Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Юшков, М. О. Корпусов, Глобальная неразрешимость одномерных задач для уравнений типа Бюргерса, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 3, 448–462

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:29:47

Глобальная неразрешимость одномерных задач для уравнений типа Бюргерса

Е. В. Юшков, М. О. Корпусов

В работе исследуется вопрос глобальной разрешимости широко известных уравнений, используемых для описания нелинейных процессов с диссипацией, – уравнения Бюргерса, Кортвега–де Фриза–Бюргерса, модифицированного уравнения КдФ–Бюргерса. Методом С. И. Похожаева получены необходимые условия отсутствия глобальных решений и оценки на время и скорость разрушения в ограниченных и неограниченных областях. Изучено влияние линейной и нелинейной вязкости на появление градиентной катастрофы за конечное время.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10464

*Работа посвящена светлой памяти
замечательного человека и великого ученого
Станислава Ивановича Похожаева.*

1. Введение. В 1915 г. Бейтменом было получено уравнение в частных производных, отражающее как эффекты нелинейного распространения волн, так и эффекты диффузии:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}. \quad (1)$$

В литературе уравнение (1) получило название уравнения Бюргерса и стало одним из эталонных уравнений теории нелинейных волн. Строгий вывод (1) из системы уравнений газовой динамики с учетом вязкости и теплопроводности, поведение автомодельных решений, асимптотика при $\nu \rightarrow 0$, вопросы единственности и разрешимости подробно рассмотрены в классических учебных пособиях [1]–[3]. При этом наиболее важным является тот факт, что в 1950 г. независимо Коулу и Хопфу удалось нелинейной заменой

$$u(x, t) = -2\nu(\ln \phi(x, t))_x$$

свести уравнение Бюргерса к линейному уравнению теплопроводности и получить точное гладкое решение соответствующей задачи Коши.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-12460-офи-м).

Настоящая работа посвящена сингулярным решениям уравнений типа Бюргерса, не существующим глобально во времени. Используя метод пробных функций, предложенный и развитый Похожаевым и Митидиери [5], [4], мы покажем, что линейному диссипативному слагаемому не всегда удастся обеспечить ограниченность решения $u(x, t)$ и его производной $u_x(x, t)$. Другими словами, нелинейность приводит к тому, что при некоторых начальных и граничных условиях существует такое конечное время T такое, что функционал вида

$$J(t) = \int u(x, t) \varphi(x) dx \rightarrow \infty \quad \text{при } t \rightarrow T$$

для некоторой гладкой пробной функции $\varphi(x)$.

Для исключения недоразумений следует сразу заметить, что для уравнения Бюргерса справедлив принцип максимума. Поэтому решение начально краевой задачи для уравнения (1) с граничными условиями первого рода на обоих концах отрезка ограничено для всех моментов времени. Однако, принцип максимума не делает невозможным появление градиентной катастрофы или возникновение разрушения для неклассических граничных условий, равно как и глобальную неразрешимость начально-краевых задач для уравнений Кортвега–де Фриза–Бюргерса:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx}, \quad (2)$$

описывающего бесстолкновительные волны в плазме, и модифицированного уравнения КдФ–Бюргерса:

$$u_t - u^2 u_x + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx}, \quad (3)$$

являющегося основным для сред с кубической нелинейностью, описывающего магнитозвуковые и альфвеновские волны [6].

Данная работа является продолжением серии работ по глобальной неразрешимости одномерных задач гидродинамического типа, начавшейся с результата Похожаева для уравнения Кортвега–де Фриза [7], [8]:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (4)$$

Используемый при исследовании метод пробных функций оказался удобным как для исследования уравнений, так и для систем уравнений типа мелкой воды [9]. При этом главным его достоинством является возможность доказательства разрушения для начально-краевых задач с классическими и неклассическими граничными условиями, которые могут задаваться как на одном конце, так и на обоих. А главной трудностью – наилучший выбор пробной функции и доказательство локальной во времени разрешимости. К сожалению, на последние вопросы пока не получены исчерпывающие ответы, но даже несмотря на это метод пробной функции является удобным практическим подходом для оценки времени разрешимости задач, изучаемых в современной математической физике.

2. Разрушение решения уравнения Бюргерса. Разберем общую схему метода пробной функции на примере начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad (5)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \nu > 0. \quad (6)$$

Граничные условия задачи (5), (6) будут определены позднее. Предположим, что можно найти такое $T > 0$, для которого классическое решение рассматриваемой задачи существует и принадлежит классу

$$u(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(2)}([0, L])).$$

Методом пробных функций выведем достаточные условия разрушения, для чего умножим (5) на функцию $\varphi(x) \in C^{(2)}([0, L])$ и проинтегрируем по частям:

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^L u^2 \varphi_x dx + \nu \int_0^L u \varphi_{xx} dx + G(u, \varphi)|_{x=L} - G(u, \varphi)|_{x=0}, \quad (7)$$

где

$$G(u, \varphi) = -\frac{u^2}{2} \varphi + \nu u_x \varphi - \nu u \varphi_x.$$

Пусть функция $\varphi(x)$ является монотонно неубывающей: $\varphi_x \geq 0$. Тогда имеет место следующее равенство:

$$\int_0^L (u^2 \varphi_x + 2\nu u \varphi_{xx}) dx = \int_0^L w^2 \varphi_x dx - \nu^2 \int_0^L \frac{\varphi_{xx}^2}{\varphi_x} dx, \quad (8)$$

где

$$w = u + \nu \frac{\varphi_{xx}}{\varphi_x}.$$

При этом в силу неравенства Коши–Буняковского второе слагаемое в правой части можно оценить снизу:

$$\left| \int_0^L w(x, t) \varphi(x) dx \right|^2 \leq \int_0^L w^2(x, t) \varphi_x(x) dx \int_0^L \frac{\varphi^2(x)}{\varphi_x(x)} dx. \quad (9)$$

Естественно, что функция $\varphi(x)$ выбирается так, чтобы все получаемые интегралы сходились. Теперь выражение (7) можно переписать в виде

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{1}{2} \left| \int_0^L \frac{\varphi^2(x)}{\varphi_x(x)} dx \right|^{-1} J^2 + G(u, \varphi)|_0^L - \frac{\nu^2}{2} \int_0^L \frac{\varphi_{xx}^2(x)}{\varphi_x(x)} dx, \quad (10)$$

где

$$J = \int_0^L w(x, t) \varphi(x) dx.$$

Предположим, что существует такая пробная функция $\varphi(x)$, для которой $G(u, \varphi)|_0^L$ не зависит от времени. Если такой функции найти нельзя, то $G(u, \varphi)|_0^L$ следует рассматривать отдельно, например, предполагая ограниченность сверху постоянной, не зависящей от t . Для удобства введем обозначения

$$k^2 = \frac{1}{2} \left| \int_0^L \frac{\varphi^2(x)}{\varphi_x(x)} dx \right|^{-1} < \infty, \quad a^2 = \frac{\nu^2}{2} \int_0^L \frac{\varphi_{xx}^2(x)}{\varphi_x(x)} dx - G(u, \varphi)|_0^L < \infty,$$

и перепишем неравенство (10) в виде

$$\frac{dJ}{dt} \geq k^2 J^2 - a^2. \quad (11)$$

Применив теорию обыкновенных дифференциальных неравенств, получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть начальная функция $u_0(x) \in L^{(1)}([0, L])$ и граничные условия задачи (5), (6) таковы, что существует неубывающая пробная функция $\varphi(x) \in C^{(2)}([0, L])$, для которой выполнено неравенство

$$J_0 = J(0) = \int_0^L \left(u_0(x) + \nu \frac{\varphi_{xx}(x)}{\varphi_x(x)} \right) \varphi(x) dx > \frac{a}{k}. \quad (12)$$

Тогда не существует глобального во времени классического решения, причем имеет место следующая оценка:

$$J(t) \geq \frac{a}{k} \frac{1 + c_0 \exp(2akt)}{1 - c_0 \exp(2akt)}, \quad c_0 = \frac{kJ_0 - a}{kJ_0 + a},$$

а значит,

$$\lim_{t \rightarrow T} J(t) = +\infty, \quad T \leq -\frac{1}{2ak} \ln \left(\frac{kJ_0 - a}{kJ_0 + a} \right).$$

ПРИМЕР 1. Отметим, что метод пробной функции обладает большим практическим удобством, особенно, когда переопределены условия на одном из концов. Например, если в задаче (5), (6) на отрезке $[0, 1]$ известны условия на функцию $u(x, t)$ и ее производную на правой границе

$$u|_{x=1} = u_x|_{x=1} = 0.$$

Тогда выбрав пробную функцию вида $\varphi(x) = x^3$, получаем

$$k^2 = \frac{15}{2}, \quad a^2 = 6\nu^2,$$

и из теоремы 1 сразу следует результат о глобальной во времени неразрешимости при дополнительных условиях на начальную функцию

$$\int_0^1 x^3 u_0(x) dx > \nu \frac{2(3 - \sqrt{5})}{3\sqrt{5}}. \quad (13)$$

Таким образом, если граничные условия не являются условиями первого рода на обоих концах отрезка, то принцип максимума не мешает получить результат о разрушении. Однако, при этом можно столкнуться с проблемой, что задача с граничными условиями только на одной границе может быть некорректной. Следовательно, для соблюдения математической строгости в каждом конкретном случае необходимо решать вопрос о локальной разрешимости, что часто можно сделать с помощью метода сжимающих отображений [10].

