Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Самойлов, Замечание о трехчленных тождествах в ассоциативных алгебрах, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 254–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1047>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:15:51

УДК 512.552.4

ЗАМЕЧАНИЕ О ТРЕХЧЛЕННЫХ ТОЖДЕСТВАХ В АССОЦИАТИВНЫХ АЛГЕБРАХ

Л. М. Самойлов

В работе рассматриваются трехчленные тождества ассоциативных алгебр (в общем случае без единицы) над бесконечным полем, т.е. тождества вида $\alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3 = 0$, где α, β, γ – скаляры, m_1, m_2, m_3 – различные мономы. Показано, что каждое такое нетривиальное тождество влечет полугрупповое тождество. Алгебры с трехчленными тождествами охарактеризованы на языке многообразий.

Библиография: 3 названия.

В работе предполагается, что основное поле F является бесконечным и все алгебры являются ассоциативными F -алгебрами.

В ряде работ (см., например, [1], [2]) исследовались так называемые *полугрупповые тождества*, т.е. полиоднородные тождества, имеющие вид $m_1 = m_2$, где m_1 и m_2 – различные мономы. Для таких тождеств была установлена тесная взаимосвязь с тождеством энгелевости. В дальнейшем тождество энгелевости степени n будем обозначать через E_n :

$$E_n = [x, \underbrace{y, \dots, y}_n].$$

Произвольный полиоднородный полином вида $\sum_{i=1}^n \alpha_i m_i$, где $\alpha_i \in F$, $\alpha_i \neq 0$, а m_i – различные мономы, называется *приведенным слева (справа)*, если $n > 1$ и наибольшее общее начало (конец) мономов m_i является пустым. Если полином приведен и слева, и справа, то он называется *приведенным*.

В настоящей работе исследуются трехчленные тождества, т.е. полиоднородные тождества вида $\alpha m_1 + \beta m_2 + \gamma m_3 = 0$, где $\alpha, \beta, \gamma \in F$, m_1, m_2, m_3 – различные мономы и хотя бы два коэффициента отличны от 0. Для тождеств такого вида получены результаты, обобщающие соответствующие результаты о полугрупповых тождествах. Мы также охарактеризуем алгебры с трехчленными тождествами на языке многообразий. Центральное место в нашем рассмотрении будут занимать тождества, аналогичные тождеству энгелевости.

В работе доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Для алгебры A (в общем случае без единицы) над бесконечным полем следующие условия эквивалентны:*

- 1) *алгебра A удовлетворяет трехчленному тождеству (приведенному, приведенному слева, приведенному справа);*

- 2) для некоторых m, n, k алгебра A удовлетворяет тождеству $y^m E_n y^k = 0$ ($E_n = 0$, $E_n y^k = 0$, $y^m E_n = 0$);
- 3) в алгебре A выполнено полугрупповое тождество (приведенное, приведенное слева, приведенное справа);
- 4) многообразие $\text{Var}(A)$ не содержит алгебру верхнетреугольных матриц второго порядка Λ_2 .

Из этой теоремы следует, что изучение трехчленных тождеств над бесконечным полем полностью сводится к изучению полугрупповых тождеств. Заметим также, что если тождество $t = 0$, где t – моном, считать приведенным (и трехчленным), то теорема очевидно верна.

ЛЕММА 1. Пусть алгебра A над произвольным полем удовлетворяет полиоднородному трехчленному тождеству с нулевой суммой коэффициентов (приведенному, приведенному слева, приведенному справа). Тогда алгебра A удовлетворяет полиоднородному трехчленному тождеству (приведенному, приведенному слева, приведенному справа) той же степени, но от двух переменных.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3$ – трехчленное тождество от переменных $x_1, \dots, x_n$, выполняющееся в алгебре A .

Допустим, что один из коэффициентов α, β, γ , для определенности γ , равен 0, а два других отличны от 0. Пусть моном t_0 является наибольшим общим началом, а моном t_4 – наибольшим общим концом мономов t_1 и t_2 (в случае левой приведенности t_0 – пустой моном, а в случае правой приведенности t_4 – пустой моном). Представим тождество $f = 0$ в виде

$$\alpha t_0 x_i t'_1 x_k t_4 + \beta t_0 x_j t'_2 x_l t_4 = 0,$$

где t'_1 и t'_2 – мономы (возможно пустые), $i \neq j, k \neq l$. Подставим в полином f x вместо x_i и y вместо x_j . Остальные переменные определим следующим образом. Если $\{i, j\} = \{k, l\}$, то положим их равными y . Если $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$, то положим $x_k = x, x_l = y$. Если $k = i$ или $k = j$, но $l \notin \{i, j\}$, то положим $x_l = y$ или $x_l = x$ соответственно. Аналогично, если $l = i$ или $l = j$, но $k \notin \{i, j\}$, то положим $x_k = y$ или $x_k = x$ соответственно. Все остальные переменные положим равными y . Очевидно, что при такой подстановке переменных в тождество $f = 0$ получается полиоднородное двучленное тождество от двух переменных, которое будет приведенным (приведенным слева, приведенным справа), если таковым было тождество $f = 0$.

Осталось рассмотреть случай, когда все коэффициенты α, β, γ ненулевые. Допустим, что моном t_0 является наибольшим общим началом, а моном t_4 – наибольшим общим концом мономов t_1, t_2 и t_3 (в случае левой приведенности t_0 – пустой моном, а в случае правой приведенности t_4 – пустой моном). Тождество $f = 0$ можно записать в виде

$$\alpha t_0 x_i t'_1 x_a t_4 + \beta t_0 x_j t'_2 x_b t_4 + \gamma t_0 x_k t'_3 x_c t_4 = 0,$$

где t'_1, t'_2, t'_3 – мономы (возможно пустые), а $x_i, x_j, x_k, x_a, x_b, x_c$ – переменные. В силу выбора t_0 и t_4 равенства $i = j = k$ и $a = b = c$ невозможны. Для определенности будем считать, что $i \neq j, i \neq k$. Положим $x_i = x, x_j = y, x_k = y$. Если $\{i, j, k\} = \{a, b, c\}$, то остальные переменные положим равными y . Если $\{i, j, k\} \cap \{a, b, c\} = \emptyset$, то положим одну из переменных x_a, x_b, x_c равной x , а остальные переменные положим равными y . Если же хотя бы одна из переменных x_a, x_b, x_c не принадлежит множеству $\{x_i, x_j, x_k\}$,

то ее выбор осуществим так, чтобы при подстановке в полином f на месте переменных x_a, x_b, x_c стояли как x , так и y . Остальные переменные снова положим равными y . Так как $\alpha + \beta + \gamma = 0$, в результате такой подстановки переменных в тождество $f = 0$ получается полиоднородное трехчленное тождество от двух переменных, которое будет приведенным (приведенным слева, приведенным справа), если таковым было тождество $f = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть полиоднородный полином f от двух переменных x и y имеет нулевую сумму коэффициентов и представим в виде

$$f = \alpha t_0 x^k y u + t_0 y g \quad (f = \alpha u y x^k t_0 + g y t_0),$$

где $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$, t_0 и u — мономы (возможно пустые), g — полином от x и y , $k \geq 1$. Тогда однородная степени 1 по x компонента полинома $f(x + y, y)$ отлична от 0. Кроме того, если моном t_0 пустой, то эта компонента является приведенным слева (справа) полиномом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $f = \alpha t_0 x^k y u + t_0 y g$. Второй случай рассматривается аналогично. На пространстве полиномов от переменных x и y определим линейные операторы P_0 и P_1 , сопоставляющие каждому полиному его однородные компоненты степеней 0 и 1 по x соответственно. Нетрудно проверить, что

$$P_1(g \cdot h) = P_0(g)P_1(h) + P_1(g)P_0(h), \quad (1)$$

где g и h — полиномы от x и y . Мы хотим показать, что $P_1(f(x + y, y)) \neq 0$. Положим $m'_0 = t_0(x + y, y)$, $u' = u(x + y, y)$, $g' = g(x + y, y)$. Пользуясь равенством (1), получаем

$$\begin{aligned} P_1(f(x + y, y)) &= P_0(m'_0)P_1(\alpha(x + y)^k y u' + y g') + P_1(m'_0)P_0(\alpha(x + y)^k y u' + y g') \\ &= y^s (\alpha P_0((x + y)^k) y P_1(u') + \alpha P_1((x + y)^k) y P_0(u') + y P_1(g')) + P_1(m'_0) \cdot 0. \end{aligned}$$

Здесь $P_0(m'_0) = y^s$, $s = \deg m_0$, так как t_0 — моном, а в силу полиоднородности $\alpha x^k y u + y g$ и равенства 0 суммы коэффициентов этого полинома

$$P_0(\alpha(x + y)^k y u' + y g') = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P_1(f(x + y, y)) &= y^s \left(\alpha y^{k+1} P_1(u') + \alpha \left(\sum_{i=0}^{k-1} y^i x y^{k-1-i} \right) y P_0(u') + y P_1(g') \right) \\ &= y^s (\alpha x y^{k-1} y P_0(u') + y(\cdot)) \neq 0, \end{aligned}$$

так как $P_0(u')$ — моном (возможно пустой). Полином $P_1(f(x + y, y))$ имеет по крайней мере два ненулевых коэффициента, и в случае $s = 0$ он является приведенным слева. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. 1) $\implies$ 2). Пусть алгебра A удовлетворяет трехчленному тождеству $f = 0$ степени s . Если полином f имеет ненулевую сумму коэффициентов, то в алгебре A выполнено тождество $x^s = 0$, из которого следует энгелевость степени $2s - 1$.

Если же сумма коэффициентов полинома f нулевая, то в силу леммы 1 можно считать, что f зависит только от двух переменных x и y и является по ним однородным. Далее воспользуемся леммой 2, согласно которой в силу бесконечности поля F в алгебре A выполнено тождество

$$y^m \left(\sum_{i=0}^r \alpha_i y^i x y^{r-i} \right) y^k = 0, \quad (2)$$

где $\alpha_i \in F$, $\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_n \neq 0$, $m + r + k = s$. При этом $m = 0$ ($k = 0$) в случае левой (правой) приведенности полинома f . В случае двусторонней приведенности $m = 0$ и $k = 0$. В работе [2] было показано, что из (2) следует тождество $y^m E_{3r-1} y^k = 0$.

2) $\implies$ 3). Допустим сначала, что поле F имеет характеристику $p > 0$. Пусть s – наименьшее натуральное число со свойством $p^s \geq n$. Подставляя в тождество $y^m E_n(x, y) y^k = 0$ $x = E_{p^s-n}(x, y)$, получаем полугрупповое тождество

$$y^m E_{p^s}(x, y) y^k = y^m (x y^{p^s} - y^{p^s} x) y^k = 0.$$

Если же поле F имеет нулевую характеристику, то зафиксируем целые неотрицательные числа $n > 1$, k, m (случай $n = 1$ очевиден, и мы исключим его из дальнейшего рассмотрения) и обозначим через T вербальный идеал свободной ассоциативной алгебры счетного ранга $F\langle X \rangle$, $X = \{x, z, y = y_0, y_1, y_2, \dots\}$, порожденный полиномом $y^m E_n(x, y) y^k$. Без ограничения общности можно считать, что $n \geq m + k + 1$. Рассмотрим идеал I алгебры $F\langle X \rangle$, порожденный всеми элементами вида $[x, z, y_{i_1}, \dots, y_{i_l}, [y_{i_{l+1}}, y_{i_{l+2}}], y_{i_{l+3}}, \dots]$, где $y_{i_j} \in \{y_0 = y, y_1, \dots\}$. Покажем, что при $l = m + n + k$ имеет место сравнение

$$y^m [x, y_1, \dots, y_l, y] y^k \equiv 0 \pmod{(T + I)}. \quad (3)$$

При $i = 0, 1, \dots, m + k$ рассмотрим полиномы $f_i(x, z, y, y_1, \dots, y_{n-1+i})$ степени $m + k + 1$ по y , являющиеся частичными линеаризациями полиномов $y^m E_{n+i}([x, z], y) y^k$. Каждый полином f_i есть сумма всевозможных слагаемых степени $m + k + 1$ по $y = y_0$ и степени 1 по $y_1, \dots, y_{n-1+i}$ вида

$$y_{\alpha_1} \cdots y_{\alpha_m} [x, z, y_{\beta_1}, \dots, y_{\beta_{n+i}}] y_{\gamma_1} \cdots y_{\gamma_k}. \quad (4)$$

По модулю идеала I мы можем переставлять буквы в коммутаторах начиная с третьего места; этим мы постоянно будем пользоваться ниже. Обозначим через $f_i^{(s)}$, $s = 1, \dots, m + k + 1$, сумму слагаемых вида (4), для которых $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_{n+i}$ и среди β_j нуль встречается s раз. По модулю идеала $T + I$ имеем

$$0 \equiv f_i \equiv \sum_{s=1}^{m+k+1} \frac{(n+i)!}{s!} f_i^{(s)} \pmod{(T + I)}. \quad (5)$$

Для $i < j \leq m+k+1$ обозначим через Λ_i^j следующее подмножество симметрической группы $\text{Sym}(1, 2, \dots, n-1+j)$:

$$\Lambda_i^j = \{(\mu_1, \dots, \mu_{j-i}, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1+i}) \mid \mu_1 < \dots < \mu_{j-i}, \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1+i}\}.$$

Если $\lambda \in \Lambda_i^j$ и

$$f = \sum_{s=1}^{m+k+1} \alpha_s f_i^{(s)}(x, z, y, y_1, \dots, y_{n-1+i}),$$

то положим

$$f^\lambda = f([x, z, y_{\mu_1}, \dots, y_{\mu_{j-i-1}}, y_{\mu_{j-i}}, y, y_{\lambda_1}, \dots, y_{\lambda_{n-1+i}}]).$$

Нетрудно проверить, что по модулю идеала I имеет место равенство

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_i^j} f^{(\lambda)} \equiv \sum_{s=1}^{m+k+1} \alpha_s C_{n+j-s}^{j-i} f_j^{(s)} \pmod{I}. \quad (6)$$

Полагая $\beta_{s,i}^{(0)} = (m+k+1)!/s!$, из (5) получаем

$$0 \equiv f_i \equiv \sum_{s=1}^{m+k+1} \beta_{s,i}^0 f_i^{(s)} \pmod{(T+I)}, \quad i = 0, 1, \dots, m+k. \quad (7)$$

Используя (6) при $f = f_0$, $j = i$, $i = 0$ и (7), имеем

$$\begin{aligned} 0 &\equiv C_{n+i-(m+k+1-0)}^{i-0} f_i - \sum_{\lambda \in \Lambda_0^i} f_0^{(\lambda)} \\ &\equiv \sum_{s=1}^{m+k} \beta_{s,i}^{(0)} (C_{n+i-(m+k+1-0)}^{i-0} - C_{n+i-s}^{i-0}) f_i^{(s)} \pmod{(T+I)}, \quad i = 1, \dots, m+k. \end{aligned}$$

Полагая $\beta_{s,i}^{(t+1)} = \beta_{s,i}^{(t)} (C_{n+i-(m+k+1-t)}^{i-t} - C_{n+i-s}^{i-t})$ и действуя по индукции аналогично изложенному выше, мы в итоге получим

$$\beta_{1,m+k}^{(m+k)} f_{m+k}^{(1)} \equiv 0 \pmod{(T+I)},$$

откуда в силу неравенства $\beta_{1,m+k}^{(m+k)} \neq 0$ сразу следует (3).

Для $i = 1, 2, \dots$ и $j = 0, 1, \dots, l$ положим $y_j^{(i)} = y_{(l+1)i+j}$. Определим последовательность полиномов $F^{(i)}$ (при фиксированных m, l, k):

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= [x, y], \quad \dots, \\ F^{(i+1)} &= (y_0^{(i+1)})^m [F^{(i)}, y_1^{(i+1)}, \dots, y_l^{(i+1)}, y_0^{(i+1)}] (y_0^{(i+1)})^k. \end{aligned}$$

Пусть B есть относительно свободная дупорожденная алгебра нематричного многообразия $\text{Var}(A)$. Из теоремы Кемера [3] о нильпотентности радикала Джекобсона

конечнопорожденной PI -алгебры над полем нулевой характеристики следует, что при некотором d алгебра B удовлетворяет всем тождествам вида

$$z_1[x_1, x_2]z_2 \cdots z_d[x_{2d-1}, x_{2d}]z_{d+1} = 0, \quad x_i \in F\langle X \rangle, \quad z_i \in F\langle X \rangle \cup \{1\}. \quad (8)$$

Из равенства (3) и определения полиномов $F^{(i)} = 0$ получаем

$$F^{(d)} \equiv \sum g_1 w_1 g_2 w_2 \cdots g_d w_d g_{d+1} \pmod{T}, \quad g_i \in F\langle X \rangle \cup \{1\}, \quad w_i = [y_\alpha^{(j)}, y_\beta^{(j)}]. \quad (9)$$

В совокупности с (8) равенство (9) означает, что в алгебре B выполнено тождество $F^{(d)} = 0$ (при $m = k = 0$ в точности получается лиева нильпотентность).

Для доказательства импликации достаточно установить, что тождество $F^{(d)} = 0$ влечет полугрупповое тождество от двух переменных, приведенное (приведенное слева, приведенное справа) при $m = k = 0$ ($m = 0, k = 0$). Допустим, что при некоторой подстановке переменных в $F^{(i)}$ мы получили полином в форме $[a_i, b_i]$, где a_i и b_i — мономы от x и y . Подставляя вместо переменных $y_1^{(i+1)}, \dots, y_l^{(i+1)}, y_0^{(l+1)}$ соответствующие куски слова Морса, построенного на переменных a_i и b_i , мы получим некоторый полином от двух переменных вида $[a_{i+1}, b_{i+1}]$, где a_{i+1} и b_{i+1} — мономы. Для построенного таким образом тождества $[a_d, b_d] = 0$ выполняются требуемые свойства приведенности.

3) $\Rightarrow$ 1). Тривиально.

2) $\Rightarrow$ 4). Алгебра с единицей Λ_2 над бесконечным полем не удовлетворяет тождеству $y^m E_n y^k = 0$. В самом деле, его следствием является тождество энгелевости $E_n = 0$, подставляя в которое $x = e_{12}$, $y = e_{11}$ (e_{11} и e_{12} — матричные “единички”), получаем $\pm e_{12}$.

4) $\Rightarrow$ 2). Обозначим идеал тождеств алгебры Λ_2 через T . Пусть полином $f = f(x_1, \dots, x_n)$ степени m является тождеством алгебры A , но $f \notin T$. Если сумма коэффициентов полинома f ненулевая или $m < 3$, то доказываемая импликация очевидна. Поэтому будем предполагать, что f имеет нулевую сумму коэффициентов и $m \geq 3$.

Покажем, что при некотором s A удовлетворяет нетривиальному тождеству вида

$$\sum_{i=0}^s \alpha_i y^i x y^{s-i} = 0. \quad (10)$$

При доказательстве импликации 1) $\Rightarrow$ 2) мы уже видели, что такое тождество влечет при некоторых m, l, k тождество $y^m E_l(x, y) y^k = 0$.

Представим f в виде линейной комбинации полиномов вида

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_k}] x_{i_{k+1}} \cdots x_{i_m}, \quad k \geq 2. \quad (11)$$

Полином вида (11) назовем *правильным*, если $i_1 \leq i_r$, $r = 2, \dots, k$, $i_1 \neq i_2, i_3 \leq \dots \leq i_k$ и $i_{k+1} \leq \dots \leq i_m$. Любой полином вида (11) представим как линейная комбинация правильного полинома и полиномов вида

$$g_1[x_\alpha, x_\beta] g_2[x_\gamma, x_\delta] g_3, \quad g_i \in F\langle X \rangle \cup \{1\}. \quad (12)$$

Производя перенумерацию переменных и учитывая, что $f \notin T$, представим f в виде $f = f_1 + f_2 + f_3 + g$, где g – сумма слагаемых вида (12), f_1 – сумма правильных полиномов с $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, f_2 – сумма правильных полиномов с $i_1 = 2$, f_3 – сумма прочих правильных полиномов и в f_1 хотя бы одно слагаемое входит с ненулевым коэффициентом. Подставим в f $x_2 = x$, $x_i = y^{l_i}$ при $i \neq 2$ (выбор натуральных чисел l_i осуществим позднее). При такой подстановке f_3 перейдет в 0, а f_1 , f_2 , g перейдут в f'_1 , f'_2 , g' соответственно. В полученном полиноме сделаем подстановку $x = x + y$ и выделим однородную компоненту степени 1 по x . Вклад в нее полинома g' будет нулевым, так как на два коммутатора приходится только один x . Вычислим вклад полиномов f'_1 , f'_2 .

Пусть $\deg_{x_i} f = k_i > 0$. Обозначим через Λ_1 множество полиномов вида

$$[y^{l_1}, x, \underbrace{y^{l_1}, \dots, y^{l_1}}_{\alpha_1}, \underbrace{y, \dots, y}_{\alpha_2}, \underbrace{y^{l_3}, \dots, y^{l_3}}_{\alpha_3}, \dots] (y^{l_1})^{\beta_1} (y)^{\beta_2} (y^{l_3})^{\beta_3} \dots (y^{l_n})^{\beta_n},$$

где $\alpha_j, \beta_j \geq 0$, $1 + \alpha_1 + \beta_1 = k_1$, $1 + \alpha_2 + \beta_2 = k_2$, $\alpha_i + \beta_i = k_i$ при $i > 2$. Обозначим через Λ_2 множество полиномов вида

$$[x, y^{l_i}, \underbrace{y, \dots, y}_{\alpha_2}, \underbrace{y^{l_3}, \dots, y^{l_3}}_{\alpha_3}, \dots] (y^{l_1})^{k_1} (y)^{\beta_2} (y^{l_3})^{\beta_3} \dots (y^{l_n})^{\beta_n},$$

где $\alpha_j, \beta_j \geq 0$, $1 + \alpha_i + \beta_i = k_i$ при $i \geq 2$.

Очевидно, что вклад полиномов f'_1 , f'_2 в вычисляемую компоненту степени 1 по x представляет собой линейную комбинацию полиномов из Λ_1 и Λ_2 соответственно. В силу построения f_1 один из коэффициентов этой комбинации отличен от 0. Определим переменные l_i так, чтобы полиномы из $\Lambda_1 \cup \Lambda_2$ были линейно независимыми. Тогда A будет удовлетворять некоторому нетривиальному тождеству вида (10), что и доказывает теорему.

Автор, пользуясь случаем, выражает глубокую признательность своему научному руководителю А. Р. Кемеру за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Голубчик И.З., Михалёв А.В. О многообразиях алгебр с полугрупповым тождеством // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1982. №2. С. 8–11.
- [2] Riley D. M., Wilson M. C. Associative Algebras Satisfying a Semigroup Identity. Preprint, 1997.
- [3] Кемер А. Р. Тождества Капелли и нильпотентность радикала Джекобсона конечнопорожденной PI -алгебры // Докл. АН СССР. 1980. Т. 225. №4. С. 793–797.

Филиал Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова,
г. Ульяновск
E-mail: samoilov@mmf.univ.simbirsk.su

Поступило
03.02.98