Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Комаров, Скорость наилучшего приближения кон-
стант простейшими дробями и альтернанс, *Матем.
заметки*, 2015, том 97, выпуск 5, 718–732

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:21:20

Скорость наилучшего приближения констант наипростейшими дробями и альтернанс

М. А. Комаров

Рассматривается задача интерполяции и наилучшего равномерного приближения констант $c \neq 0$ наипростейшими дробями ρ_n порядка n на отрезке $[a, b]$ (все величины вещественны). В случае $n > 4|c|(b - a)$ доказана однозначная разрешимость задачи интерполяции, получены точные по порядку n верхняя и нижняя оценки погрешности интерполяции в совокупности всех узлов и показано, что полюсы интерполяционной дроби лежат вне круга с диаметром $[a, b]$. Получен один из аналогов классической теоремы Чебышёва о наименьшем отклонении унитарного полинома степени n от константы. А именно, при $n > 4|c|(b - a)$ доказано, что дробь ρ_n^* наилучшего приближения константы c на $[a, b]$ единственна и характеризуется чебышевским альтернансом из $n + 1$ точки для разности $\rho_n^* - c$. Получена точная по порядку n оценка наименьших отклонений.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm10470

1. Введение. Формулировка результатов. Наипростейшей дробью (НД) порядка n , $n = 0, 1, 2, \dots$, называется рациональная функция вида

$$\rho_n = \frac{Q'}{Q}, \quad Q(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n, \quad Q \not\equiv 0, \quad z, a_j \in \mathbb{C},$$

т.е. логарифмическая производная полинома степени n . Таким образом,

$$\rho_0(z) \equiv 0, \quad \rho_n(z) = \sum_{k=1}^n (z - z_k)^{-1}, \quad n \geq 1,$$

где полюсы z_k (не обязательно различные) – нули полинома Q . Отсюда следует простой физический смысл наипростейших дробей: $\rho_n(z)$ представляет собой напряженность в точке z плоского электростатического поля, созданного n положительными единичными зарядами, расположенными в точках z_k .

Интерес к наипростейшим дробям изначально был привлечен работами А. Макинтайра и У. Фукса (1940), А. А. Гончара (1955), Е. П. Долженко (1960), посвященными некоторым экстремальным задачам в классах рациональных функций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-31471 мол_а) и Минобрнауки (грант № 14.В37.21.0369).

Как самостоятельный аппарат приближения наипростейшие дроби впервые были использованы В. И. и Д. Я. Данченко (1999).

Теория приближения наипростейшими дробями и некоторыми их модификациями активно развивается (см. работы В. И. Данченко, П. А. Бородина, О. Н. Косухина, В. Ю. Протасова, И. Р. Каюмова, Я. В. Новака и других). Так, для НД были получены [1], [2] аналоги классических полиномиальных теорем С. Н. Мергеляна, Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, А. Зигмунда, В. К. Дзядыка, Дж. Л. Уолша. Вместе с тем, был выявлен ряд не присущих полиномам принципиальных аппроксимативных свойств НД; некоторые такие свойства описаны ниже.

В настоящей заметке исследуется наилучшее равномерное приближение *произвольных вещественных констант* (постоянных функций)

$$f(x) = c = \text{const}, \quad x \in [-1, 1], \quad c \in \mathbb{R},$$

наипростейшими дробями порядка не выше n . Это аналог классической задачи Чебышёва о наименьшем уклонении унитарного полинома заданной степени от константы. Отметим, что к случаю отрезка $[-1, 1]$ сводится исследование наилучшего приближения на произвольном вещественном отрезке $[a, b]$ (см. замечание 1.2). Кроме того, достаточно рассмотреть случай $c > 0$, так как для константы $c = 0$ единственной НД наилучшего приближения на любом отрезке является, очевидно, НД $\rho_0(x) \equiv 0$ порядка 0, а приближение отрицательных констант легко сводится к случаю $c > 0$, поскольку функция $\tilde{\rho}_n(x) = -\rho_n(-x)$ тоже НД, причем

$$|\tilde{\rho}_n(x) - c| = |\rho_n(t) - (-c)| \quad (t = -x).$$

Дробь наилучшего приближения мы получаем как НД *наилучшей интерполяции*, поэтому вначале исследуем *интерполяцию* констант. Известно, что НД порядка не выше n , интерполирующая n -узловую таблицу, может не быть единственной либо даже не существовать [3], [4]. Однако, в случае констант первая особенность не имеет места: показано [3], [5], что *если НД порядка $\leq n$, интерполирующая постоянную функцию $f(x) = c$ по набору узлов (не обязательно различных)*

$$\xi = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad x_k \in [-1, 1],$$

существует, то она единственна, а ее порядок равен в точности n . Эту дробь мы будем обозначать через $R_n(c, \xi; x)$, а соответствующую *погрешность интерполяции* на отрезке $x \in [-1, 1]$ – через

$$\Delta_n(c, \xi) = \max_{x \in [-1, 1]} |R_n(c, \xi; x) - c|.$$

Добавим, что при $c \neq 0$ все n полюсов дроби $R_n(c, \xi; \cdot) = Q'/Q$ (если эта дробь существует) попарно различны. В самом деле, степень Q равна n , поэтому множество нулей полинома $\tilde{Q} = Q' - cQ$ совпадает с набором n узлов интерполяции (ср. (5.1)). Но если какие-то полюсы дроби (т.е. нули полинома Q) равны между собой, то в некоторой точке $z \notin \xi$ имеем $Q(z) = Q'(z) = 0$, откуда и $Q(z) = 0$. Противоречие.

До настоящего момента не было оценок погрешности $\Delta_n(c, \xi)$, точных по порядку скорости убывания. Лишь в [3] для случая *чебышевского набора узлов*

$$\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}, \quad \beta_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

при $c \in (0, 15/31)$ была получена хорошая оценка

$$\Delta_n(c, \beta) \leq \frac{c}{2^{2n-1}n!} \cdot \frac{1-c}{1-2c}, \quad n \geq 2,$$

а также было доказано, что НД $R_n(c, \beta; \cdot)$ не имеет полюсов в круге $|z| \leq 1$. В п. 5 мы докажем следующую теорему 1, содержащую для любых $c > 0$ точные по порядку n нижнюю и верхнюю оценки погрешности $\Delta_n(c, \xi)$ в совокупности всех наборов $\xi = \{x_k \in [-1, 1]\}_{k=1}^n$ и точный по n порядок погрешности $\Delta_n(c, \beta)$. Положим

$$N(c) = \min\{p \in \mathbb{N} : p \geq 8c\}, \quad c > 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $c > 0$, $n > N(c)$. При любом наборе $\xi = \{x_1, \dots, x_n\}$ узлов отрезка $[-1, 1]$, не обязательно различных, полюсы интерполяционной дроби $R_n(c, \xi; \cdot)$ попарно различны и лежат вне круга $|z| \leq 1.2$, а погрешность интерполяции на отрезке $[-1, 1]$ допускает оценку

$$\frac{c^{n+1}}{2^{n-1}n!e^{2c}} \leq \Delta_n(c, \xi) \leq \frac{2^n c^{n+1} e^{2c}}{n!v_n(c)}, \quad (1.2)$$

где $v_n(c) > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n(c) = 1$ (см. (2.7), (2.8)). Порядок по n верхней оценки достигается, например, при интерполяции по n -кратному узлу $x_1 = 1$, а порядок нижней – при интерполяции по чебышевскому набору узлов β . В частности, погрешность $\Delta_n(c, \beta)$ допускает точную по порядку n оценку

$$\frac{c^{n+1}}{2^{n-1}n!e^c \operatorname{ch} c \cdot W_n(c)} \leq \Delta_n(c, \beta) \leq \frac{c^{n+1}e^{2c}}{2^{n-1}n!V_n(c)}, \quad (1.3)$$

где

$$W_n(c) > 0, \quad V_n(c) > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(c) = 1$$

(см. (2.9)).

Другая принципиальная особенность аппроксимации посредством НД состоит в том, что НД $\rho_n^*(f; \cdot)$ порядка $\leq n$ наилучшего равномерного приближения вещественной функции f на отрезке $[-1, 1]$, вообще говоря, неединственна и не может быть охарактеризована числом точек альтернанса¹ разности $\rho_n^*(f; \cdot) - f$. Так, неединственность дроби ρ_n^* даже при наличии альтернанса из $n+1$ точек, равно как и необязательность такового для наилучшего приближения, впервые была показана в [5] на примере для $n=2$. Этот пример был полностью обобщен для $n=3$ в [6] и для произвольного $n \geq 2$ – в [7]. Кроме того, в [6] есть пример, показывающий недостаточность для наилучшего приближения даже альтернанса из $2n-1$ точек.

Иначе дело обстоит с приближением констант. В работе [5] при достаточно больших $n > n_0(c)$ доказана необходимость $(n+1)$ -точечного альтернанса для наилучшего приближения константы $c \in (0, \ln \sqrt{2})$ на отрезке $[-1, 1]$ НД порядка не выше n и единственность НД $\rho_n^*(c; \cdot)$. В частности, поскольку $(n+1)$ -точечным альтернансом обусловлено совпадение НД ρ_n^* с константой c в n узлах отрезка $[-1, 1]$, эта дробь является НД наилучшей интерполяции и имеет порядок n .

¹Напомним, что точки $t_1 < t_2 < \dots < t_s$ отрезка $[a, b]$ образуют чебышевский альтернанс (далее – альтернанс) на $[a, b]$ для разности непрерывных функций ρ и f , если $\rho(t_k) - f(t_k) = \pm(-1)^k d$, $k = 1, 2, \dots, s$, где $d = \max_{x \in [a, b]} |\rho(x) - f(x)|$.

В работе [8] доказана *достаточность* альтернанса из $n + 1$ точек для наилучшего приближения, но при весьма жестком ограничении: $|c| \leq c_n$, $n \in \mathbb{N}$, где положительная последовательность $\{c_n\}$ монотонно убывает к нулю.

Основной результат настоящей работы – теорема 2, в которой при естественном (см. замечание 1.1) ограничении на n утверждается необходимость и достаточность $(n + 1)$ -точечного альтернанса для наилучшего приближения произвольной вещественной константы c посредством НД порядка $\leq n$ и единственность НД $\rho_n^*(c; \cdot)$. Кроме того, дан точный по n порядок наименьших уклонений

$$\delta_n(c) = \max_{x \in [-1, 1]} |\rho_n^*(c; x) - c|.$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любой вещественной константы $c \neq 0$ дробь $\rho_n^*(c; \cdot)$ при каждом $n > N(|c|)$ единственна и имеет порядок n . При этом, существование чебышевского альтернанса из $n + 1$ точек отрезка $[-1, 1]$ для разности $\rho_n - c$, где ρ_n – вещественнозначная НД порядка n , необходимо и достаточно для того, чтобы $\rho_n(x) \equiv \rho_n^*(c; x)$. Наименьшие уклонения допускают точную по порядку n оценку:²*

$$\frac{|c|^{n+1}}{2^{n-1}n!} \cdot e^{-2|c|} \leq \delta_n(c) \leq \frac{|c|^{n+1}}{2^{n-1}n!} \cdot \frac{e^{2|c|}}{V_n(|c|)},$$

где

$$V_n(|c|) > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(|c|) = 1$$

(см. (2.9)).

Теорема 2 вытекает из теоремы 1 и следующей теоремы автора, дающей критерий наилучшего приближения наипростейшими дробями в терминах альтернанса.

КРИТЕРИЙ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ [9], [10]. Если полюсы вещественнозначной НД ρ_n порядка n расположены вне круга $|z| \leq 1$, а вещественная функция f непрерывна на $[-1, 1]$, то $\rho_n(x) \equiv \rho_n^*(f; x)$ в том и только том случае, когда для разности $\rho_n - f$ на $[-1, 1]$ имеется альтернанс из $n + 1$ точек. При этом, ρ_n – единственная НД наилучшего приближения.

Достаточно провести ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 для случая $c > 0$.

Необходимость альтернанса. Положим $\rho_n^*(c; \cdot) = \rho_n^* = Q'/Q$. Многочлен Q , $\deg Q \leq n$, сохраняет знак на отрезке $[-1, 1]$. Не нарушая общности, будем считать $Q > 0$ на указанном отрезке. Обозначим через m ($m \leq n$) суммарную кратность узлов отрезка $[-1, 1]$, по которым НД ρ_n^* интерполирует константу c , а через $x_1^*, \dots, x_m^*$ – сами эти узлы (каждый узел выписан столько раз, какова его кратность).

Докажем от противного, что при $n > N(c)$ имеет место равенство $m = n$, т.е. что суммарная кратность узлов интерполяции равна n . В самом деле, допустим, что $m < n$; тогда разность $\rho_n^* - c$ представляется в виде

$$\rho_n^*(x) - c = \frac{Q'(x)}{Q(x)} - c = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \omega(x), \quad \omega(x) = \prod_{k=1}^m (x - x_k^*), \quad x_k^* \in [-1, 1],$$

где многочлен $P(x)$ не имеет нулей на отрезке $[-1, 1]$ (при $m = 0$ считаем $\omega(x) \equiv 1$).

²При просмотре корректуры было замечено, что в условиях теоремы 2 наименьшие уклонения $\delta_n(c)$ удовлетворяют и нижней оценке (1.3). Это легко следует из аналога полиномиальной теоремы Валле-Пуссена, полученного автором в [9; теорема 3].

Определим многочлен $\tilde{\omega}$ равенствами

$$\tilde{\omega}(x) = \begin{cases} (x+1)^{n-m} & \text{в случае } P(x) > 0, \\ (x-1)(x+1)^{n-m-1} & \text{в случае } P(x) < 0 \end{cases}$$

(знак указан для $|x| \leq 1$). Таким образом, на отрезке $x \in [-1, 1]$ полином $\omega\tilde{\omega}$ имеет ровно n корней с учетом кратностей, а $|P(x) - c\varepsilon\tilde{\omega}(x)| \leq |P(x)|$ для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$.

По теореме 1 ввиду $n > N(c)$ существует НД S'/S порядка n , интерполирующая константу c во всех n корнях (с учетом кратностей) полинома $\omega\tilde{\omega}$, т.е.

$$\frac{S'(x)}{S(x)} - c = \frac{-c\omega(x)\tilde{\omega}(x)}{S(x)}.$$

Мы считаем полином S унитарным, причем $S > 0$ на $[-1, 1]$ согласно (2.10). Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ и $x \in [-1, 1]$ верно $Q + \varepsilon S > Q > 0$.

Рассмотрим НД $\rho^\varepsilon = (Q' + \varepsilon S')/(Q + \varepsilon S)$ порядка не выше n . Имеем

$$\rho^\varepsilon(x) - c = \frac{Q'(x) + \varepsilon S'(x)}{Q(x) + \varepsilon S(x)} - c = \frac{P(x) - c\varepsilon\tilde{\omega}(x)}{Q(x) + \varepsilon S(x)} \cdot \omega(x).$$

Согласно предыдущим оценкам для достаточно малого $\varepsilon > 0$ верно

$$0 < \left| \frac{P(x) - c\varepsilon\tilde{\omega}(x)}{Q(x) + \varepsilon S(x)} \right| < \left| \frac{P(x)}{Q(x)} \right|, \quad x \in [-1, 1], \quad x \neq x_k^*,$$

а это означает, что

$$\max_{[-1,1]} |\rho^\varepsilon - c| < \max_{[-1,1]} |\rho_n^* - c|.$$

Противоречие с тем, что ρ_n^* доставляет наилучшее приближение. Следовательно, обязательно $m = n$.

Итак, доказано, что дробь $\rho_n^*(c; \cdot)$ интерполирует константу c по n узлам³ отрезка $[-1, 1]$ с учетом кратностей. Следовательно, все ее полюсы, по теореме 1, расположены вне круга $|z| \leq 1$. Тогда по критерию для разности $\rho_n^* - c$ существует альтернанс из $n + 1$ точек отрезка.

Достаточность альтернанса. Если для разности $\rho_n - c$ существует альтернанс из $n + 1$ точек отрезка $[-1, 1]$, то НД ρ_n , очевидно, интерполирует постоянную $f(x) = c$ по n узлам отрезка $[-1, 1]$ и имеет порядок n , и, при $n > N(c)$, по теореме 1 все ее полюсы расположены вне круга $|z| \leq 1$. По критерию $\rho_n(x) \equiv \rho_n^*(c; x)$.

Единственность тоже следует из критерия.

Докажем оценку наименьших уклонений. НД $\rho_n^*(c; \cdot)$ интерполирует константу по n узлам, а потому $\delta_n(c)$, как погрешность интерполяции, удовлетворяет нижней оценке (1.2). По определению $\delta_n(c) \leq \Delta_n(c, \beta)$, поэтому для величины $\delta_n(c)$ необходимо верна и верхняя оценка (1.3). Теорема 2 доказана.

³При $c \in (0, \ln \sqrt{2})$ и $n = 1, 2, \dots$ это свойство было доказано в [5; лемма 5], но построенное там доказательство не переносится дословно на любые $c > 0$ (даже при ограничении $n > N(c)$). Принципиальное отличие нашего доказательства, построенного, в сущности, по той же схеме, — в выборе дроби S'/S .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Вычисления для малых n позволяют ожидать [11], [12], что дробь $\rho_n^*(c; \cdot)$ единственна и характеризуется указанным альтернансом при любых c и n . Однако, опустить или существенно ослабить ограничение на n в утверждении теоремы 2 нельзя в следующем смысле. Из результатов [13] следует, что для любой НД ρ_n порядка n найдется точка $x_0 \in [-1, 1]$, в которой $|\rho_n(x_0)| < Kn$, где K – константа. Значит, константы $c > Kn$ заведомо не могут хорошо приближаться на $[-1, 1]$ дробями порядка не выше n , ибо погрешность аппроксимации имеет в лучшем случае порядок самой константы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Утверждения теорем 1 и 2 переносятся на случай произвольного вещественного отрезка $[a, b]$ с помощью подстановки вида $y = \mu x + \nu$, $H(y) = Q(x)$ ($\mu = (b - a)/2 > 0$ – полуширина отрезка), ввиду очевидного тождества

$$\left| \frac{Q'(x)}{Q(x)} - \mu c \right| = \mu \left| \frac{H'(y)}{H(y)} - c \right|.$$

Так, для погрешности интерполяции константы $c > 0$ на отрезке $[a, b]$ верна оценка

$$\frac{(b-a)^n c^{n+1}}{n! 2^{2n-1} e^{(b-a)c}} \leq \max_{y \in [a, b]} \left| \frac{H'(y)}{H(y)} - c \right| \leq \frac{(b-a)^n c^{n+1} e^{(b-a)c}}{n! v_n((b-a)c/2)}, \quad n > N\left((b-a)\frac{c}{2}\right),$$

а величины наименьших отклонений НД порядка не выше n от константы c на отрезке $[a, b]$ убывают к нулю со скоростью $(b-a)^n |c|^n / (4^n n!)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Из теоремы Косухина [2; теорема 1.2], связывающей величины наименьшего отклонения наипростейших дробей порядка $\leq n$ от функции $f(x)$ и наименьшего отклонения алгебраических полиномов степени $\leq n-1$ от функции $F(x) = f(x) \exp(\int_0^x f(t) dt)$, и из оценки величины последнего в случае $F(x) = ce^{cx}$ (см., например, [14; с. 229–230]) также следует, что величина $\delta_n(c)$ убывает к нулю со скоростью $|c/2|^n/n!$, однако, обе границы в нашей оценке точнее тех, что получаются из теоремы Косухина, по порядку c .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. В работе [5] для констант $c \in (0, \ln \sqrt{2})$ при достаточно больших $n > n_0(c)$ обоснован алгоритм построения *некоторой* интерполяционной НД, доставляющей альтернанс из $n+1$ точек отрезка $[-1, 1]$. Из наших оценок следует, что доказательство алгоритма повторяется дословно для *любой* константы $c > 0$, если выбрать натуральное $n_0(c)$ из условия

$$n_0(c) \geq \max \left\{ 8ce^{4c}; \frac{1 + \sqrt{1 + 64c^2 e^{4c}}}{2} \right\}.$$

Очевидно, такое $n_0(c) \geq N(c)$; следовательно, по теореме 2 для любой константы $c > 0$ алгоритм приводит к НД $\rho_n^*(c; \cdot)$. За начальный набор узлов интерполяции имеет смысл брать набор узлов Чебышёва, так как на последнем достигается порядок по n нижней оценки в (1.2).

2. Основные вспомогательные утверждения. В [3] было показано, что НД $R_n(c, \xi; \cdot)$, $\xi = \{x_1, \dots, x_n\}$, может быть представлена в виде

$$\frac{Q'}{Q}, \quad Q(x) = \left(a_0 - c \int_0^x e^{-ct} \Pi(t) dt \right) e^{cx}, \quad \Pi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n), \quad (2.1)$$

причем $Q(x)$ – унитарный полином со свободным членом

$$a_0 = a_0(n; c; \xi) = c^{-n} \sum_{k=0}^n (-c)^k (n-k)! \sigma_k(\xi), \quad (2.2)$$

где $\sigma_k = \sigma_k(\xi) = \sigma_k(x_1, \dots, x_n)$ – элементарные симметрические многочлены:

$$\sigma_0 \equiv 1, \quad \sigma_k = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

При этом, для существования интерполяционной НД необходимо и достаточно, чтобы порождающий полином Q не обращался в нуль ни в одном из узлов x_k .

Преобразуем выражение полинома Q . По обобщенной теореме о среднем для интеграла, ввиду $e^{-ct} > 0$, в интервале между 0 и x найдется точка τ такая, что

$$-c \int_0^x e^{-ct} \Pi(t) dt = -c \Pi(\tau) \int_0^x e^{-ct} dt = \Pi(\tau) \cdot (e^{-cx} - 1), \quad \tau = \tau(c; \xi; x).$$

Следовательно, формула (2.1) принимает вид

$$Q(x) = (a_0 + \Pi(\tau) \cdot (e^{-cx} - 1)) e^{cx}. \quad (2.3)$$

Препятствием, не позволившим авторам работы [5] установить необходимость альтернанса и единственность наилучшего приближения для всех c и $n > n_0(c)$, была трудность получения подходящей оценки снизу величины $a_0(n; c; \xi)$. Мы преодолеваем это препятствие, сводя вопрос к доказательству положительности полиномов

$$P_k^{[n]}(c) = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{k(k-1) \dots (k-j+1)}{n(n-1) \dots (n-j+1)} \cdot \frac{(-c)^j}{j!}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

на некотором общем для них интервале значений $c \geq 0$. Следующая лемма, доказываемая в п. 3, – основное вспомогательное утверждение настоящей работы.

ЛЕММА 1. *Полиномы $P_k^{[n]}(c)$, $1 \leq k \leq n$, положительны при $c \in [0, (n+1)/4]$.*

Если в определении вырожденной гипергеометрической функции [15; с. 310]

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$$

положить $\alpha = -k$, $\gamma = -n$, $z = -c$, то при $k < n$ замечаем $P_k^{[n]}(c) = \Phi(-k, -n; -c)$. Деления на нуль не произойдет, поскольку ряд оборвется раньше, чем появится нулевая скобка в знаменателе. Известно [15; с. 325], что с точностью до постоянного множителя, зависящего лишь от k и n , функция $\Phi(-k, -n; -c)$ совпадает с обобщенным полиномом Лагерра степени k . Из результатов о нулях полиномов Лагерра [16; с. 158] следует, тем самым, что полином $P_k^{[n]}(c)$, $k < n$, не имеет положительных нулей при четном k и имеет единственный положительный нуль при нечетном k . При доказательстве леммы мы получим этот результат независимо и оценим снизу положительный нуль для всех нечетных $k < n$ числом $(n+1)/4$.

Положительность полинома $P_n^{[n]}(c)$ (случай $k = n$) докажем отдельно. Обозначив через $E_n(x) = \sum_{j=0}^n x^j/j!$ частную сумму разложения e^x в ряд по степеням x , замечаем, что $P_n^{[n]}(c) \equiv E_n(-c)$. При $n > c$ ввиду элементарных свойств знакопередающегося ряда $\sum_{j=0}^{\infty} (-c)^j/j! = e^{-c}$ верна оценка

$$e^{-c} - \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} < E_n(-c) < e^{-c} + \frac{c^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (2.5)$$

Отсюда и из формулы Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n} \zeta, \quad \zeta = \exp\left(\frac{\theta}{12n}\right) > 1, \quad 0 < \theta(n) < 1, \quad (2.6)$$

при $0 < c \leq (n+1)/4$ (т.е. $n \geq \max\{1; 4c-1\} > c$) следует положительность $P_n^{[n]}$:

$$e^c \cdot P_n^{[n]}(c) \equiv e^c \cdot E_n(-c) > 1 - \frac{c^{n+1}e^c}{(n+1)!} > 1 - \frac{e^{n+1} \cdot e^{(n+1)/4}}{\sqrt{2\pi(n+1)} \cdot 4^{n+1}} > 1 - \frac{(0.9)^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} > 0.$$

Введем обозначение

$$v_n(c) = e^c \cdot \left(E_n(-c) - \frac{(2c)^n \cdot (e^c - 1)}{n!} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad c > 0. \quad (2.7)$$

Аналогично предыдущему получается оценка величины v_n , показывающая, например, что $0.6 \leq v_n(c) \rightarrow 1$ для каждого c при $n \rightarrow +\infty$:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left(\frac{9}{10} \right)^n < v_n(c) < 1 + \frac{\sqrt{n}}{8\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{5} \right)^n, \quad n > 8c > 0. \quad (2.8)$$

При $n > 8c > 0$ величины

$$V_n(c) = e^c \cdot \left(E_n(-c) - \frac{c^n \cdot (e^c - 1)}{2^{n-1}n!} \right), \quad W_n(c) = 1 + \frac{c^n \cdot (1 - e^{-c})}{2^{n-1}n! \operatorname{ch} c} \quad (2.9)$$

также положительны и стремятся к 1 с ростом n , причем быстрее, нежели $v_n(c)$. В частности, $V_n(c) > 1/2$. Отсюда и из (1.3) и (2.6) при $n > 8c > 0$ следует, например,

$$\delta_n(c) \leq \Delta_n(c, \beta) \leq \frac{c^{n+1}e^{2c}}{2^{n-1}n!V_n(c)} < \frac{2e^n c^{n+1}e^{2c}}{2^{n-1}\sqrt{2\pi n}n^n} < \frac{4c}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{1.25}}{16} \right)^n \leq \frac{ce^{1.25}}{4\sqrt{2\pi}} < c.$$

С помощью леммы 1 мы докажем следующую лемму, утверждающую, в частности, что при $n > N(c)$ полином Q , порождающий интерполяционную НД (2.1), отделен от нуля на отрезке $x \in [-1, 1]$ равномерно по $\xi = \{x_k \in [-1, 1]\}_{k=1}^n$. Тем самым, будет доказана и однозначная разрешимость задач интерполяции при $n > N(c)$.

ЛЕММА 2. Если константа $c > 0$, то при каждом натуральном $n > N(c)$ полином Q (см. (2.1), (2.2)) на отрезке $[-1, 1]$ удовлетворяет двусторонней оценке

$$0 < e^{-2c} c^{-n} n! v_n(c) \leq Q(x) \leq e^{2c} c^{-n} n!, \quad x \in [-1, 1], \quad (2.10)$$

каким бы ни был набор ξ узлов отрезка $[-1, 1]$, не обязательно различных. В случае интерполяции по узлам Чебышёва β (см. (1.1)) справедлива точная по порядку n оценка

$$0 < e^{-2c} c^{-n} n! V_n(c) \leq Q(x) \leq e^c c^{-n} n! \operatorname{ch} c \cdot W_n(c), \quad x \in [-1, 1]. \quad (2.11)$$

Верхняя оценка (2.10) была получена в [5] для констант $c \in (0, \ln \sqrt{2})$, причем доказательство проходит для любых значений c ; мы его не воспроизводим. Нижняя оценка (2.10) и оценки (2.11) новые и будут доказаны в п. 4.

3. Доказательство леммы 1. Как отмечалось в п. 2, $P_k^{[n]}(c) = \Phi(-k, -n; -c)$ при $1 \leq k < n$. Для функции $\Phi(\alpha, \gamma; z)$ при условии $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ имеет место преобразование Куммера [15; с. 317]

$$\Phi(\alpha, \gamma; z) = e^z \cdot \Phi(\gamma - \alpha, \gamma; -z).$$

Поскольку при этом преобразовании последний аргумент меняет знак, естественно попытаться с его помощью перейти от знакопередающей суммы $P_k^{[n]}(c)$, точная оценка которой трудна, к некоторой знакоположительной сумме. Однако, в нашем случае γ — отрицательное целое, и непосредственное применение формулы невозможно. Поступим иначе. Заметим, что

$$\Phi(-k, -n; -c) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(-k, \varepsilon - n; -c),$$

где $\Phi(-k, \varepsilon - n; -c)$, $0 < |\varepsilon| < 1$, — полином (относительно c), к которому формула Куммера применима. Имеем

$$\Phi(-k, \varepsilon - n; -c) = e^{-c} \cdot \Phi(\varepsilon - n + k, \varepsilon - n; c).$$

Положим $m = n - k \geq 1$. По определению

$$\Phi(\varepsilon - n + k, \varepsilon - n; c) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\varepsilon - m)(\varepsilon - m + 1) \dots (\varepsilon - m + j - 1)}{(\varepsilon - n)(\varepsilon - n + 1) \dots (\varepsilon - n + j - 1)} \cdot \frac{c^j}{j!}.$$

Для вычисления предела суммы (при $\varepsilon \rightarrow 0$) разобьем ее на 3 части:

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} = \left(1 + \sum_{j=1}^m\right) + \sum_{j=m+1}^n + \sum_{j=n+1}^{\infty}.$$

Первая часть стремится к $\Phi(-m, -n; c) > 1$. Вторая часть стремится к 0 ввиду наличия в числителе сомножителя ε (тогда как все скобки в знаменателе отделены от нуля). Во всех слагаемых третьей части множитель ε появляется и в числителе, и в знаменателе, и потому сокращается, а все другие скобки отделены от нуля. Мы видим, что ряд сходится на всей прямой $c \in \mathbb{R}$ равномерно по всем значениям ε , близким к нулю, а потому сумма ряда непрерывна при $\varepsilon = 0$. Нетрудно установить, что в пределе получим равенство

$$\begin{aligned} e^c \cdot \Phi(-k, -n; -c) &= 1 + \sum_{j=1}^m \frac{m(m-1) \dots (m-j+1)}{n(n-1) \dots (n-j+1)} \cdot \frac{c^j}{j!} \\ &\quad + (-1)^k \cdot \frac{m!}{n!} \cdot \sum_{j=n+1}^{\infty} (j-n)(j-n+1) \dots (j-m-1) \cdot \frac{c^j}{j!}, \end{aligned}$$

где $k = n - m$. Видим, что при четном k полином $P_k^{[n]}(c)$ не имеет положительных нулей, а при нечетном, ввиду очевидного тождества

$$\frac{d}{dc}(P_k^{[n]}(c)) = -\frac{k}{n} \cdot P_{k-1}^{[n-1]}(c)$$

и положительности $P_{k-1}^{[n-1]}(c)$, он имеет единственный положительный нуль.

Итак, $P_k^{[n]}(c)$ с нечетным k представляется разностью двух положительных сумм:

$$e^c \cdot P_k^{[n]}(c) = \left(1 + \sum_{j=1}^m \frac{m(m-1) \cdots (m-j+1)}{n(n-1) \cdots (n-j+1)} \frac{c^j}{j!} \right) - \frac{m!}{n!} c^{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n-m+j)!}{(n+j+1)!} \frac{c^j}{j!}.$$

Первая из этих сумм, очевидно, > 1 при всех $c > 0$, поэтому для доказательства положительности $P_k^{[n]}$ достаточно доказать, что вторая < 1 . С учетом $m \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{m!}{n!} c^{n+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n-m+j)!}{(n+j+1)!} \frac{c^j}{j!} &= \frac{c^{n+1}}{n!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdots (n-m+j)}{(m+1)(m+2) \cdots (n+j)} \frac{c^j}{j!(n+j+1)} \\ &< \frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(n-m+j+1)} \frac{c^j}{j!} < \frac{c^{n+1}}{(n+1)!(n-m+1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c^j}{j!} \\ &= \frac{c^{n+1} e^c}{(n+1)!(k+1)}. \end{aligned}$$

Оценим последнее с помощью формулы Стирлинга (2.6) при $c = h = (n+1)/4$:

$$\frac{h^{n+1} e^h}{(n+1)!(k+1)} < \frac{h^{4h} e^{5h}}{2\sqrt{8\pi h} \cdot (4h)^{4h}} < \frac{1}{2\sqrt{8\pi h}} \left(\frac{e^5}{4^4} \right)^h < \frac{(0.6)^h}{2\sqrt{8\pi h}} < 1, \quad h \geq 0.5, \quad k \geq 1.$$

Мы доказали положительность значений полиномов $P_k^{[n]}$ с нечетными k в точке $h = (n+1)/4$. Но поскольку эти полиномы монотонно убывают при $c > 0$, то тем самым доказана их положительность на всем отрезке $[0, (n+1)/4]$. Лемма доказана.

4. Доказательство леммы 2. Фиксируем произвольно постоянную $c > 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу об интерполяции постоянной функции $f_1(y) = c_1 = 2c > 0$ по узлам $y_k \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$, посредством НД $H'(y)/H(y)$ порядка n . Подстановкой $y = (x+1)/2$, $H(y) = Q(x)$ задача преобразуется в первоначальную – об интерполяции постоянной $f(x) = c$ по узлам $x_k = 2y_k - 1 \in [-1, 1]$, $k = 1, \dots, n$, посредством НД $Q'(x)/Q(x)$ того же порядка n (ср. замечание 1.2).

Согласно (2.3), полином $H(y)$ может быть представлен в виде

$$H(y) = [a_0(n; c_1; \eta) + \hat{\Pi}(\tau_1)(e^{-c_1 y} - 1)]e^{c_1 y}, \quad \hat{\Pi}(t) = (t - y_1) \cdots (t - y_n), \quad (4.1)$$

где $\eta = \{y_k \in [0, 1]\}_{k=1}^n$ – набор узлов интерполяции, τ_1 – точка между 0 и y , а свободный член a_0 определяется по формуле (2.2).

Обозначим через m минимальное среди неотрицательных целых, не меньших $4c_1 - 1$. Ясно, что $m = m(c_1) = N(c) - 1$. Верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого набора $w = \{y_k \in [0, 1]\}_{k=1}^m$ имеем $a_0(m; c_1; w) > 0$.

Действительно, согласно формуле (2.2)

$$a_0(m; c_1; w) = c_1^{-m} m! S_m(c_1; w), \quad S_m(c_1; w) = \sum_{j=0}^m (-c_1)^j \sigma_j(w) \frac{(m-j)!}{m!}.$$

Функция $S_m(c_1; w)$ гармоническая относительно переменных y_k ; следовательно, своих экстремумов в кубе $[0, 1]^m$ она достигает на его границе. Более того, очевидно,

что экстремумы обязательно достигаются в угловых точках, т.е. в точках с координатами $y_k \in \{0; 1\}$. При этом, в силу симметрии, достаточно рассмотреть $m+1$ угловых точек $A_0^{[m]}, A_1^{[m]}, \dots, A_m^{[m]}$ таких, что первые k из m координат точки $A_k^{[m]}$ равны 1, а остальные равны 0, например, $A_m^{[m]} = \{1, 1, \dots, 1\}$. Докажем, что во всех этих точках функция S_m (а с ней и a_0) положительна.

Нетрудно видеть, что $\sigma_j(A_k^{[m]}) = C_k^j$ при $j \leq k$ и $\sigma_j(A_k^{[m]}) = 0$ при $j > k$, поэтому

$$S_m(c_1; A_0^{[m]}) \equiv 1 > 0,$$

$$S_m(c_1; A_k^{[m]}) = 1 + \sum_{j=1}^k \frac{(-c_1)^j C_k^j}{m(m-1) \cdots (m-j+1)}, \quad 1 \leq k \leq m;$$

в частности, каждая величина $S_m(c_1; A_k^{[m]})$ – полином степени k относительно c_1 . Простое преобразование показывает, что $S_m(c_1; A_k^{[m]}) \equiv P_k^{[m]}(c_1)$ (см. п. 2) для всех $1 \leq k \leq m$. Но $P_k^{[m]}(t) > 0$ при $t \in [0, (m+1)/4]$ по лемме 1. Следовательно, имеем $S_m(c_1; A_k^{[m]}) > 0$ для всех $1 \leq k \leq m$, так как $c_1 \leq (m+1)/4$ по определению m . Тем самым, предложение 1 доказано. С его помощью докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При $n = m+1$ для любого набора $\eta = \{y_k \in [0, 1]\}_{k=1}^n$ верно

$$a_0(n; c_1; \eta) \geq n! c_1^{-n} E_n(-c_1) \geq 3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим выполнение неравенства $n! c_1^{-n} E_n(-c_1) \geq 3$. При $n = 1$ имеем $c_1 \leq n/4 = 1/4$ (так как $n = m+1 \geq 4c_1$) и

$$n! c_1^{-n} E_n(-c_1) = c_1^{-1}(1 - c_1) = c_1^{-1} - 1 \geq 4 - 1 = 3.$$

Пусть $n > 1$. Из (2.5), (2.6), $n \geq 4c_1 > 0$ и $n \geq 2$ получаем

$$n! c_1^{-n} E_n(-c_1) > \frac{n!}{c_1^n e^{c_1}} - \frac{c_1}{n+1} > \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^{c_1}} \left(\frac{n}{ec_1} \right)^n - \frac{1}{4} \geq \sqrt{2\pi n} \left(\frac{4}{e^{1.25}} \right)^n - \frac{1}{4} \geq 4 > 3.$$

Теперь докажем оценку $a_0 \geq n! c_1^{-n} E_n(-c_1)$. Ввиду формулы (2.2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ очевидны тождества

$$(a_0(n; c_1; \eta))'_{y_k} \equiv -c_1 \cdot a_0(n-1; c_1; \eta_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

где η_k получается из η выбрасыванием компоненты y_k . При $n = m+1$ отсюда и из положительности $a_0(m; c_1; w)$ (см. предложение 1) следует, что функция $a_0(m+1; c_1; y_1, \dots, y_{m+1})$ строго монотонно убывает по каждому из переменных $y_1, \dots, y_{m+1}$, и потому верна оценка $a_0(m+1; c_1; \eta) \geq a_0(m+1; c_1; A)$, где $A = \{1, 1, \dots, 1\} \in [0, 1]^{m+1}$, а $\eta \in [0, 1]^{m+1}$ произвольно. Остается заметить, что

$$a_0(m+1; c_1; A) \equiv (m+1)! c_1^{-m-1} E_{m+1}(-c_1).$$

Предложение 2 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При $n = m+1$ полином $H(y)$ (см. (4.1)) положителен на отрезке $y \in [0, 1]$, каким бы ни был набор $\eta = \{y_k \in [0, 1]\}_{k=1}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, квадратная скобка в (4.1) положительна в условиях предложения, так как $a_0 \geq 3$ по предложению 2, а

$$|\hat{\Pi}(\tau_1)(e^{-c_1 y} - 1)| \leq 1 - e^{-c_1} < 1,$$

если $y \in [0, 1]$.

Из предложений 1, 2, 3 извлечем некоторые оценки применительно к исходной задаче интерполяции постоянной функции $f(x) = c > 0$ на отрезке $[-1, 1]$. Напомним, что $c = c_1/2$, поэтому целое $m = N(c) - 1 \geq \max\{0; 8c - 1\}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого набора $w = \{x_k \in [-1, 1]\}_{k=1}^{m+1}$ имеем $a_0(m+1; c; w) > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, пусть $n = m + 1$. По предложению 3 полином $H(y)$ положителен на отрезке $y \in [0, 1]$ при любом наборе узлов $\eta = \{y_k \in [0, 1]\}_{k=1}^{m+1}$. С другой стороны (см. выше), $H(y) = Q(x)$, где $y = (x+1)/2$. Значит, $Q(x) > 0$ на отрезке $x \in [-1, 1]$, каким бы ни был набор узлов $w = \{x_k \in [-1, 1]\}_{k=1}^{m+1}$; в частности, необходимо положителен его свободный член $a_0(m+1; c; w)$, что и требовалось.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для каждого целого $n > N(c) = m + 1 \geq 8c$ имеет место оценка

$$a_0(n; c; \xi) \geq n! c^{-n} E_n(-c) > 0, \quad (4.2)$$

каким бы ни был набор $\xi = \{x_k \in [-1, 1]\}_{k=1}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, во-первых, $E_n(-c) > 0$, так как $E_n(-c) \equiv P_n^{[n]}(c)$, а полиномы $P_n^{[n]}$ по лемме 1 положительны при $0 \leq c \leq (n+1)/8$ и, в частности, при $0 \leq c \leq (m+1)/8$. Далее, оценка $a_0 \geq n! c^{-n} E_n(-c)$ при $n = m + 2$ доказывается с помощью следствия 1 точно так же, как предложение 2 было доказано с помощью предложения 1. Для $n = m + 3, m + 4, \dots$ эта оценка получается по индукции с учетом того, что на каждом предыдущем шаге уже доказана положительность $a_0(n-1; c; \cdot)$.

Перейдем к доказательству оценок из леммы. Рассмотрим представление (2.3) полинома Q . Для $x \in [-1, 1]$ имеем, очевидно,

$$|\Pi(\tau) \cdot (e^{-cx} - 1)| \leq 2^n \cdot (e^c - 1).$$

Отсюда и из (2.3), (4.2) сразу следует нижняя оценка в (2.10):

$$\begin{aligned} Q(x) &\geq e^{-c}(a_0 - |\Pi(\tau) \cdot (e^{-cx} - 1)|) \geq e^{-c} c^{-n} n! \left(E_n(-c) - \frac{(2c)^n \cdot (e^c - 1)}{n!} \right) \\ &= e^{-2c} c^{-n} n! v_n(c) > 0, \quad x \in [-1, 1], \quad n > m + 1 \geq 8c. \end{aligned}$$

В случае интерполяции по узлам Чебышёва β имеем $\Pi(x) \equiv \tilde{T}_n(x)$, где $\tilde{T}_n$ – унитарный полином степени n , наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$ (об аппроксимативных свойствах многочленов Чебышёва см., например, [14]). Известно, что $\max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_n(x)| = 2^{1-n}$, поэтому сразу получаем нижнюю оценку (2.11):

$$\begin{aligned} Q(x) &\geq e^{-c} c^{-n} n! \left(E_n(-c) - \frac{c^n \cdot (e^c - 1)}{2^{n-1} n!} \right) \\ &= e^{-2c} c^{-n} n! V_n(c), \quad x \in [-1, 1], \quad n > N(c). \end{aligned}$$

С помощью формулы (2.3) аналогично получаем промежуточную оценку сверху:

$$\begin{aligned} Q(x) &= a_0 e^{cx} + \Pi(\tau)(1 - e^{cx}) \leq a_0 e^{cx} + |\tilde{T}_n(\tau)(1 - e^{cx})| \\ &\leq a_0 e^c + 2^{1-n}(e^c - 1), \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Как известно, на узлах Чебышёва (1.1) элементарные симметрические многочлены σ_k (см. п. 2) с нечетными номерами k равны нулю, поэтому в сумме из выражения (2.2) свободного члена a_0 остаются только слагаемые при четных степенях c . Для четных k верно $|\sigma_k| < C_n^k$, так как все $\beta_j \in [-1, 1]$. Получаем оценку a_0 сверху (ср. [3]):

$$a_0(n; c; \beta) < c^{-n} \sum_{j=0}^{[n/2]} c^{2j} (n-2j)! |\sigma_{2j}| < c^{-n} \sum_{j=0}^{[n/2]} c^{2j} \frac{n!}{(2j)!} < c^{-n} n! \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c^{2j}}{(2j)!} = c^{-n} n! \operatorname{ch} c$$

(здесь $[n/2]$ – целая часть от $n/2$). Применяя ее в найденной выше верхней оценке полинома $Q(x)$, получаем искомую верхнюю оценку (2.11):

$$Q(x) \leq e^c c^{-n} n! \operatorname{ch} c + 2^{1-n} e^c (1 - e^{-c}) = e^c c^{-n} n! \operatorname{ch} c \cdot W_n(c), \quad x \in [-1, 1].$$

Лемма 2 полностью доказана.

5. Доказательство теоремы об интерполяции. Считаем $n > N(c)$. Для доказательства оценок (1.2) воспользуемся тождеством, очевидно справедливым по самому определению задачи интерполяции:

$$\frac{Q'(x)}{Q(x)} - c \equiv -\frac{c\Pi(x)}{Q(x)}, \quad \Pi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n), \quad x_k \in [-1, 1]. \quad (5.1)$$

Модуль полинома $\Pi(x)$ на отрезке $[-1, 1]$ оценивается сверху величиной 2^n , поэтому верхняя оценка в (1.2) сразу вытекает из тождества (5.1) и нижней оценки в (2.10). Заметим, что (единственная) НД n -кратной интерполяции константы c по узлу $x = a$ может быть представлена в виде $r_n(x; a) = cE_{n-1}(c(x-a))/E_n(c(x-a))$ (полином E_n определен в п. 2), поскольку, как легко видеть,

$$r_n(x; a) - c = -\frac{c^{n+1}(x-a)^n}{n! E_n(c(x-a))}.$$

Отсюда следует, что порядок верхней оценки в (1.2) достигается, например, в точке $x = -1$ при n -кратной интерполяции в единице:

$$|r_n(-1; 1) - c| = \frac{c^{n+1} 2^n}{n! E_n(-2c)}.$$

Докажем нижнюю оценку в (1.2). Используя тождество (5.1), верхнюю оценку (2.10) и свойства многочлена Чебышёва $\tilde{T}_n$, получим нижнюю оценку в (1.2):

$$\Delta_n(c, \xi) = \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{c\Pi(x)}{Q(x)} \right| \geq \frac{c^{n+1}}{n! e^{2c}} \cdot \max_{x \in [-1, 1]} |\Pi(x)| \geq \frac{c^{n+1}}{n! e^{2c}} \cdot \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{c^{n+1}}{n! 2^{n-1} e^{2c}}.$$

Порядок этой оценки достигается, например, при интерполяции по набору β узлов Чебышёва. Действительно, в этом случае имеем $Q(x) \geq e^{-2c} c^{-n} n! V_n(c) > 0$ (см. (2.11)) и $\Pi(x) \equiv \tilde{T}_n(x)$, поэтому верна двусторонняя оценка

$$\frac{c^{n+1}}{n! 2^{n-1} e^{2c}} \leq \Delta_n(c, \beta) = \max_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{c \tilde{T}_n(x)}{Q(x)} \right| \leq \frac{c^{n+1} e^{2c}}{n! V_n(c)} \cdot \max_{x \in [-1, 1]} |\tilde{T}_n(x)| = \frac{c^{n+1} e^{2c}}{2^{n-1} n! V_n(c)},$$

доставляющая (ввиду совпадения порядков мажоранты и миноранты) точный порядок сходимости в случае узлов Чебышёва и показывающая, что нижняя оценка в (1.2) точна по порядку. Кроме того, мы доказали верхнюю оценку в (1.3). Нижняя оценка (1.3) доказывается с помощью верхней оценки (2.11).

Докажем, что полюсы дроби $R_n(c, \xi; \cdot)$ лежат вне круга $|z| \leq 1.2$. Как функция комплексного переменного z , эта дробь имеет тот же вид, что и выше:

$$R_n = \frac{Q'}{Q}, \quad Q(z) = \left(a_0 - c \int_0^z e^{-ct} \Pi(t) dt \right) e^{cz}, \quad \Pi(z) = (z - x_1) \dots (z - x_n),$$

где $x_k \in [-1, 1]$ – узлы интерполяции, а интеграл вычисляется по любому спрямляемому контуру, соединяющему точки 0 и z . Если $z = x + iy$ – точка круга $|z| \leq 1.2$, а интегрирование ведется по отрезку $\overrightarrow{0, z}$, то $|e^{cz}| = e^{cx} \geq e^{-1.2c}$, $|\Pi(z)| \leq 2.2^n$,

$$\left| c \int_0^z e^{-ct} \Pi(t) dt \right| \leq c e^{1.2c} \cdot 2.2^n \cdot |\overrightarrow{0, z}| \leq 1.2 c e^{1.2c} \cdot 2.2^n.$$

Отсюда и из оценки (4.2) по аналогии с доказательством леммы 2 следует искомое неравенство $|Q(z)| > 0$ для $n > N(c)$, $|z| \leq 1.2$. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Данченко, Д. Я. Данченко, “О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов”, *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы*, Материалы школы-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова, Казань, 1999, 74–77.
- [2] О. Н. Косухин, “Об аппроксимативных свойствах наипростейших дробей”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2001, № 4, 54–59.
- [3] Е. Н. Кондакова, “Интерполяция наипростейшими дробями”, *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **9:2** (2009), 30–37.
- [4] В. И. Данченко, Е. Н. Кондакова, “Критерий возникновения особых узлов при интерполяции наипростейшими дробями”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **278**, МАИК, М., 2012, 49–58.
- [5] В. И. Данченко, Е. Н. Кондакова, “Чебышевский альтернанс при аппроксимации констант наипростейшими дробями”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **270**, МАИК, М., 2010, 86–96.
- [6] М. А. Комаров, “Примеры, связанные с наилучшим приближением наипростейшими дробями”, *Проблемы матем. анализа*, **65** (2012), 119–131.
- [7] М. А. Комаров, “О неединственности наипростейшей дроби наилучшего равномерного приближения”, *Изв. вузов. Матем.*, 2013, № 9, 28–37.
- [8] М. А. Комаров, “Критерий наилучшего приближения констант наипростейшими дробями”, *Матем. заметки*, **93:2** (2013), 209–215.
- [9] М. А. Комаров, “Критерий наилучшего равномерного приближения наипростейшими дробями в терминах альтернанса”, *Изв. РАН. Сер. матем.* (в печати).

- [10] М. А. Комаров, “On the Analog of Chebyshev Theorem for Simple Partial Fractions”, *Комплексный анализ и его приложения*, Материалы VII Петрозаводской международной конференции, Петрозаводск, 2014, 65–69.
- [11] М. А. Комаров, “К задаче о единственности наипростейшей дроби наилучшего приближения”, *Проблемы матем. анализа*, **56** (2011), 63–82.
- [12] М. А. Комаров, “О достаточном признаке наилучшего равномерного приближения наипростейшими дробями”, *Проблемы матем. анализа*, **68** (2013), 133–139.
- [13] A. J. Macintyre, W. H. J. Fuchs, “Inequalities for the logarithmic derivatives of a polynomial”, *J. London Math. Soc.* (3), **15** (1940), 162–168.
- [14] Н. С. Бахвалов, *Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения)*, Наука, М., 1973.
- [15] Н. Н. Лебедев, *Специальные функции и их приложения*, Физматлит, М.–Л., 1963.
- [16] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.

М. А. Комаров

Владимирский государственный университет

им. А. Г. и Н. Г. Столетовых

E-mail: kami9@yandex.ru

Поступило

24.02.2014

Исправленный вариант

21.10.2014