ПРИМЕР 2 (ГРАДИЕНТНАЯ КАТАСТРОФА). Теперь предположим, что граничные условия заданы так, что принцип максимума обеспечивает глобальную во времени ограниченность решения. Получим результат о “мягком разрушении” для начально-краевой задачи (5), (6) в области Ω при классических граничных условиях. Пусть существует гладкое ограниченное решение $u(x, t) \leq \max_x \{u_0(x)\}$. Продифференцировав уравнение (5) по x , получим

$$(u_x)_t + u_x^2 + uu_{xx} = \nu u_{xxx}. \quad (14)$$

Подставляя выражение для u_{xx} из (5), перепишем (14) в виде

$$(u_x)_t + u_x^2 + \frac{1}{\nu} u u_t + \frac{1}{\nu} u^2 u_x = \nu u_{xxx}. \quad (15)$$

Умножим уравнение на пробную функцию $\varphi(x)$ и проинтегрируем по частям по области Ω :

$$-\frac{d}{dt} \int \varphi \left(u_x + \frac{u^2}{2\nu} \right) dx = \int \varphi \left(u_x^2 + \frac{1}{\nu} u^2 u_x \right) dx + \nu \int \varphi_{xxx} u dx + Gr|_{\partial\Omega}, \quad (16)$$

где

$$Gr = \nu(-u_{xx}\varphi + u_x\varphi_x - u\varphi_{xx}).$$

Введем обозначение

$$w = -u_x - \frac{u^2}{2\nu}.$$

Пользуясь принципом максимума ($|u(x, t)| \leq M$) и для простоты полагая, что граничные условия не зависят от времени, придем к неравенству

$$\frac{d}{dt} \int \varphi w dx \geq \int \varphi w^2 dx - M^4 \int \frac{\varphi}{4\nu^2} dx - M\nu \int |\varphi_{xxx}| dx + Gr|_{\partial\Omega}. \quad (17)$$

Потребуем, чтобы пробная функция была неотрицательна и воспользуемся неравенством Коши–Буняковского:

$$\left(\int \varphi w dx \right)^2 \leq \int \varphi w^2 dx \int \varphi dx. \quad (18)$$

По аналогии с (9) получим неравенство

$$\frac{d}{dt} \int \varphi w dx \geq \left(\int \varphi dx \right)^{-1} \left[\int \varphi w dx \right]^2 - M^4 \int \frac{\varphi}{4\nu^2} dx - M\nu \int |\varphi_{xxx}| dx + Gr|_{\partial\Omega}. \quad (19)$$

Введем замену

$$J(t) = \int \varphi \left(-u_x - \frac{u^2}{2\nu} \right) dx, \\ k^2 = \left(\int \varphi dx \right)^{-1}, \quad a^2 = M^4 \int \frac{\varphi}{4\nu^2} dx + M\nu \int |\varphi_{xxx}| dx + Gr|_{\partial\Omega},$$

и перепишем неравенство (19) в виде обыкновенного дифференциального неравенства (11), для которого сразу можно записать результат о разрушении по примеру теоремы 1, в которой условие (12) следует заменить условием

$$J_0 = J(0) = \int \left(-u_x(0) - \frac{u^2(0)}{2\nu} \right) \varphi(x) dx > \frac{a}{k}. \quad (20)$$

Заметим, что так как от $\varphi(x)$ требуется не условие монотонности, а лишь положительности, то результат может быть сформулирован, как для начально-краевой, так и для задачи Коши.

Еще два интересных момента: во-первых, очевидно, что выбрав одиночный начальный профиль с длинным передним фронтом и уменьшая амплитуду, всегда можно сделать так, что условие (20) будет выполнено и будет иметь место опрокидывание. То есть если возмущению предоставить достаточный разгон, волна опрокинется даже при наличии диссипации. Во-вторых, уменьшая или увеличивая ν при фиксированном начальном профиле и выбранной пробной функции всегда можно добиться того, что условие (20), наоборот, не будет выполняться, а следовательно не будет справедлив результат о разрушении.

3. Разрушение решения уравнения КдФ–Бюргерса. Из рассмотренной задачи становится ясно, что важной чертой метода пробных функций является универсальность в применении к уравнениям, отличающимся слагаемыми вида $u_{x\dots xx}$. Так как основная идея заключается в интегрировании по частям, то порядок производной будет определять лишь граничные условия, а не вид конечного неравенства.

Как пример, рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения КдФ–Бюргерса, описывающую процессы в среде и с дисперсией, и с диссипацией. Покажем, что даже наличие двух факторов, сдерживающих обрушение, не приводит к глобальной во времени разрешимости задачи для любых начальных данных,

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad (21)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \nu > 0, \quad \beta > 0. \quad (22)$$

Процессы, описываемые такой моделью, наблюдаются, например, в плазме, где носят название бесстолкновительных, в знак того, что диссипация обусловлена не столкновением частиц, а другими механизмами. К ним относятся, в частности, ионно-звуковые и магнитозвуковые волны, впервые исследованные Р.З. Сагдеевым в 1960-х годах [6].

Предположим, что найдется такое $T > 0$, для которого классическое решение рассматриваемой задачи существует в классе

$$u(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(3)}([0, L])).$$

Умножим уравнение (21) на пробную функцию $\varphi(x) \in C^{(3)}([0, L])$ и, проинтегрировав по частям, получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^L u(x, t) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L u^2 \varphi_x dx + \int_0^L u(\nu \varphi_{xx} + \beta \varphi_{xxx}) dx + G(u, \varphi)|_{x=L} - G(u, \varphi)|_{x=0}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$G(u, \varphi) = -\left(\frac{u^2}{2} + \beta u_{xx}\right)\varphi + (\nu\varphi + \beta\varphi_x)u_x - (\nu\varphi_x + \beta\varphi_{xx})u.$$

Выберем неубывающую пробную функцию: $\varphi_x(x) \geq 0$; тогда, собирая полный квадрат, придем к уравнению

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^L w^2 \varphi_x dx - \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(\nu\varphi_{xx} + \beta\varphi_{xxx})^2}{\varphi_x} dx + G(u, \varphi)|_0^L, \quad (24)$$

где

$$J(t) = \int_0^L w(x, t) \varphi(x) dx, \quad w = u + \frac{\nu \varphi_{xx} + \beta \varphi_{xxx}}{\varphi_x}.$$

Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского для получения оценки (9); тогда (24) можно привести к неравенству

$$\frac{dJ}{dt} \geq k^2 J(t) - a^2, \quad (25)$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \left| \int_0^L \frac{\varphi^2(x)}{\varphi_x(x)} dx \right|^{-1}, \quad a^2 = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(\nu \varphi_{xx} + \beta \varphi_{xxx})^2}{\varphi_x} dx + G(u, \varphi)|_0^L;$$

здесь мы опять предположили, что функция $G(u, \varphi)|_0^L$ не зависит от времени или что эта функция ограничена сверху независимой от времени постоянной. Таким образом, доказано утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть начальная функция $u_0(x) \in L^{(1)}([0, L])$ и граничные условия задачи (21), (22) таковы, что существует неубывающая пробная функция $\varphi(x) \in C^{(3)}([0, L])$, для которой выполнено неравенство

$$J_0 = J(0) = \int_0^L \left(\varphi u_0(x) + \frac{\varphi}{\varphi_x} (\nu \varphi_{xx} + \beta \varphi_{xxx}) \right) dx > \frac{a}{k}; \quad (26)$$

тогда справедлив результат теоремы 1.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим задачу (21), (22) на отрезке $[0, 1]$ с граничными условиями только на правой границе:

$$u|_{x=1} = u_x|_{x=1} = u_{xx}|_{x=1} = 0. \quad (27)$$

Тогда можно выбрать пробную функцию степенного вида $\varphi(x) = x^5$, для которой будут иметь место равенства

$$k^2 = \frac{35}{2}, \quad a^2 = \frac{40}{3}(\nu^2 + 9\beta\nu + 27\beta^2),$$

а, следовательно, если начальное условие будет удовлетворять неравенству

$$\int_0^1 x^5 u_0(x) dx > 4\sqrt{\frac{\nu^2}{21} + \frac{3\beta\nu}{7} + \frac{9\beta^2}{7}} - 3\beta - \frac{4\nu}{5}, \quad (28)$$

то окажется справедлив результат о глобальной неразрешимости для функции

$$J(t) = \int_0^1 (x^5 u_0(x) + 4\nu x^4 + 12\beta x^3) dx.$$

ПРИМЕР 4. В следующем примере можно воспользоваться отсутствием принципа максимума для уравнения КдФ–Бюргерса. Это позволяет предположить, что разрушение решения задачи (21), (22) может иметь место и для граничных условий первого рода, заданных на обоих сторонах отрезка.

Действительно, рассмотрим задачу (21), (22) на отрезке $[0, 1]$ с граничными условиями

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = u_{xx}|_{x=0} = 0. \quad (29)$$

Для удобства предположим, что $\alpha = \nu/\beta \geq 5$ и выберем пробную функцию: $\varphi(x) = -(1-x)^\alpha$. Тогда граничные условия дают

$$G(u, \varphi)|_0^1 = [\beta u_{xx}\varphi - (\nu\varphi + \beta\varphi_x)u_x]_{x=0} = 0, \quad (30)$$

и достаточные условия разрушения для функционала

$$J(t) = \nu \frac{\alpha-1}{\alpha} - \beta(\alpha-2) - \int_0^1 (1-x)^\alpha u(x, t) dx, \\ k^2 = \frac{\alpha(\alpha+2)}{2}, \quad a^2 = \frac{\alpha(\alpha-1)^2}{2} \left(\frac{\nu^2}{\alpha-2} - \frac{2\beta\nu(\alpha-2)}{\alpha-3} + \frac{\beta^2(\alpha-2)^2}{\alpha-4} \right)$$

непосредственно следуют из теоремы 2.

Наконец, если предположить, что решение $u(x, t)$ ограничено, то так же, как это сделано выше можно получить достаточные условия градиентной катастрофы. Заметим, что в приведенных примерах была выбрана пробная функция степенного вида $\varphi = x^\lambda(x-L)^\mu$. Это традиционный выбор функции $\varphi(x)$, используемый для исключения левых или правых граничных условий. Однако, для получения оптимальной оценки времени разрушения необходимо нахождение наилучшей пробной функции, т.е. решение соответствующей вариационной задачи в каждом конкретном случае.

4. Разрушение в модифицированном КдФ–Бюргерсе. Успешное применение метода пробных функций к исследованию глобальной разрешимости задач для уравнений КдФ, Захарова–Кузнецова, Кадомцева–Петвиашвили, Хохлова–Заболоцкой, Островского, Бюргерса, Кдф–Бюргерса и многих других, содержащих градиентную нелинейность uu_x демонстрирует широкие возможности метода [11]. Однако идея подхода применима и к задачам с нелинейностями другого типа.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим начально-краевую задачу для широкоизвестного модифицированного уравнения КдФ с диссипацией:

$$u_t - u^2 u_x + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad (31)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=0} = u|_{x=L} = 0, \quad \nu > 0, \quad \beta > 0. \quad (32)$$

Уравнение (31) используется, в частности, для моделирования волн в нелинейных линиях передач [1]. Нулевые граничные условия выбраны для сокращения выкладок, но по аналогии с предыдущими задачами можно доказать глобальную во времени неразрешимость и для условий общего вида.

После умножения уравнения (31) на пробную функцию $\varphi(x, t) = u(x, t)\phi(x)$ и интегрирования по частям, можно получить следующее выражение:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 \phi dx \\ = -\frac{1}{4} \int_0^L u^4 \phi_x dx + \frac{1}{2} \int_0^L u^2 (\nu \phi_{xx} + \beta \phi_{xxx}) dx - \int_0^L u_x^2 \left(\frac{3\beta}{2} \phi_x + \nu \phi \right) dx \\ + \left[\frac{1}{4} \phi u^4 + (\nu \phi + \beta \phi_x) uu_x - \frac{1}{2} (\nu \phi_x + \beta \phi_{xx}) u^2 + \frac{\beta}{2} u_x^2 \phi - \beta uu_{xx} \phi \right]_0^L. \quad (33)$$

Чтобы получить оценку для левой части снизу, необходимо выбрать пробную функцию такую, чтобы третье слагаемое в правой части было ограничено. В общем случае следовало бы потребовать выполнения условия

$$\left(\frac{3\beta}{2}\phi_x + \nu\phi\right) \leq 0.$$

Рассмотрим частный случай, выбрав пробную функцию в виде $\phi(x) = \exp(-2\nu x/3\beta)$; тогда при граничных условиях (32) выражение (33) можно переписать в виде

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{\nu}{3\beta} \int_0^L u^4 \exp\left(-\frac{2\nu}{3\beta}x\right) dx + \frac{4\nu^3}{27\beta^2} \int_0^L u^2 \exp\left(-\frac{2\nu}{3\beta}x\right) dx, \quad (34)$$

где

$$J(t) = \int_0^L u^2 \exp\left(-\frac{2\nu}{3\beta}x\right) dx.$$

Воспользуемся грубой оценкой для получения результата о разрушении: избавимся от второго неотрицательного слагаемого в правой части (34), а первое слагаемое ограничим неравенством Коши–Буняковского

$$\left(\int_0^L u^2 \exp\left(-\frac{2\nu x}{3\beta}\right) dx\right)^2 \leq \frac{3\beta}{2\nu} \int_0^L u^4 \exp\left(-\frac{2\nu x}{3\beta}\right) dx. \quad (35)$$

Тогда (34) можно записать в виде обыкновенного дифференциального неравенства

$$\frac{dJ}{dt} \geq kJ^2, \quad k = \frac{2\nu^2}{9\beta^2},$$

решая которое, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. *Классическое нетривиальное решение задачи (31), (32) из класса $u(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C^{(3)}([0, L]))$ не может существовать на временном интервале большем, чем $[0, T]$, и должно удовлетворять оценке*

$$J(t) \geq \frac{J(0)}{1 - kJ(0)t}, \quad T \leq \frac{1}{kJ(0)}. \quad (36)$$

Действуя по предложенной схеме, можно применять метод пробных функций и к задачам с нелинейностями типа $|u|^n u_x$ и дополнительными слагаемыми вида $u_{x\dots xx}$, возникающим в физике солитонов [13], [12]. Таким образом, линейная диссипация не является принципиальным фактором, обеспечивающим глобальную во времени разрешимость задач с градиентной нелинейностью.

5. Разрушение в неограниченных областях. За исключением “мягкого разрушения” для задачи Бюргерса мы рассматривали задачи на отрезке. Однако метод пробных функций работает и в неограниченных областях.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим задачу для уравнения КдФ–Бюргерса на полупрямой:

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx}, \quad x \in [0, +\infty), \quad (37)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \quad (38)$$

Предположим, что существует классическое решение задачи из класса

$$C^{(1)}([0, T]; C^{(3)}([0, +\infty))).$$

В качестве пробной функции возьмем $\varphi(x) = -\exp(-x)$ выберем специальные граничные условия для сокращения выкладок:

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=0} = 1, \quad u_{xx}|_{x=0} = \frac{\nu - \beta}{\beta}.$$

Умножим уравнение (37) на $\varphi(x)$ и проинтегрируем по частям:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} u(x, t)(-e^{-x}) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-x} dx + (\beta - \nu) \int_0^{+\infty} u e^{-x} dx. \quad (39)$$

Введем обозначение

$$J(t) = \int_0^{+\infty} w(x, t)e^{-x} dx, \quad w = -(u + \beta - \nu),$$

и перепишем равенство (39) в виде

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} w^2 e^{-x} dx - \frac{(\nu - \beta)^2}{2}. \quad (40)$$

Воспользовавшись неравенством Коши–Буняковского

$$\left(\int_0^{+\infty} w(x, t)e^{-x} dx \right)^2 \leq \int_0^{+\infty} w^2 e^{-x} dx \int_0^{+\infty} e^{-x} dx,$$

запишем (40) как обыкновенное дифференциальное неравенство:

$$\frac{dJ}{dt} \geq k^2 J^2 - a^2, \quad k^2 = \frac{1}{2}, \quad a^2 = \frac{(\nu - \beta)^2}{2}. \quad (41)$$

Тогда можно сформулировать результат о разрушении.

ТЕОРЕМА 4. Пусть начальная функция $u_0(x) \in L^{(1)}([0, L])$ задачи (37), (38) удовлетворяет неравенству

$$\int_0^{+\infty} u_0(x)e^{-x} dx < \nu - \beta - |\nu - \beta|; \quad (42)$$

тогда справедлив результат теоремы 1.

Заметим, что часто правильным выбором пробной функции можно уменьшить число граничных условий, достаточных для глобальной неразрешимости. Например, для задачи (37), (38) результат о разрушении можно получить и для случая

$$u|_{x=0} = C_1, \quad u_{xx}|_{x=0} = C_2, \quad C_1, C_2 = \text{const},$$

если взять пробную функцию $\varphi(x) = \exp(-\nu x/\beta)$.

ПРИМЕР 7. Аналогично разрушение для модифицированного уравнения КдФ–Бюргерса на полупрямой можно получить только с одним граничным условием, правда специального нефизического вида:

$$u_t - u^2 u_x + \beta u_{xxx} = \nu u_{xx}, \quad x \in [0, +\infty), \quad (43)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \left. \frac{1}{2} u^4 + \beta u_x^2 - 2\beta u u_{xx} \right|_{x=0} < a^2. \quad (44)$$

Для этого достаточно взять пробную функцию в виде

$$\varphi = u(x, t) \phi(x) = u(x, t) \exp\left(-\frac{\nu}{\beta} x\right).$$

Тогда, вводя обозначение $J(t) = \int u^2 \exp(-\nu x/\beta) dx$, из уравнения (33) получаем неравенство

$$\frac{dJ}{dt} \geq \frac{\nu}{2\beta} \int_0^L u^4 \exp\left(-\frac{\nu x}{\beta}\right) dx - \left[\frac{1}{2} u^4 + \beta u_x^2 - 2\beta u u_{xx} \right]_0 \geq k^2 J^2 - a^2, \quad (45)$$

где

$$k^2 = \frac{\nu^2}{2\beta^2},$$

из которого находим достаточные для разрушения условия на начальную функцию $u_0(x)$:

$$\int_0^{+\infty} u_0^2(x) \exp\left(-\frac{\nu x}{\beta}\right) dx > \frac{a}{k}. \quad (46)$$

Завершая разговор о неограниченных областях, нельзя не упомянуть работу [7], в которой методом пробных функций для уравнения Кортвега–де Фриза получен результат о разрушении решения задачи Коши. Однако при доказательстве в [7] на начальную функцию налагаются специальные нефизические требования роста на бесконечности, поэтому, несмотря на то, что для уравнений типа Бюргерса также можно получить аналогичные результаты, мы не останавливаемся на этом вопросе специально.

6. Принцип максимума. Последний раздел посвящен нескольким техническим вопросам и некоторым выводам из полученных результатов. При исследовании градиентной катастрофы для уравнения Бюргерса (5) был использован принцип максимума, но за неимением ссылок на данный результат ниже приведено его краткое доказательство.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА. Если функция $u(x, t)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $0 \leq t \leq T$ и $0 \leq x \leq L$, удовлетворяет уравнению Бюргерса (5) в точках области $0 < x < L$, $0 < t \leq T$, то максимальное и минимальное значения функции $u(x, t)$ достигаются или в начальный момент времени, или на границе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство принципа строится от противного. Случай $u(x, t) \equiv \text{const}$ тривиален. Обозначим через M максимальное значение функции

при $t = 0$ или при $x = 0, L$. Допустим, что функция $u(x, t)$ достигает своего максимального значения $M + \varepsilon$ в внутренней точке (x_0, t_0) . Найдем такую точку (x_1, t_1) , в которой

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_1, t_1) \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x_1, t_1) > 0. \quad (47)$$

Введем для некоторой константы k вспомогательную функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t). \quad (48)$$

Очевидно, что

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) = M + \varepsilon \quad \text{и} \quad k(t_0 - t) \leq (kT).$$

Выберем $(kT) < \varepsilon/2$; тогда максимальное значение функции $v(x, t)$ при $t = 0$ или при $x = 0, L$ не превосходит $M + \varepsilon/2$. В силу непрерывности функции $v(x, t)$ она должна в некоторой точке (x_1, t_1) достигать своего максимального значения:

$$v(x_1, t_1) \geq v(x_0, t_0) = M + \varepsilon.$$

Следовательно, в точке (x_1, t_1) : $t_1 > 0$, $0 < x_1 < L$, должны выполняться неравенства

$$\begin{aligned} v_{xx}(x_1, t_1) &= u_{xx}(x_1, t_1) \leq 0, \\ v_t(x_1, t_1) &= u_t(x_1, t_1) - k \geq 0, \quad v_x(x_1, t_1) = u_x(x_1, t_1) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $u(x, t)$ не удовлетворяет уравнению Бюргерса во внутренней точке (x_1, t_1) . Вторая часть теоремы о минимальном значении не требует отдельного доказательства, так как функция $u_1(-x, t) = -u(x, t)$ имеет максимальное значение там, где u – минимальное.

Теорема доказана.

Опираясь на приведенную схему доказательства можно сделать вывод, что аналогичный принцип ограниченности решения будет справедлив не только для уравнения (5), но и для уравнений с нелинейной вязкостью в правой части. Например, для уравнения простой волны, регуляризованного сглаживанием по малому интервалу времени, и используемого при моделировании гидродинамических процессов на мелкой воде:

$$u_t + uu_x = \nu(|u|^q u)_{xx}, \quad (49)$$

или для уравнения с нелинейной вязкостью упрощенного вида:

$$u_t + uu_x = \nu|u|^q u_{xx}. \quad (50)$$

Как следствие принципа максимума можно получить результат о глобальной неразрешимости, так как после дифференцирования уравнения по x в левой части остается два слагаемых u_{xt} и u_x^2 , обеспечивающих разрушение, а все остальные оказываются либо ограниченными, либо первого порядка по u_x .

ПРИМЕР 8. Докажем с помощью метода пробных функций появление градиентной катастрофы для уравнения (43) в случае $q = 2$. Перепишем (49) в виде

$$u_t + u_x(u - 6\nu uu_x) = 3\nu u^2 u_{xx}, \quad (51)$$

из которого видна справедливость принципа максимума. Для этого достаточно учесть, что второе слагаемое в левой части обращается в нуль из-за равенства нулю u_x , а множитель перед u_{xx} не отрицателен. Таким образом, существуют константы m и M такие, что $m \leq |u(x, t)| \leq M$ для всех (x, t) . Для простоты выкладок предположим, что $m > 0$ и $M \leq 1$.

Продифференцируем (51) по x

$$(u_x)_t + u_x^2 + uu_{xx} = \nu(u^3)_{xxx}$$

и подставим выражение uu_{xx} , полученное из (51):

$$uu_{xx} = \frac{1}{3\nu} \frac{u_t}{u} + \frac{u_x}{3\nu} - 2u_x^2, \quad (52)$$

получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{3\nu} \ln u + u_x \right) = \nu(u^3)_{xxx} - \frac{1}{3\nu} u_x + u_x^2. \quad (53)$$

Умножим теперь (53) на пробную функцию $\varphi(x) \in C^{(3)}(\Omega)$ и проинтегрируем по области постановки задачи Ω . Потребуем, чтобы функция $\varphi(x) \geq 0$ имела конечный носитель на Ω ; тогда после интегрирования по частям условия на границе $\partial\Omega$ дадут нуль и (53) перейдет в уравнение

$$\frac{d}{dt} \int \varphi w \, dx = \int \varphi u_x^2 \, dx + \frac{1}{3\nu} \int \varphi_x u \, dx - \int \varphi_{xxx} u^3 \, dx, \quad (54)$$

где

$$w = \frac{1}{3\nu} \ln u + u_x.$$

Воспользуемся очевидной оценкой

$$w^2 \leq 2u_x^2 + \frac{2}{9\nu^2} (\ln u)^2.$$

Тогда в силу принципа максимума выражение (55) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \int \varphi w \, dx \geq \frac{1}{2} \int \varphi w^2 \, dx - \frac{1}{3\nu} \int |\varphi_x| |u| \, dx - \int |\varphi_{xxx}| |u| \, dx - \frac{1}{9\nu^2} \int |\varphi| (\ln u)^2 \, dx. \quad (55)$$

Воспользовавшись неравенством (18) и введя обозначения

$$J(t) = \int \varphi \left(\frac{1}{3\nu} \ln u + u_x \right) \, dx, \\ k^2 = \frac{1}{2} \left(\int \varphi \, dx \right)^{-1}, \quad a^2 = \frac{1}{3\nu} \int |\varphi_x| \, dx + \int |\varphi_{xxx}| \, dx + \frac{1}{9\nu^2} \int |\varphi| (\ln m)^2 \, dx,$$

получим результат о глобальной во времени неразрешимости из обыкновенного дифференциального неравенства (11) при условии $J(0) > a/k$. Заметим, что если бы предположение $M \leq 1$ не выполнялось, то в аналогичную оценку для a^2 входила бы константа M , а вместо $(\ln m)$ могла бы входить оценка $(\ln M)$, что, конечно, принципиально не меняло бы полученного результата.

Интересным также является тот факт, что градиентная катастрофа в разобранном случае, происходит не из-за градиентной нелинейности, а из-за нелинейности в правой части $-2u_x^2$ (см. (52)). В частности, если для уравнения (49) при $q = 1$ проделать аналогичные преобразования, то для задачи Коши с нулевыми условиями при $x \rightarrow \infty$ градиентная и диссипативная нелинейности взаимно сократятся и градиентная катастрофа не будет иметь место, а напротив, будет справедлив закон сохранения

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \left(u_x + \frac{u}{2\nu} \right) dx = 0.$$

И последнее, все разобранные в настоящей работе уравнения являются модельными для возмущений, распространяющихся в одну сторону. Так что в постановке начально-краевой задачи это должно быть учтено. В частности, при переходе в неподвижную систему отсчета в уравнениях может появиться дополнительное слагаемое вида $c_0 u_x$, где c_0 – это скорость системы отсчета, в которой уравнение имеет вид (1), (2) или (3). Тем не менее, это слагаемое не внесет принципиального изменения ни в доказательство “жесткого” разрушения, для которого появится дополнительное слагаемое

$$c_0 \int \varphi_x u \, dx,$$

ни в исследование градиентной катастрофы, для которой добавятся два слагаемых: u_t в левой части и $\varphi_x u^2/2$ в правой. Наконец, при рассмотрении процессов, предполагающих распространение возмущений в обе стороны, задачи должны ставиться для уравнений типа Буссинеску, глобальная разрешимость которых методом пробных функций будет исследована уже совсем в другой работе.

7. Заключение. Метод пробных функций, использованный при изучении глобальной во времени неразрешимости задач для уравнений типа Бюргерса, имеет очень широкую область применения. Им удастся показать, что наличие линейной и нелинейной диссипации не является достаточным условием существования ограниченных гладких решений. Показано, что при определенных граничных и начальных условиях и градиентная нелинейность, и нелинейность в диссипативном слагаемом может привести к разрушению решения или к градиентной катастрофе за конечное время. Предложенным методом удастся получить оценки на скорость и время разрушения, зависящие от начальных и граничных данных, а также от выбора пробной функции.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. М. Рыский, Д. И. Трубецков, *Нелинейные волны*, Наука, М., 2000.
- [2] Дж. Уизем, *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977.
- [3] О. В. Руденко, С. И. Солуян, *Теоретические основы нелинейной акустики*, Наука, М., 1975.
- [4] С. И. Похожаев, “О разрушении решений нелинейных смешанных задач”, *Теория функций и нелинейные уравнения в частных производных*, Сб. статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Станислава Ивановича Похожаева, Тр. МИАН, **260**, МАИК, М., 2008, 213–226.

- [5] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383.
- [6] Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев, *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса*, Наука, М., 1988.
- [7] С. И. Похожаев, “Об отсутствии глобальных решений задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза”, *Функц. анализ и его прил.*, **46**:4 (2012), 51–60.
- [8] S. I. Pohozaev, “Blow-up of smooth solutions of the Kortweg–de Vries equation”, *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, **75**:12 (2012), 4688–4698.
- [9] М. О. Корпусов, Е. В. Юшков, “Разрушение решений систем уравнений мелкой воды”, *ТМФ*, **177**:2 (2013), 264–275.
- [10] М. О. Корпусов, А. А. Панин, “Локальная разрешимость и разрушение решения для уравнения Бенджамена–Бона–Махони–Бюргерса с нелокальным граничным условием”, *ТМФ*, **175**:2 (2013), 159–172.
- [11] М. О. Корпусов, А. Г. Свешников, Е. В. Юшков, “Разрушение решений нелинейных уравнений типа Кадомцева–Петвиашвили и Захарова–Кузнецова”, *Изв. РАН. Сер. матем.* (в печати).
- [12] J. P. Boyd, “Weakly non-local solutions for capillary-gravity waves: fifth-degree Korteweg–de Vries equation”, *Phys. D*, **48** (1991), 129–146.
- [13] Е. В. Юшков, “О разрушении в системах типа Кортвега–де Фриза”, *ТМФ*, **173**:2 (2012), 197–206.

Е. В. Юшков

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: yushkov.msu@mail.ru

Поступило

24.02.2014

М. О. Корпусов

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова