j \in R$, $j = 1, 2$, и $a, b \in \mathbb{R}$. Для удобства мы будем писать $x + iy$ вместо (x, y) . Если $z = x + iy$, то $x = \operatorname{Re} z$. Для так определенной *комплексификации* данного пространства Рисса R будем использовать обозначение $R + iR$ или, короче, $R_{\mathbb{C}}$. Отождествив $x \in R$ с $(x, 0)$, заметим, что R вкладывается в $R_{\mathbb{C}}$ в качестве действительного линейного пространства.

Чтобы развить теорию интегрирования функций со значениями в комплексном пространстве Рисса, необходимо ввести понятие абсолютной величины $|\cdot|$ для элементов пространства $R + iR$ так, чтобы для $z \in R$ значение $|z|$ совпадало с обычным, определяемым равенство $|z| := \sup(z, -z)$. Это обеспечивается определением

$$|z| = \sup\{\operatorname{Re}(ze^{-i\vartheta}) : \vartheta \in [0, 2\pi]\}, \quad (2.1)$$

в предположении, что соответствующий супремум существует в R . Заметим, что в этом случае

$$|z| = \sup\{|\operatorname{Re}(ze^{-i\vartheta})| : \vartheta \in [0, 2\pi]\}$$

(см. [27]). Отметим, что если R – полное по Дедекинду пространство Рисса и $z \in R$, то, поскольку $\operatorname{Re}(ze^{-i\vartheta}) = z \cos \vartheta$, супремум в (2.1) существует и равен классической абсолютной величине (см. [27]).

Известно (см. [27] и [30]), что если пространство Рисса R является архимедовым и равномерно полным, то абсолютная величина, определенная равенством (2.1), удовлетворяет всем классическим свойствам. В самом деле, имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1 [27; теорема 91.2]. *Пусть R является архимедовым и равномерно полным пространством. Тогда супремум в (2.1) существует в R для каждого $z = x + iy$ при $x, y \in R$, и при этом $|x| \leq |z|$, $|y| \leq |z|$, $|z| \leq |x| + |y|$. Кроме того,*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{для любых } z_1, z_2 \in R_{\mathbb{C}},$$

и $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$, $y = 0$, и $|\lambda z| = |\lambda||z|$ для любых $z \in R_{\mathbb{C}}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Заметим, что поскольку, как уже отмечалось, полнота по Дедекинду влечет равномерную полноту и архимедовость, то утверждение теоремы 1 справедливо для любого полного по Дедекинду пространства Рисса.

Таким образом, мы будем предполагать в дальнейшем, что комплексное пространство Рисса $R_{\mathbb{C}}$ порождено полным по Дедекинду пространством Рисса R .

Определим сходимость относительно порядка в комплексном пространстве $R_{\mathbb{C}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Скажем, что сеть $(z_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ в $R_{\mathbb{C}}$, где $(\Lambda, \geq) \neq \emptyset$ – направленное множество, *(о)-сходится к z в $R_{\mathbb{C}}$, и обозначим это $(o) \lim_{\lambda} z_{\lambda} = z$, если $|z_{\lambda} - z|$ (о)-сходится к нулю в R , где $|\cdot|$ обозначает абсолютную величину в $R_{\mathbb{C}}$, определенную равенством (2.1).*

Отметим, что если $z_{\lambda} \in R$, то это определение совпадает с определением 1.

Благодаря теореме 1 основные свойства предела сохраняются в $R_{\mathbb{C}}$, если R полно по Дедекинду.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть R – полное по Дедекинду пространство Рисса. Тогда сеть (z_{λ}) в $R_{\mathbb{C}}$ (о)-сходится к $z \in R_{\mathbb{C}}$ в смысле определения 4 тогда и только тогда, когда сети $(x_{\lambda})_{\lambda}$ и $(y_{\lambda})_{\lambda}$ (о)-сходятся к x и y в смысле определения 1, где $z_{\lambda} = x_{\lambda} + iy_{\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, и $z = x + iy$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 1 справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |x_{\lambda} - x| &\leq |z_{\lambda} - z| \leq |x_{\lambda} - x| + |y_{\lambda} - y|, \\ |y_{\lambda} - y| &\leq |z_{\lambda} - z| \leq |x_{\lambda} - x| + |y_{\lambda} - y|. \end{aligned}$$

Остается применить определения 4 и 1.

Используя этот результат, мы можем вывести многие свойства (о)-сходящихся сетей в $R_{\mathbb{C}}$ из соответствующих свойств сетей в обычном пространстве Рисса. В частности, критерий Коши для (о)-сходимости в пространстве Рисса (см. [29; лемма 2]) обобщается на случай (о)-сходимости в $R_{\mathbb{C}}$.

