Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Антонова, А. В. Фаминский, О регулярности решений задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова в нормах Гёльдера, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 1, 13–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:44:18

О регулярности решений задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова в нормах Гёльдера

А. П. Антонова, А. В. Фаминский

Рассмотрен вопрос о внутренней регулярности обобщенных решений задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова. Установлены результаты о существовании у данных решений производных, непрерывных по Гёльдеру. В основе исследования лежат свойства фундаментального решения соответствующего линеаризованного уравнения.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10469

В работе рассматривается задача Коши для уравнения Захарова–Кузнецова

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = f(t, x, y) \quad (1)$$

($u = u(t, x, y)$) в слое $\Pi_T = \{(t, x, y) : 0 < t < T, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ ($T > 0$ произвольно) с начальным условием

$$u|_{t=0} = u_0(x, y) \quad (2)$$

и исследуются вопросы внутренней регулярности решений.

Уравнение вида (1) было выведено в работе [1] для описания распространения нелинейных ионно-звуковых волн в плазме, помещенной в магнитное поле. В дальнейшем это уравнение получило название уравнения Захарова–Кузнецова. Уравнение (1) является одним из вариантов $(2+1)$ -мерного обобщения уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$.

В работе [2] была установлена глобальная корректность задачи (1), (2) при начальной функции из $H^m(\mathbb{R}^2)$ и правой части из $L_1(0, T; H^m(\mathbb{R}^2))$ при натуральных m в некотором специальном классе функций $K_m(0, T) \subset C([0, T]; H^m(\mathbb{R}^2))$. Для $m = 1$ этот класс описывается следующим образом:

$$K_1(0, T) = \{u \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^2)), u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} \in L_\infty(\mathbb{R}^x; L_2((0, T) \times \mathbb{R})), \\ u \in L_3(0, T; W_\infty^1(\mathbb{R}^2)), u \in L_2(\mathbb{R}^x; L_\infty((0, T) \times \mathbb{R}))\}.$$

Работа выполнена в рамках проекта 333 государственного задания Минобрнауки РФ в сфере научной деятельности.

Для менее регулярных данных, а именно, при $u_0 \in L_2(\mathbb{R}^2)$, $f \in L_1(0, T; L_2(\mathbb{R}^2))$ существование глобальных слабых решений рассматриваемой задачи из пространства $L_\infty(0, T; L_2(\mathbb{R}^2))$ следует из результатов статьи [3]. Следует отметить, что единственность подобных решений не установлена.

В работах [4], [5] при изучении задачи Коши для уравнения Захарова–Кузнецова было установлено свойство повышения внутренней гладкости обобщенных решений в зависимости от скорости убывания нерегулярной начальной функции $u_0(x, y)$, правой части $f(t, x, y)$ и ее производных при $x \rightarrow +\infty$. В частности, в статье [5] решения рассматривались при начальной функции из функциональных пространств L_2^α и $H^{1,\alpha}$, где для $\alpha \geq 0$

$$L_2^\alpha = L_2^\alpha(\mathbb{R}^2) = \{\phi \in L_2(\mathbb{R}^2) : (1+x)^\alpha \phi \in L_2(\mathbb{R}_+^2)\}, \quad \mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) : x > 0\},$$

$$H^{1,\alpha} = H^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2) = \{\phi \in H^1(\mathbb{R}^2) : \phi, \phi_x, \phi_y \in L_2^\alpha\}.$$

Из результатов статей [2] и [5] вытекают следующие две теоремы (символом $[\alpha]$ обозначена целая часть числа $\alpha \geq 0$, $D^\nu = \partial_x^{\nu_1} \partial_y^{\nu_2}$ для мультииндекса $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, $|\nu| = \nu_1 + \nu_2$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_0 \in L_2^\alpha$, $f \in L_\infty(0, T; L_2^\alpha)$ для некоторого $\alpha > 3/4$ такого, что $(2\alpha - 1/2)$ нецелое, $D^\nu f \in L_\infty(0, T; L_2^{\alpha-|\nu|/2})$ для $|\nu| \leq 2\alpha$, натуральное число $m = [2\alpha - 1/2]$, натуральное число $\nu_0 = [2\alpha]$ при $\alpha \neq 1$ и $\nu_0 = 1$ при $\alpha = 1$. Тогда существует непрерывное в Π_T решение $u(t, x, y)$ задачи (1.1), (1.2) из пространства $L_\infty(0, T; L_2^\alpha)$. Это решение обладает в Π_T обобщенными производными $D^\nu u$ до порядка $|\nu| \leq \nu_0$ и непрерывными производными $D^\nu u$ до порядка $|\nu| \leq m - 1$. При этом для любых $\delta \in (0, T)$ и $x_0 \in \mathbb{R}$

$$(x - x_0 + 1)^{\alpha-|\nu|/2} D^\nu u \in L_\infty(\delta, T; L_2((x_0, +\infty) \times \mathbb{R})), \quad 1 \leq |\nu| \leq \nu_0, \quad (3)$$

$$\sup_{t \in [\delta, T], x \geq x_0} |D^\nu u(t, x, y)| < \infty, \quad 0 \leq |\nu| \leq m - 1. \quad (4)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u_0 \in H^{1,\alpha}$, $f \in L_\infty(0, T; H^{1,\alpha})$ для некоторого $\alpha > 3/4$ такого, что $(2\alpha + 1/2)$ нецелое, $D^\nu f \in L_\infty(0, T; L_2^{\alpha-|\nu|/2})$ для $|\nu| \leq 2\alpha + 1$, натуральное число $m = [2\alpha + 1/2]$, натуральное $\nu_0 = [2\alpha + 1]$. Тогда существует (единственное) непрерывное в Π_T решение $u(t, x, y)$ задачи (1), (2) из пространства $K_1(0, T) \cap L_\infty(0, T; H^{1,\alpha})$. Это решение обладает в Π_T обобщенными производными $D^\nu u$ до порядка $|\nu| \leq \nu_0$ и непрерывными производными $D^\nu u$ до порядка $|\nu| \leq m - 1$. При этом для любых $\delta \in (0, T)$ и $x_0 \in \mathbb{R}$

$$(x - x_0 + 1)^{\alpha-|\nu|/2+1/2} D^\nu u \in L_\infty(\delta, T; L_2((x_0, +\infty) \times \mathbb{R})), \quad 2 \leq |\nu| \leq \nu_0, \quad (5)$$

$$\sup_{t \in [\delta, T], x \geq x_0} |D^\nu u(t, x, y)| < \infty, \quad 0 \leq |\nu| \leq m - 1. \quad (6)$$

Данные результаты являются обобщением соответствующих результатов, установленных в [6], [7] для уравнения Кортевега–де Фриза. При этом, свойства (3) и (5) получены на основе некоторых интегральных оценок, в то время как для доказательства (4) и (6) была использована идея обращения линейной части уравнения (1) и применения свойств фундаментального решения оператора $\partial_t + \partial_{xxx}^3 + \partial_{xyy}^3$. В отличие от уравнения Кортевега–де Фриза, где подобное фундаментальное решение

описывается через хорошо изученную функцию Эйри, исследование фундаментального решения линеаризованного уравнения Захарова–Кузнецова было проведено в недавней статье [5] и явилось центральной частью указанной работы (более ранние результаты были получены также в [2], [8]).

Фундаментальное решение оператора $\partial_t + \partial_{xx}^3 + \partial_{xy}^3$ задается формулой

$$G(t, x, y) = \theta(t) \mathcal{F}^{-1}[e^{it(\xi_1^3 + \xi_1 \xi_2^2)}] \equiv \frac{\theta(t)}{t^{2/3}} S\left(\frac{x}{t^{1/3}}, \frac{y}{t^{1/3}}\right), \quad (7)$$

где

$$S(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[e^{i(\xi_1^3 + \xi_1 \xi_2^2)}](x, y),$$

θ – функция Хевисайда, $\mathcal{F}^{-1}$ – обратное преобразование Фурье. В работе [5] доказано, что функция S бесконечно дифференцируема и для любых $x_0 \in \mathbb{R}$, целого $m \geq 0$ и мультииндекса ν

$$(1 + |y|)^m |D^\nu S(x, y)| \leq c(m, |\nu|, x_0) e^{-c_0(x-x_0)^{3/2}} \quad \forall x \geq x_0 \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

а для любого $r \in [0, 2/3]$ и целого $n \in [0, 2]$

$$|\partial_x^n S(x, y)| \leq c(r)(1 + |y|)^{-r}(1 + |x|)^{r+n/2-1/4} \quad \forall x \leq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

$$|\partial_y^n S(x, y)| \leq c(r)(1 + |y|)^{-r}(1 + |x|)^{r+n/2-1/4} \quad \forall x \leq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Установленные в [5] свойства функции S позволяют получить не только оценки (4) и (6), но и более “тонкие” оценки старших производных рассматриваемых решений в нормах Гёльдера по аналогии с результатами статей [6], [7] для уравнения Кортевега–де Фриза, что и является целью настоящей работы. В этом смысле данная работа является продолжением и “логическим завершением” статьи [5].