3. Дифференциальный базис на нульмерной группе и интеграл Хенстока–Курцвейля относительно этого базиса. Пусть G – нульмерная компактная абелева группа. Наиболее известными примерами такой группы являются двоичная группа Кантора и группа целых p -адических чисел (см. [31]). Известно (см. [32]), что топология в такой группе может быть задана цепочкой подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots, \quad (3.1)$$

причем $\{0\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} G_n$. Подгруппы G_n в этой топологии становятся открыто-замкнутыми множествами. Пусть K_n означает произвольный смежный класс по подгруппе G_n , а $K_n(x)$ – тот смежный класс по G_n , который содержит элемент x , так что

$$K_n(x) = x + G_n. \quad (3.2)$$

Для каждого $x \in G$ последовательность $\{K_n(x)\}$ убывает и $\{x\} = \bigcap_n K_n(x)$.

Пусть p_n – порядок фактор-группы G_n/G_{n+1} . Тогда порядок группы G_0/G_1 равен p_0 , порядок группы G_0/G_2 равен $p_0 \cdot p_1$, и далее по индукции получаем, что порядок группы G_0/G_n , $n = 1, 2, \dots$, равен $m_n := p_0 \cdot p_1 \cdots p_{n-1}$, где $p_j \geq 2$ для всех j (условимся, что $m_0 := 1$). Пронумеруем все смежные классы, образующие группу G_0/G_n , обозначив их K_n^j , $j = 1, 2, \dots, m_n$. Тогда

$$G = \bigcup_{j=1}^{m_n} K_n^j. \quad (3.3)$$

Пусть μ обозначает меру Хаара на группе G , нормированную так, что $\mu(G) = 1$. Поскольку μ инвариантна относительно сдвигов, то

$$\mu(G_n) = \mu(K_n) = \frac{1}{m_n} \quad (3.4)$$

для всех $n \geq 0$.

Определим теперь дифференциальный базис $\mathcal{B}$ на G . Для произвольной функции $\nu: G \rightarrow \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, определим *базисное множество*

$$\beta_\nu = \{(I, x) : x \in G, I = K_n(x), n \geq \nu(x)\}.$$

Тогда *базис $\mathcal{B}$ на G* определим как семейство $\{\beta_\nu\}_\nu$, где ν пробегает множество всех функций, определенных на G и принимающих значения в $\mathbb{N}_0$. Используя терминологию теории дифференциальных базисов, смежные классы K_n , $n \in \mathbb{N}$, будем называть *$\mathcal{B}$ -интервалами ранга n* . Обозначим через $\mathcal{I}$ множество всех $\mathcal{B}$ -интервалов. Так определенный базис обладает всеми обычными свойствами абстрактного дифференциального базиса (см. [17]). Прежде всего, он имеет свойства *базы фильтра*:

- $\emptyset \notin \mathcal{B}$;
- для каждой пары базисных множеств $\beta_{\nu_1}, \beta_{\nu_2} \in \mathcal{B}$ существует $\beta_\nu \in \mathcal{B}$ такое, что $\beta_\nu \subset \beta_{\nu_1} \cap \beta_{\nu_2}$ (достаточно взять $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. β_ν -*Разбиением* назовем конечный набор π элементов из β_ν , где для каждой пары элементов (I', x') и (I'', x'') , входящих в π выполнено соотношение $I' \cap I'' = \emptyset$.

Если L является $\mathcal{B}$ -интервалом и $\bigcup_{(I,x) \in \pi} I = L$, то π называется β_ν -*разбиением $\mathcal{B}$ -интервала L* .

Базис $\mathcal{B}$ обладает *свойством разбиения*. Это значит, что выполнены следующие условия:

- для каждого конечного набора $I_0, I_1, \dots, I_n$ $\mathcal{B}$ -интервалов таких, что $I_1, \dots, I_n \subset I_0$ и I_j , $j = 1, 2, \dots$, не пересекаются, разность $I_0 \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j$ может быть представлена в виде конечного объединения попарно непересекающихся $\mathcal{B}$ -интервалов;

- для каждого $\mathcal{B}$ -интервала L и для каждого $\beta_\nu \in \mathcal{B}$ существует β_ν -разбиение интервала L .

Эти свойства базиса $\mathcal{B}$ легко следуют из компактности каждого $\mathcal{B}$ -интервала и из того факта, что любые два $\mathcal{B}$ -интервала I' и I'' либо не пересекаются, либо один из них содержится в другом.

Отметим, что для каждой точки $x \in G$ каждое β_ν -разбиение может содержать не более одной пары (I, x) с данной точкой x .

Определим теперь интеграл типа Хенстока–Курцвейля относительно базиса $\mathcal{B}$ для функций, принимающих значение в комплексном пространстве Рисса $R_\mathbb{C}$, порожденном полным по Дедекинду пространством R .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Скажем, что функция $f: L \rightarrow R_\mathbb{C}$ интегрируема на $\mathcal{B}$ -интервале L в смысле Хенстока–Курцвейля относительно базиса $\mathcal{B}$ (сокращенно, $H_\mathcal{B}$ -интегрируема), если существует $Z \in R_\mathbb{C}$ такое, что

$$\inf_\nu \left(\sup \left\{ \left| \sum_{(I,x) \in \pi} f(x) \mu(I) - Z \right| : \pi - \beta_\nu\text{-разбиение интервала } L \right\} \right) = 0. \quad (3.5)$$

В этом случае будем писать

$$(H_\mathcal{B}) \int_L f = Z.$$

При этом значение интеграла Z , как легко проверить, определяется однозначно.

В частности, это определение применимо к функциям со значениями в обычном пространстве Рисса.

Заметим, что в этом определении фактически речь идет об (o) -сходимости сети, определенной в (3.5) выражением, стоящим в круглых скобках.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Функция $f: L \rightarrow R_\mathbb{C}$ является $H_\mathcal{B}$ -интегрируемой со значением интеграла $Z = X + iY$, $X, Y \in R$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ являются $H_\mathcal{B}$ -интегрируемыми и значения интегралов равны X и Y , соответственно.

Легко проверить, что множество всех $H_\mathcal{B}$ -интегрируемых на L функций образует комплексное линейное пространство.

Мы можем теперь сформулировать критерий Коши для $H_\mathcal{B}$ -интегрируемости функций со значениями в $R_\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 3. Функция $f: L \rightarrow R_\mathbb{C}$ является $H_\mathcal{B}$ -интегрируемой тогда и только тогда, когда

$$\inf_\nu \left(\sup \left\{ \left| \sum_{(I,x) \in \pi_1} f(x) \mu(I) - \sum_{(I,x) \in \pi_2} f(x) \mu(I) \right| : \pi_j - \beta_\nu\text{-разбиения интервала } L \right\} \right) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для R -значных функций критерий Коши может быть доказан так же, как это было сделано в [22] для иного базиса.

В комплексном случае, переходя к супремуму по β_ν -разбиениям π_1 и π_2 в неравенствах

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \sum_{(I,x) \in \pi_1} f(x)\mu(I) - \operatorname{Re} \sum_{(I,x) \in \pi_2} f(x)\mu(I) \right| &\leq \left| \sum_{(I,x) \in \pi_1} f(x)\mu(I) - \sum_{(I,x) \in \pi_2} f(x)\mu(I) \right|, \\ \left| \operatorname{Im} \sum_{(I,x) \in \pi_1} f(x)\mu(I) - \operatorname{Im} \sum_{(I,x) \in \pi_2} f(x)\mu(I) \right| &\leq \left| \sum_{(I,x) \in \pi_1} f(x)\mu(I) - \sum_{(I,x) \in \pi_2} f(x)\mu(I) \right| \end{aligned}$$

и применяя критерий Коши для функций $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$, получаем, что обе эти функции являются $H_{\mathcal{B}}$ -интегрируемыми на L , и тогда, согласно утверждению 3, функция f $H_{\mathcal{B}}$ -интегрируема на L .

Для доказательства в обратную сторону достаточно использовать неравенство

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{(I,x) \in \pi_1} f(x)\mu(I) - \sum_{(I,x) \in \pi_2} f(x)\mu(I) \right| \\ &\leq \left| \operatorname{Re} \sum_{(I,x) \in \pi_1} f(x)\mu(I) - \operatorname{Re} \sum_{(I,x) \in \pi_2} f(x)\mu(I) \right| \\ &\quad + \left| \operatorname{Im} \sum_{(I,x) \in \pi_1} f(x)\mu(I) - \operatorname{Im} \sum_{(I,x) \in \pi_2} f(x)\mu(I) \right|. \end{aligned}$$

Используя критерий Коши, мы по аналогии с [22; предложение 3.5] получим следующее свойство $H_{\mathcal{B}}$ -интеграла.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если f $H_{\mathcal{B}}$ -интегрируема на $\mathcal{B}$ -интервале L , то f $\mathcal{B}$ -интегрируема также на каждом $\mathcal{B}$ -интервале $K \subset L$.

Легко проверить аддитивность $H_{\mathcal{B}}$ -интеграла в следующей форме.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если $\mathcal{B}$ -интервал L представим в виде суммы $L = \bigcup_{j=1}^p K^j$, где K^j – попарно непересекающиеся $\mathcal{B}$ -интервалы, а функция f $H_{\mathcal{B}}$ -интегрируема на каждом K^j , то f $H_{\mathcal{B}}$ -интегрируема на L и

$$(H_{\mathcal{B}}) \int_L f = \sum_{j=1}^p (H_{\mathcal{B}}) \int_{K^j} f.$$

Из двух последних утверждений следует, что для любой $H_{\mathcal{B}}$ -интегрируемой функции $f: G \rightarrow R_{\mathbb{C}}$ неопределенный $H_{\mathcal{B}}$ -интеграл является аддитивной $R_{\mathbb{C}}$ -значной функцией $\mathcal{B}$ -интервала на множестве $\mathcal{I}$, которую обозначим

$$F(I) = (H_{\mathcal{B}}) \int_I f. \quad (3.6)$$

Скажем, что функция $F: \mathcal{I} \rightarrow R_{\mathbb{C}}$ является (o) -непрерывной относительно базиса $\mathcal{B}$ в точке $x \in G$, если

$$(o) \lim_{n \rightarrow \infty} F(K_n(x)) = 0.$$

Порядковая производная или (o) -производная относительно $\mathcal{B}$ аддитивной функции $F: \mathcal{I} \rightarrow R_{\mathbb{C}}$ в точке x определяется как

$$D_{\mathcal{B}}^{(o)} F(x) := (o) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(K_n(x))}{\mu(K_n(x))}. \quad (3.7)$$

4. Проблема восстановления первообразной. Рассмотрим теперь проблему восстановления первообразной по ее производной. Покажем сначала на следующем примере, что первообразная не восстанавливается однозначно по (o) -производной даже в случае обычного пространства Рисса.

ПРИМЕР. Построим нетривиальную функцию, у которой (o) -производная равна нулю в каждой точке группы G .

Пусть $\sigma(\mathcal{I})$ – σ -алгебра, порожденная семейством $\mathcal{I}$, и $L^0(G)$ – пространство Рисса всех измеримых функций. Заметим, что это полное по Дедекинду пространство (см. [24; с. 126]). Функцию $F: \sigma(\mathcal{I}) \rightarrow L^0(G)$ определим равенством $F(I) = \chi_I$. Зафиксируем произвольный элемент $x \in G$. По определению (o) -производной

$$D_{\mathcal{B}}^{(o)} F(x) = (o) \lim_{n \rightarrow \infty} m_n \chi_{K_n(x)}.$$

Покажем, что этот (o) -предел равен нулю. Для этого определим (o) -последовательность

$$\phi_n(s) = \begin{cases} m_j, & \text{если } s \in K_j(x) \setminus K_{j+1}(x), \quad j \geq n, \\ 0, & \text{если } s \in G \setminus K_n(x). \end{cases}$$

По построению $m_n \chi_{K_n(x)}(s) \leq \phi_n(s)$ и $\inf \phi_n = 0$. Следовательно, $D_{\mathcal{B}}^{(o)} F(x) = 0$ для каждого x , в то время как F , очевидно, не тривиальна.

В связи с этим для того, чтобы проблема восстановления первообразной могла быть корректно сформулирована, мы введем производную несколько иного типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Функция $F: \mathcal{I} \rightarrow R_{\mathbb{C}}$ является *глобально дифференцируемой относительно базиса $\mathcal{B}$ на множестве E* или *(g) -дифференцируемой на E* , если существует такая функция $f: E \rightarrow R$, что

$$\lim_{\nu} \left[\sup \left\{ \left| \frac{F(I)}{\mu(I)} - f(x) \right| : (I, x) \in \beta_{\nu}, x \in E \right\} \right] = 0.$$

В этом случае f назовем (g) -производной функции F относительно базиса $\mathcal{B}$ и обозначим $D_{\mathcal{B}}^{(g)} F(x)$.

Мы докажем два варианта теоремы о восстановлении функции $H_{\mathcal{B}}$ -интервала по (g) -производной. В первом случае мы не накладываем никаких ограничений на пространство Рисса, кроме его полноты по Дедекинду, а во втором случае мы накладываем дополнительное предположение регулярности (подобные теоремы для иного базиса рассматривались в [22] и [33]).

ТЕОРЕМА 4. Если функция $F: \mathcal{I} \rightarrow R_{\mathbb{C}}$ (g) -дифференцируема относительно $\mathcal{B}$ на $\mathcal{B}$ -интервале L , то производная $D_{\mathcal{B}}^{(g)} F = f$ $H_{\mathcal{B}}$ -интегрируема на L и

$$(H_{\mathcal{B}}) \int_L D_{\mathcal{B}}^{(g)} F(x) = F(L).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (g) -дифференцируемости F на L в пространстве R существует (o) -сеть (p_{ν}) такая, что

$$\sup \left\{ \left| \frac{F(I)}{|I|} - f(x) \right| : (I, x) \in \beta_{\nu}, x \in L \right\} \leq p_{\nu}, \quad \nu \leq \nu_o. \quad (4.1)$$

Выбрав произвольное β_ν -разбиение $\pi = \{(I_j, x_j) : j = 1, \dots, q\}$ интервала L , получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \sum_{j=1}^q f(x_j) \mu(I_j) - F(L) \right| = \left| \sum_{j=1}^q \left[f(x_j) \mu(I_j) - F(I_j) \right] \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^q \mu(I_j) \left| \frac{F(I_j)}{\mu(I_j)} - f(x_j) \right| \leq p_\nu \left(\sum_{j=1}^q \mu(I_j) \right) = p_\nu \mu(L). \end{aligned}$$

Нам потребуется следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть R – полное по Дедекинду пространство Рисса, удовлетворяющее свойству σ , $L \in \mathcal{I}$, $E \subset L$ – счетное множество и $f: L \rightarrow R_{\mathbb{C}}$ – такая функция, что $f(x) = 0$ для всех $x \in L \setminus E$. Тогда

$$(H_B) \int_L f = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для обычного пространства Рисса R это доказывается как в [22] для иного базиса. Для комплексного пространства Рисса результат получается из утверждения 3 путем перехода к действительной и мнимой частям функции f .

Второй вариант теоремы о восстановлении первообразной мы получим при дополнительном предположении регулярности пространства Рисса R . Доказательство существенно опирается на утверждения 2 и 6 и повторяет с небольшими изменениями доказательство из [22; теорема 4.2].

ТЕОРЕМА 5. Пусть $R_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией регулярного пространства Рисса R , $L \in \mathcal{I}$, $E \subset L$ – счетное множество и функция $F: \mathcal{I} \rightarrow R_{\mathbb{C}}$ (о)-непрерывна относительно B в точках множества E и (g)-дифференцируема на $L \setminus E$. Тогда функция

$$f(x) = \begin{cases} D_B^{(g)} F(x), & \text{если } x \in L \setminus E, \\ 0, & \text{если } x \in E, \end{cases}$$

H_B -интегрируема на L и

$$(H_B) \int_L f = F(L).$$

5. Применение к проблеме восстановления коэффициентов для ряда по системе характеров. Пусть Γ обозначает группу, двойственную группе G , т.е. группу характеров группы G . Известно (см. [32]), что в предположениях относительно группы G группа Γ является дискретной абелевой группой (относительно поточечного перемножения характеров) и может быть представлена в виде объединения возрастающей цепочки конечных групп:

$$\Gamma_0 \subset \Gamma_{-1} \subset \Gamma_{-2} \subset \dots \subset \Gamma_{-n} \subset \dots, \quad (5.1)$$

где $\Gamma_0 = \{\gamma^{(0)}\}$ и $\gamma^{(0)}(x) = 1$ для всех $x \in G$. Тогда

$$\Gamma = \bigcup_{j=-\infty}^0 \Gamma_j, \quad \bigcap_{j=-\infty}^0 \Gamma_j = \{\gamma^{(0)}\}.$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ группа Γ_{-n} является аннулятором подгруппы G_n , т.е.

$$\Gamma_{-n} = G_n^\perp := \{\gamma \in \Gamma : \gamma(x) = 1 \text{ для всех } x \in G_n\}.$$

ЛЕММА 1. Если $\gamma \in \Gamma_{-n}$, то γ принимает постоянные значения на каждом смежном классе K_n по подгруппе G_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксировав элемент $x_n \in K_n$, мы можем представить каждый элемент $x \in K_n$ в виде $x = x_n + y$, где $y \in G_n$. Тогда из свойств характера и из определения анулятора следует, что

$$\gamma(x) = \gamma(x_n)\gamma(y) = \gamma(x_n).$$

Таким образом, значение (x, γ) постоянно для всех $x \in K_n$.

Фактор-группа $\Gamma_{-n-1}/\Gamma_{-n} = G_{n+1}^\perp/G_n^\perp$ изоморфна группе G_n/G_{n+1} (см. [32]) и, тем самым, имеет конечный порядок при каждом $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что группа $\Gamma_{-n}/\Gamma_0 = \Gamma_{-n}$ также конечна при каждом $n > 0$, а группа Γ счетна.

Характеры γ обладают следующим свойством (см. [25]).

ЛЕММА 2. Если $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_{-n}$, то $\int_{K_n} \gamma(x) d\mu = 0$ для каждого смежного класса K_n .

Отметим, что интеграл в предыдущей лемме можно понимать в смысле интеграла Лебега по мере μ .

Из этой леммы следует, что если γ_1 и γ_2 не совпадают тождественно на K_n , то они ортогональны на K_n , т.е.

$$\int_{K_n} \gamma_1(x) \overline{\gamma_2(x)} d\mu = 0.$$

Таким образом, характеры γ образуют счетную ортогональную систему на G относительно нормированной меры μ_G , и мы можем рассматривать ряды вида

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \gamma \quad (5.2)$$

относительно этой системы. Будем предполагать, что $a_\gamma \in R_\mathbb{C}$.

Под сходимостью этого ряда в точке x будем понимать сходимость, в том или ином смысле, его частных сумм вида

$$S_n(x) := \sum_{\gamma \in \Gamma_{-n}} a_\gamma \gamma(x). \quad (5.3)$$

По лемме 1 суммы S_n постоянны на каждом K_n . Эти постоянные значения мы обозначим $S_n(K_n)$. Поскольку константы очевидно H_B -интегрируемы, в силу утверждения 5 функции $a_\gamma \gamma$, а также функции S_n являются H_B -интегрируемыми на G . Ряду (5.2) мы поставим в соответствие функцию $F: \mathcal{I} \rightarrow R_\mathbb{C}$, определенную на каждом K_n равенством

$$F(K_n) := \int_{K_n} S_n(x) d\mu = S_n(K_n) \mu(K_n). \quad (5.4)$$

Проверим, что F является аддитивной функцией на $\mathcal{I}$. В самом деле, пусть $K_n = \bigcup_j K_{n+1}^j$. Из леммы 1 следует, что

$$\int_{K_n} (S_{n+1}(x) - S_n(x)) d\mu = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(K_n) &= \int_{K_n} S_n d\mu = \int_{K_n} (S_n + (S_{n+1} - S_n)) d\mu = \int_{K_n} S_{n+1} d\mu \\ &= \sum_j \int_{K_{n+1}^j} S_{n+1} d\mu = \sum_j F(K_{n+1}^j). \end{aligned}$$

Из определений (5.4) и (3.2) следует, что

$$S_n(x) = \frac{F(K_n(x))}{\mu(K_n(x))}. \quad (5.5)$$

Для частных сумм (5.3) ряда (5.2) рассмотрим как поточечную (o) -сходимость, так и (g) -сходимость на множестве.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Скажем, что последовательность $R_{\mathbb{C}}$ -значных функций $\{S_n\}$ (g) -сходится к функции S на $E \in G$, если

$$(o) \lim_{\nu} (\sup\{|S_n(x) - S(x)| : x \in E, n \geq \nu(x)\}) = 0,$$

где $\nu \in \mathbb{N}_0^E$.

Следующая лемма немедленно следует из равенства (5.5).

ЛЕММА 3. Частные суммы (5.3) (g) -сходятся к функции f на множестве E тогда и только тогда, когда ассоциированная с рядом функция F , определенная в (5.4), (g) -дифференцируема на E и ее производная равна f .

Следующая лемма дает достаточное условие (o) -непрерывности ассоциированной функции F .

ЛЕММА 4. Предположим, что коэффициенты $a_{\gamma} \in R_{\mathbb{C}}$ ряда (5.2) удовлетворяют условию

$$(o) \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sup |a_{\gamma}| : \gamma \in \Gamma_{-(n+1)} \setminus \Gamma_{-n}\} = 0^1. \quad (5.6)$$

Тогда ассоциированная с рядом функция F (o) -непрерывна в каждой точке $x \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что порядок группы G_0/G_n , $n = 1, 2, \dots$, равен $m_n := p_0 \cdot p_1 \cdots p_{n-1}$. Ввиду изоморфизма между G_0/G_n и Γ_{-n}/Γ_0 порядок подгруппы Γ_{-n} также равен m_n . Для фиксированной точки $x \in G_0$, имея в виду (3.4) и равенство $|\gamma(x)| = 1$, получаем

$$|S_n(x)|\mu(K_n(x)) \leq \frac{1}{m_n} \sum_{\gamma \in \Gamma_{-n}} |a_{\gamma}|.$$

Справа в предыдущем неравенстве стоит среднее арифметическое коэффициентов $\{|a_{\gamma}| : \gamma \in \Gamma_{-n}\}$. В силу леммы [22; лемма 5.1], если последовательность (o) -сходится к нулю в R , то и последовательность ее средних арифметических также (o) -сходится к нулю. Отсюда с учетом (5.4) вытекает (o) -непрерывность ассоциированной функции F .

¹Фактически это условие означает, что последовательность $\{|a_{\gamma}|\}$ (o) -сходится в R к нулю при любом упорядочении γ внутри $\Gamma_{-(n+1)} \setminus \Gamma_{-n}$

Теперь мы можем доказать две теоремы о восстановлении коэффициентов ряда (5.2) по его сумме, которые соответствуют двум установленным выше вариантам теоремы о восстановлении первообразной.

ТЕОРЕМА 6. *Если R – полное по Дедекинду пространство Рисса и ряд (5.2) с коэффициентами $a_\gamma \in R_\mathbb{C}$ (g)-сходится к функции f на группе G , то f H_B -интегрируема на G и ряд является рядом Фурье функции f в смысле H_B -интеграла.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 ассоциированная с рядом функция F является (g)-дифференцируемой на G и ее (g)-производная равна f . Значит, мы можем применить к функциям F и f теорему 4 и получить, что

$$(H_B) \int_I f = F(I) \quad (5.7)$$

для любого B -интервала I . Для произвольного характера $\gamma \in \Gamma$ выберем n так, чтобы $\gamma \in \Gamma_{-n}$. Тогда по лемме 1 как S_n , так и γ , постоянны на каждом смежном классе K_n^j (см. (3.3)). Пусть γ^j обозначает постоянное значение, принимаемое γ на K_n^j . Функция $S_n \gamma$ является H_B -интегрируемой на G (см. замечание, предшествующее определению ассоциированной функции (5.4)). В силу ортогональности системы характеров и с учетом (5.7) получаем (все интегралы ниже понимаются в смысле H_B -интеграла):

$$a_\gamma = \int_G S_n \gamma = \sum_{j=1}^{m_n} \int_{K_n^j} S_n \gamma = \sum_{j=1}^{m_n} \gamma^j \int_{K_n^j} S_n = \sum_{j=1}^{m_n} \gamma^j F(K_n^j) = \sum_{j=1}^{m_n} \gamma^j \int_{K_n^j} f = \int_G f \gamma.$$

Тем самым теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Если R – регулярное пространство Рисса и ряд (5.2) с коэффициентами $a_\gamma \in R_\mathbb{C}$, удовлетворяющими условию (5.6), (g)-сходится к функции f на множестве $G \setminus E$, где E – счетное подмножество группы G , то f H_B -интегрируема на G и ряд является рядом Фурье функции f в смысле H_B -интеграла.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 ассоциированная функция F (g)-дифференцируема на $G \setminus E$ и ее (g)-производная равна f . В силу условия (5.6) и леммы 4 ассоциированная функция F (o)-непрерывна всюду на G и, в частности, на E . Таким образом, мы можем применить теорему 5 и получить (5.7). Остальная часть доказательства такая же, как и в предыдущей теореме.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае локально компактной нульмерной группы G группа характеров Γ также локально компактна, и вместо (g)-сходимости частных сумм ряда (5.3) мы имеем дело с (g)-сходимостью интегралов

$$(H_{B_\Gamma}) \int_{\Gamma_{-n}} a(\gamma)(x, \gamma) d\mu_\Gamma,$$

где мера и интегрирование рассматриваются на группе Γ и $(x, \gamma) = \gamma(x)$ рассматривается как значение характера x в точке $\gamma \in \Gamma$. Проблема восстановления коэффициентов в этом случае превращается в проблему восстановления функции $a(\gamma)$, и ее решением становится получение формулы обращения:

$$a(\gamma) = (o) \lim_{n \rightarrow \infty} (H_{B_G}) \int_{G_{-n}} f(x) \overline{\gamma(x)} d\mu_G \quad \text{п.в. на } \Gamma. \quad (5.8)$$

Эта проблема в общем случае остается открытой, и мы можем тут анонсировать только частичный результат, утверждающий, что формула (5.8) справедлива при дополнительном априорном предположении (o) -дифференцируемости почти всюду неопределенного интеграла от функции $a(\gamma)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Denjoy, *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonometrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1941.
- [2] D. Preiss, B. S. Thomson, "The approximate symmetric integral", *Canad. J. Math.*, **41**:3 (1989), 508–555.
- [3] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Мир, М., 1965.
- [4] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, М., 1961.
- [5] B. S. Thomson, *Symmetric Properties of Real Functions*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **183**, Marcel Dekker, New York, 1994.
- [6] В. А. Скворцов, "Вычисление коэффициентов всюду сходящегося ряда Хаара", *Матем. сб.*, **75**:3 (1968), 349–360.
- [7] В. А. Скворцов, "Конструктивный вариант определения HD-интеграла", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1982, № 6, 41–45.
- [8] J.-P. Kahane, "Une théorie de Denjoy des martingales dyadiques", *Enseign. Math.* (2), **34**:3-4 (1988), 255–268.
- [9] В. А. Скворцов, Ф. Тулоне, "Обобщенные интегралы Хенстока в теории рядов по мультипликативным системам", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2004, № 2, 7–11.
- [10] Б. И. Голубов, А. В. Ефимов, В. А. Скворцов, *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения*, Наука, М., 1987.
- [11] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger Publ., Bristol and New York, 1990.
- [12] В. А. Скворцов, Ф. Тулоне, " $\mathcal{P}$ -ичный интеграл Хенстока в теории рядов по системам характеров нуль-мерных групп", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2006, № 1, 25–29.
- [13] W. R. Wade, "Recent developments in the theory of Haar series", *Colloq. Math.*, **52**:2 (1987), 213–238.
- [14] W. R. Wade, "Dyadic harmonic analysis", *Harmonic Analysis and Nonlinear Differential Equations*, Contemp. Math., **208**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 313–350.
- [15] R. Henstock, *The General Theory of Integration*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [16] P. J. Lee, R. Vıborný, *The Integral: An Easy Approach After Kurzweil and Henstock*, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., **14**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [17] K. M. Ostaszewski, *Henstock Integration in the Plane*, Mem. Amer. Math. Soc., **63**, № 353, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [18] Т. П. Лукашенко, В. А. Скворцов, А. П. Солодов, *Обобщенные интегралы*, URSS, М., 2010.
- [19] S. Schwabik, G. Ye, *Topics in Banach Space Integration*, Ser. Real Anal., **10**, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2005.
- [20] A. Boccuto, B. Riečan, M. Vrabelová, *Kurzweil–Henstock Integral in Riesz Spaces*, Bentham Sci. Publ., Singapore, 2009.
- [21] A. Boccuto, V. A. Skvortsov, "The Perron Integral of order k in Riesz Spaces", *Positivity*, **14**:4 (2010), 595–612.
- [22] A. Boccuto, V. A. Skvortsov, "Henstock–Kurzweil type integration of Riesz-space-valued functions and applications to Walsh series", *Real Anal. Exchange*, **29**:1 (2003), 419–437.
- [23] Z. Ercan, A. W. Wickstead, "Banach lattices of continuous Banach lattice-valued functions", *J. Math. Anal. Appl.*, **198**:1 (1996), 121–136.

- [24] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen, *Riesz Spaces*, Vol. I, North-Holland Math. Library, North-Holland Publ., Amsterdam, 1971.
- [25] V. A. Skvortsov, F. Tulone, “Kurzweil–Henstock type integral on zero-dimensional group and some of its applications”, *Czech. Math. J.*, **58**:4 (2008), 1167–1183.
- [26] Б. З. Вулих, *Введение в теорию полупорядоченных пространств*, ГИФМЛ, М., 1961.
- [27] A. C. Zaanen, *Riesz Spaces*, Vol. II, North-Holland Math. Library, **30**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1983.
- [28] C. D. Aliprantis, K. C. Border, *Infinite-Dimensional Analysis. A Hitchhiker’s Guide*, Stud. Econom. Theory, **4**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [29] P. McGill, “Integration in vector lattices”, *J. London Math. Soc.* (2), **11**:3 (1975), 347–360.
- [30] P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [31] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994.
- [32] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн, *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах*, Элм, Баку, 1981.
- [33] A. Boccuto, “Differential and integral calculus in Riesz spaces”, *Tatra Mt. Math. Publ.*, **14** (1998), 293–323.

А. Боккуто

Università degli Studi di Perugia, Италия

E-mail: antonio.boccuto@unipg.it

Поступило

20.03.2014

Исправленный вариант

17.01.2015

В. А. Скворцов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: vaskvor2000@yahoo.com

Ф. Тулоне

Università degli Studi di Palermo, Италия

E-mail: tulone@math.unipa.it