Сформулируем результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда построенное в теореме 1 решение $u(t, x, y)$ задачи (1), (2) обладает следующим свойством: если $|\nu| = m - 1$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2$, то для любых $\delta \in (0, T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \geq x_0$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ и $t \in [\delta, T]$

$$|D^\nu u(t, x_1, y_1) - D^\nu u(t, x_2, y_2)| \leq c(|x_1 - x_2|^{\varepsilon - \sigma} + |y_1 - y_2|^{\varepsilon - \sigma}) \quad \forall \sigma \in (0, \varepsilon), \quad (11)$$

а если $|\nu| = m - 1 - j$, $j = 0, 1, 2$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2 + j$, то для любых $\delta \in (0, T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \geq x_0$, $y \in \mathbb{R}$ и $t, \tau \in [\delta, T]$

$$|D^\nu u(t, x, y) - D^\nu u(\tau, x, y)| \leq c|t - \tau|^{(\varepsilon - \sigma)/3} \quad \forall \sigma \in (0, \varepsilon), \quad (12)$$

где константы зависят от $x_0, \delta, \sigma, \alpha$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда решение $u(t, x, y)$ задачи (1.1), (1.2) из пространства $K_1(0, T)$ обладает следующим свойством: если $|\nu| = m - 1$, $\varepsilon = 2\alpha - m + 1/2$, то для любых $\delta \in (0, T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \geq x_0$ и $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ и $t \in [\delta, T]$ справедливо неравенство (11), а если $|\nu| = m - 1 - j$, $j = 0, 1, 2$, $\varepsilon = 2\alpha - m + 1/2 + j$, то для любых $\delta \in (0, T)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \geq x_0$, $y \in \mathbb{R}$ и $t, \tau \in [\delta, T]$ справедливо неравенство (12), где константы зависят от $x_0, \delta, \sigma, \alpha$.

Полученные результаты аналогичны результатам работ [6], [7] для задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза за исключением введения константы σ .

Обозначим через $\eta(x)$ срезающую функцию, а именно, пусть η – бесконечно дифференцируемая неубывающая функция такая, что $\eta(x) \equiv 0$ при $x \leq 0$, $\eta(x) \equiv 1$ при $x \geq 1$, $\eta(x) + \eta(1 - x) \equiv 1$. Условимся, в случае интегрирования по всей плоскости $\mathbb{R}^2$ пределы интегрирования опускать.

Приведем доказательство теоремы 3. Теорема 4 доказывается аналогично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, T)$. Введем вспомогательные функции $\varphi(t) \equiv \eta(2t/\delta - 1)$, $\psi(x) = \eta(x - x_0 + 2)$. Положим $v(t, x, y) = D^\nu u(t, x, y) \times \varphi(t)\psi(x)$, где $|\nu| = m - 1$. Тогда $v(t, x, y)$ является решением (вообще говоря, в смысле обобщенных функций) в слое Π_T линейной задачи Коши

$$\begin{aligned} v_t + v_{xxx} + v_{xyy} &= D^\nu f \varphi \psi - \sum_{|\nu_1| + |\nu_2| = |\nu|} c(\nu_1, \nu_2) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_x \varphi \psi + D^\nu u \varphi' \psi + 3D^\nu u_{xx} \varphi \psi' \\ &\quad + 3D^\nu u_x \varphi \psi'' + D^\nu u \varphi \psi''' + D^\nu u_{yy} \varphi \psi' \\ &\equiv F(t, x, y), \end{aligned} \quad (13)$$

$$v|_{t=0} = 0. \quad (14)$$

Используя фундаментальное решение оператора $\partial_t + \partial_{xxx}^3 + \partial_{xyy}^3$ (см. (7)), запишем функцию v в виде

$$v(t, x, y) = \int_0^t \iint G(t - \tau, x - \xi, y - \zeta) F(\tau, \xi, \zeta) d\xi d\zeta d\tau. \quad (15)$$

Пусть $\delta \leq t \leq T$, $x_2 \geq x_1 \geq x_0$ и $y_2 \geq y_1$. Без ограничения общности будем считать, что $x_2 \leq x_1 + 1$, $y_2 \leq y_1 + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} D^\nu u(t, x_2, y) - D^\nu u(t, x_1, y) &= v(t, x_2, y) - v(t, x_1, y) \\ &= \int_0^t \iint (G(t - \tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t - \tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) F(\tau, \xi, \zeta) d\xi d\zeta d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} D^\nu u(t, x, y_2) - D^\nu u(t, x, y_1) &= v(t, x, y_2) - v(t, x, y_1) \\ &= \int_0^t \iint (G(t - \tau, x - \xi, y_2 - \zeta) - G(t - \tau, x - \xi, y_1 - \zeta)) F(\tau, \xi, \zeta) d\xi d\zeta d\tau. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим интегралы, стоящие в правой части (16); интеграл из (17) оценивается аналогично, поскольку неравенство (10) имеет тот же вид, что и (9).

Для оценки интеграла, содержащего функцию f , разобьем область интегрирования по ξ на три части: $(x_0 - 2, x_1 - 1)$, $(x_1 - 1, x_1 + R)$, $(x_1 + R, +\infty)$ для некоторого $R > 0$.

Используя оценку (8) (так как $x_1 - \xi \geq 1$), находим, что

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_1-1} \int (G(t - \tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t - \tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) D^\nu f \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \\ &\leq |x_1 - x_2| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_1-1} \int |G_x(t - \tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) D^\nu f| d\zeta d\xi d\tau d\theta \\ &\leq c|x_1 - x_2| \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_1-1} \int \frac{e^{-c_0(t-\tau)^{-1/2}}}{(t-\tau)} \frac{|D^\nu f|}{(1-|\zeta-y|)} d\zeta d\xi d\tau \leq c_1|x_1 - x_2|. \end{aligned} \quad (18)$$

Так как $\alpha - |\nu|/2 = \varepsilon/2 + 3/4$, в силу (9) ($r = 1/2 + \sigma/2$, $n = 0$, $\sigma \in (0, \min(\varepsilon, 1/3))$)

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_1+R}^{+\infty} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) D^\nu f \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \\
 & \leq c \int_{\delta/2}^t \int_{x_1+R}^{+\infty} \int \frac{(1+|\zeta-y|)^{-1/2-\sigma/2}}{(t-\tau)^{3/4+\sigma/6}} (1+\xi-x_1)^{1/4+\sigma/2} |D^\nu f| d\zeta d\xi d\tau \\
 & \leq c_1(1+R)^{-\varepsilon/2+\sigma/2} \sup_{\delta/2 \leq t \leq T} \left(\int_{x_1}^{+\infty} \int (1+\xi-x_1)^{3/2+\varepsilon} (D^\nu f)^2 d\zeta d\xi \right)^{1/2} \\
 & \leq c_2(1+R)^{-\varepsilon/2+\sigma/2}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Для дальнейшей оценки заметим, что

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) D^\nu f \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \\
 & = |x_1 - x_2| \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) D^\nu f \varphi \Big|_{x_1-1}^{x_1+R} d\zeta d\tau d\theta \right. \\
 & \quad \left. - \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) D^\nu f \xi \varphi d\zeta d\xi d\tau d\theta \right|.
 \end{aligned}$$

Здесь $|\nu| + 1 = m \leq \nu_0$. Используя (9) ($r = 1/2 + \sigma/4$, $n = 0$, $\sigma \in (0, \min(\varepsilon, 2/3))$), находим, что поскольку $\alpha - (|\nu| + 1)/2 = \varepsilon/2 + 1/4$,

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) D^\nu f \xi \varphi d\zeta d\xi d\tau d\theta \right| \\
 & \leq c \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int \frac{(1+|\zeta-y|)^{-1/2-\sigma/4}}{(t-\tau)^{3/4+\sigma/12}} (2+\xi-x_1)^{1/4+\sigma/4} |D^\nu f_\xi| d\zeta d\xi d\tau \\
 & \leq c_1(1+R)^{1/2-\varepsilon/2+\sigma/2} \sup_{\delta/2 \leq t \leq T} \left(\int_{x_1-1}^{+\infty} \int (2+\xi-x_1)^{1/2+\varepsilon} (D^\nu f_\xi)^2 d\zeta d\xi \right)^{1/2} \\
 & \leq c_2(1+R)^{1/2-\varepsilon/2+\sigma/2}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Далее, аналогично (20)

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) D^\nu f \varphi \Big|_{x_1-1}^{x_1+R} d\zeta d\tau d\theta \right| \\
 & \leq c \int_{\delta/2}^t \int \frac{(1+|\zeta-y|)^{-1/2-\sigma/4} (2+R)^{1/4+\sigma/4}}{(t-\tau)^{3/4+\sigma/12}} |D^\nu f(\tau, x_1+R, \zeta)| d\zeta d\tau \\
 & \quad + c \int_{\delta/2}^t \int (1+|\zeta-y|)^{-1/2-\sigma/4} |D^\nu f(\tau, x_1-1, \zeta)| d\zeta d\tau \\
 & \leq c_1(2+R)^{1/2-\varepsilon/2+\sigma/2} \\
 & \quad \times \sup_{\delta/2 \leq t \leq T} \sup_{\theta \in [-1, R]} \int (1+|\zeta-y|)^{-1/2-\sigma/4} (2+\theta)^{\varepsilon/2-1/4-\sigma/4} |D^\nu f(t, x_1+\theta, \zeta)| d\zeta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_2(2+R)^{1/2-\varepsilon/2+\sigma/2} \sup_{\delta/2 \leq t \leq T} \int_{-1}^{+\infty} \int (1+|\zeta-y|)^{-1/2-\sigma/4} \\
&\quad \times ((2+\theta)^{\varepsilon/2-1/4-\sigma/4} |D^\nu f(t, x_1 + \theta, \zeta)| \\
&\quad + |((2+\theta)^{\varepsilon/2-1/4-\sigma/4} D^\nu f(t, x_1 + \theta, \zeta))_\theta|) d\zeta d\theta \\
&\leq c_3(2+R)^{1/2-\varepsilon/2+\sigma/2}.
\end{aligned} \tag{21}$$

Тогда из равенства (16) и оценок (18)–(21) следует, что

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \iint (G(t-\tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t-\tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) D^\nu f \varphi \psi d\xi d\zeta d\tau \right| \\
&\leq c((1+R)^{-\varepsilon/2+\sigma/2} + |x_1 - x_2|(1+R)^{1/2-\varepsilon/2+\sigma/2}).
\end{aligned}$$

Положив $1+R = |x_1 - x_2|^{-2}$, находим, что

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \iint (G(t-\tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t-\tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) D^\nu f \varphi \psi d\xi d\zeta d\tau \right| \\
&\leq C|x_1 - x_2|^{\varepsilon-\sigma}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \sigma \in (0, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Так как $\varphi' = 0$ при $t \notin [\delta/2, \delta]$ и в силу (3) свойства функции $D^\nu u$ при $t \in (\delta/2, T)$, $x > x_0 - 2$ аналогичны свойствам функции $D^\nu f$, то интеграл

$$\int_0^t \iint (G(t-\tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t-\tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) D^\nu u \varphi' \psi d\xi d\zeta d\tau$$

оценивается аналогично.

Далее, оценим интегралы, содержащие нелинейные члены. Будем использовать то же разбиение области интегрирования по ξ , что и раньше. Из оценки (8) находим, что

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_{x_0-2}^{x_1-1} \int (G(t-\tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t-\tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_\xi \varphi \psi d\xi d\zeta d\tau \right| \\
&= |x_1 - x_2| \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_1-1} \int G_x(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) \right. \\
&\quad \left. \times D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_\xi \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau d\theta \right| \\
&\leq c_1 |x_1 - x_2| \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_1-1} \int \frac{e^{-c_0(t-\tau)^{-1/2}}}{(t-\tau)} |D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_\xi| d\zeta d\xi d\tau \leq c_2 |x_1 - x_2|.
\end{aligned} \tag{22}$$

Используя свойство (3) (заметим, что $|\nu_1| \leq \nu_0$, $|\nu_2| + 1 \leq \nu_0$) и оценку (9) ($r = 0$, $n = 0$), находим, что

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_1+R}^{+\infty} \int (G(t-\tau, x_2 - \xi, y - \zeta) - G(t-\tau, x_1 - \xi, y - \zeta)) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_\xi \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \\
&\leq c_1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_1+R}^{+\infty} \int \frac{(1+\xi-x_1)^{-1/4}}{(t-\tau)^{2/3}} |D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_\xi| d\zeta d\xi d\tau \leq c_3(1+R)^{-1/4}.
\end{aligned} \tag{23}$$

В оставшемся интеграле разобьем область интегрирования по τ на две части. Для $s \in (0, t - \delta/2)$, используя оценку (9) при $r = 0$, $n = 1$ и свойство (3) (заметим, что $\alpha - |\nu_1|/2 \geq 1/4$), находим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta/2}^{t-s} \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi} \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \\ &= |x_1 - x_2| \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^{t-s} \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int G_x(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) \right. \\ & \quad \left. \times D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi} \varphi d\zeta d\xi d\tau d\theta \right| \\ &\leq c_1 |x_1 - x_2| \int_{\delta/2}^{t-s} \int_{x_1-1}^{+\infty} \int \frac{1}{(t-\tau)^{13/12}} (2 + \xi - x_1)^{1/4} |D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi}| d\zeta d\xi d\tau \\ &\leq c_2 |x_1 - x_2| s^{-1/12}, \end{aligned} \quad (24)$$

и, наконец, используя оценку (9) для $r = 0$, $n = 0$, находим, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_{t-s}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi} \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \\ &\leq c \int_{t-s}^t \int_{x_1-1}^{+\infty} \int \frac{1}{(t-\tau)^{2/3}} |D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi}| d\zeta d\xi d\tau \leq c_2 s^{1/3}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из оценок (22)–(25) следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \iint (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi} \varphi \psi d\xi d\zeta d\tau \right| \\ &\leq c((1+R)^{-1/4} + |x_1 - x_2| s^{-1/12} + s^{1/3}). \end{aligned}$$

Положим $s = |x_1 - x_2|^{12/5}$, $1 + R = |x_1 - x_2|^{-16/5}$. Тогда если $0 < \varepsilon \leq 4/5$, то

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t \iint (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi} \varphi \psi d\xi d\zeta d\tau \right| \\ &\leq c |x_1 - x_2|^{4/5} \leq c |x_1 - x_2|^{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $4/5 < \varepsilon < 1$. Оценки (22) и (23) оставим без изменения, а вместо (24), (25) проведем следующую выкладку. Заметим, что поскольку $2\alpha - m - 1/2 = \varepsilon > 4/5$, то $m + 1 \leq \nu_0$, и тогда $|\nu_2| + 2 \leq \nu_0$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi} \varphi d\zeta d\xi d\tau \right| \\ &= |x_1 - x_2| \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi}|_{x_1-1}^{x_1+R} \varphi d\zeta d\tau d\theta \right. \\ & \quad \left. - \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int G(t-\tau, x_1 + \theta(x_2 - x_1) - \xi, y - \zeta) \right. \\ & \quad \left. \times (D^{\nu_1} u_{\xi} D^{\nu_2} u_{\xi} + D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi\xi}) \varphi d\zeta d\xi d\tau d\theta \right|. \end{aligned}$$

Используя (3) и (9) ($r = 0$, $n = 0$), находим, что

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{x_1+R} \int G(t-\tau, x_1+\theta(x_2-x_1)-\xi, y-\zeta) \right. \\
 & \quad \left. \times (D^{\nu_1} u_\xi D^{\nu_2} u_\xi + D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi\xi}) d\zeta d\xi d\tau d\theta \right| \\
 & \leq c \int_{\delta/2}^t \int_{x_1-1}^{+\infty} \int \frac{1}{(t-\tau)^{2/3}} ((D^{\nu_1} u)^2 + (D^{\nu_1} u_\xi)^2 + (D^{\nu_2} u_\xi)^2 + (D^{\nu_2} u_{\xi\xi})^2) d\zeta d\xi d\tau \\
 & \leq c_1.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Аналогично (21) в силу (9) (опять $r = 0$, $n = 0$) имеем оценку

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int G(t-\tau, x_1+\theta(x_2-x_1)-\xi, y-\zeta) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_\xi \Big|_{x_1-1}^{x_1+R} d\zeta d\tau d\theta \right| \\
 & \leq c \sup_{\delta/2 \leq t \leq T} \int_{x_1-1}^{+\infty} \int (|D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_\xi| + |D^{\nu_1} u_\xi D^{\nu_2} u_\xi| + |D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_{\xi\xi}|) d\zeta d\xi \leq c_1.
 \end{aligned} \tag{27}$$

Из оценок (22), (23), (26), (28) находим, что

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^t \iint (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_\xi \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \\
 & \leq c(|x_1 - x_2| + (1+R)^{-1/4}),
 \end{aligned}$$

Положим $1+R = |x_1 - x_2|^{-4}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^t \iint (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) D^{\nu_1} u D^{\nu_2} u_\xi \varphi \psi d\zeta d\xi d\tau \right| \\
 & \leq c|x_1 - x_2|.
 \end{aligned}$$

Наконец, поскольку $\text{supp } \psi \subset [x_0 - 2, x_0 - 1]$, интегрируя по частям и используя оценку (8), находим, что

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{+\infty} \int (G(t-\tau, x_2-\xi, y-\zeta) - G(t-\tau, x_1-\xi, y-\zeta)) \right. \\
 & \quad \left. \times (3D^\nu u_{\xi\xi} \psi' + 3D^\nu u_\xi \psi'' + D^\nu u \psi''' + D^\nu u_{\zeta\zeta} \psi') d\zeta d\xi d\tau \right| \\
 & = |x_1 - x_2| \left| \int_0^1 \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_0-1} \int G_\xi(t-\tau, x_1+\theta(x_2-x_1)-\xi, y-\zeta) \right. \\
 & \quad \left. \times (3D^\nu u_{\xi\xi} \psi' + 3D^\nu u_\xi \psi'' + D^\nu u \psi''' + D^\nu u_{\zeta\zeta} \psi') d\zeta d\xi d\tau \right| \\
 & \leq |x_1 - x_2| \left| \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_0-1} \int (3(G_\xi \psi')_{\xi\xi} - 3(G_\xi \psi'')_\xi + G_\xi \psi''' + G_{\xi\zeta\zeta} \psi') D^\nu u d\zeta d\xi d\tau \right| \\
 & \leq c_1 |x_1 - x_2| \int_{\delta/2}^t \int_{x_0-2}^{x_0-1} \int \frac{e^{-c_0(t-\tau)^{-1/2}}}{(t-\tau)^{5/3}(1+|\zeta-y|)} |D^\nu u| d\zeta d\xi d\tau \leq c_2 |x_1 - x_2|.
 \end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки всех слагаемых из правой части (16), выводим неравенство (11).

Оценка модуля непрерывности по t вытекает из результатов работы [9] и уже полученных оценок модуля непрерывности по x и y .

Введем последовательности параллелепипедов

$$Q_n = [\delta, T] \times [x_0 + n, x_0 + n + 1] \times [y_0 + n, y_0 + n + 1],$$

$$Q'_n = [\delta, T] \times \left[x_0 + n - \frac{1}{2}, x_0 + n + \frac{3}{2} \right] \times \left[y_0 + n - \frac{1}{2}, y_0 + n + \frac{3}{2} \right],$$

где $n = 0, 1, \dots$. Пусть сначала $j = 0$, т.е.

$$|\nu| = m - 1, \quad \varepsilon = 2\alpha - |\nu| - \frac{3}{2} = 2\alpha - m - \frac{1}{2} \in (0, 1).$$

Положим $v(t, x, y) \equiv D^\nu u(t, x, y)$. Из самого уравнения (1) следует, что

$$v_t = -v_{xxx} - v_{xyy} - D^\nu \left(\frac{u^2}{2} \right)_x + D^\nu f.$$

Из уже доказанной оценки (11) следует, что

$$|v(t, x_2, y_2) - v(t, x_1, y_1)| \leq c(|x_1 - x_2|^{\varepsilon - \sigma} + |y_1 - y_2|^{\varepsilon - \sigma})$$

при $(t, x_1, y_1), (t, x_2, y_2) \in Q'_n$. В силу (4) $\|v\|_{L_\infty(Q'_n)} \leq \text{const}$, $\|D^\nu(u^2/2)\|_{L_\infty(Q'_n)} \leq \text{const}$. Кроме того, $\|D^\nu f\|_{L_\infty(\delta, T; L_2(Q'_n))} \leq \text{const}$. В обозначениях статьи [9]

$$A_{(3,0)} = A_{(1,2)} = v, \quad A_{(1,0)} = D^\nu \left(\frac{u^2}{2} \right), \quad A_{(0,0)} = D^\nu f,$$

$\omega(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|) = |x_1 - x_2|^{\varepsilon - \sigma} + |y_1 - y_2|^{\varepsilon - \sigma}$. Тогда в силу теоремы 1 и замечания 5 из [9]

$$|v(t + \tau, x, y) - v(t, x, y)| \leq c \inf_{0 < h < 1/2} (h^{\varepsilon - \sigma} + \tau h^{\varepsilon - \sigma - 3} + \tau h^{-1})$$

и положив $h = \tau^{1/3}$, получаем требуемую оценку. Пусть теперь $j = 1$, $|\nu| = m - 2$. Тогда в каждом прямоугольнике Q'_n функция v является обобщенным решением уравнения

$$v_t = -v_{xxx} - v_{xyy} - D^\nu(u u_x) + D^\nu f, \quad (28)$$

кроме того, уже доказано, что

$$|v_x(t + \tau, x, y) - v_x(t, x, y)| + |v_y(t + \tau, x, y) - v_y(t, x, y)| \leq c\tau^{(\varepsilon - \sigma - 1)/3} \quad (29)$$

при $(t + \tau, x, y), (t, x, y) \in Q'_n$. В силу (4) $\|D^\nu(u u_x)\|_{L_\infty(Q'_n)} \leq \text{const}$. В обозначениях [9] возьмем

$$A_{(2,0)} = A_{(0,2)} = v_x, \quad A_{(0,0)} = -D^\nu(u u_x) + D^\nu f.$$

Тогда в силу теоремы 1 и замечаний 2, 4, 5 из [9]

$$|v(t + \tau, x, y) - v(t, x, y)| \leq c \inf_{0 < h < 1/2} (h\tau^{(\varepsilon - \sigma - 1)/3} + \tau h^{\varepsilon - \sigma - 3} + \tau). \quad (30)$$

Положив $h = \tau^{1/3}$, получим оценку (12) для данного значения j . Пусть теперь $j = 2$, $|\nu| = m - 3$. Тогда в каждом прямоугольнике Q'_n функция v является обобщенным решением уравнения (28) и справедливо неравенство (29). В обозначениях [9] возьмем

$$A_{(1,0)} = v_{xx}, \quad A_{(0,1)} = v_{xy}, \quad A_{(0,0)} = -D^\nu(u u_x) + D^\nu f.$$

Тогда по теореме 1 и замечаниям 2, 4, 5 из [9] получаем неравенство (13), положив в котором $h = \tau^{1/3}$ выводим оценку (12) и при $j = 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, “О трехмерных солитонах”, *ЖЭТФ*, **66**:2 (1974), 594–597.
- [2] А. В. Фаминский, “Задача Коши для уравнения Захарова–Кузнецова”, *Дифференц. уравнения*, **31**:6 (1995), 1070–1081.
- [3] А. В. Фаминский, “Задача Коши для квазилинейных уравнений нечетного порядка”, *Матем. сб.*, **180**:9 (1989), 1183–1210.
- [4] J. L. Levandosky, “Smoothing properties of nonlinear dispersive equations in two spatial dimensions”, *J. Differential Equations*, **175**:2 (2001), 275–352.
- [5] A. V. Faminskii, A. P. Antonova, “On internal regularity of solutions to the initial value problem for the Zakharov–Kuznetsov equation”, *Progress in Partial Differential Equations*, Springer Proc. in Math. Stat., **44**, Springer, Cham, 2013, 53–74.
- [6] А. В. Фаминский, “Задача Коши для уравнения Кортевега–де Фриза и его обобщений”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **13** (1988), 56–105.
- [7] С. Н. Кружков, А. В. Фаминский, “Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза”, *Матем. сб.*, **120**:3 (1983), 396–425.
- [8] F. Linares, A. Pastor, “Well-posedness for the two-dimensional modified Zakharov–Kuznetsov equation”, *SIAM J. Math. Anal.*, **41**:4 (2009), 1323–1339.
- [9] С. Н. Кружков, А. В. Фаминский, “О свойствах непрерывности решений некоторых классов нестационарных уравнений”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем., мех.*, 1983, № 3, 29–36.

А. П. Антонова

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: Antonova-nastya@mail.ru

Поступило

04.12.2013

А. В. Фаминский

Российский университет дружбы народов, г. Москва

E-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru