Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Шахова, Абсолютно замкнутые группы в классе 2-ступенно нильпотентных групп без кручения, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 936–941

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:14:59

Абсолютно замкнутые группы в классе 2-ступенно нильпотентных групп без кручения

С. А. Шахова

Доказано, что полные группы и только они являются абсолютно замкнутыми (относительно оператора доминиона) в классе 2-ступенно нильпотентных групп без кручения. Установлено, что аддитивная группа рациональных чисел является 1-замкнутой в произвольном квазимногообразии нильпотентных групп без кручения и 3-замкнутой в произвольном квазимногообразии 2-ступенно нильпотентных групп без кручения.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10471

1. Введение. Для произвольного квазимногообразия $\mathfrak{M}$ групп, группы G из $\mathfrak{M}$ и ее подгруппы H определим, следуя [1], [2], множество $\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(H)$, называемое *доминионом* подгруппы H группы G в квазимногообразии $\mathfrak{M}$, следующим образом:

$$\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(H) = \{g \in G \mid \forall M \in \mathfrak{M} \forall \varphi, \psi: G \rightarrow M \text{ если } \varphi|_H = \psi|_H, \text{ то } \varphi(g) = \psi(g)\},$$

где $\varphi, \psi: G \rightarrow M$ – гомоморфизмы группы G в группу M ; $\varphi|_H, \psi|_H$ – сужение гомоморфизмов φ, ψ на подгруппу H ; $\varphi(g), \psi(g)$ – образы элемента g при φ, ψ .

Существует тесная связь понятия доминиона со свободными произведениями и амальгамами [2]–[4], а именно,

$$\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(H) = G^\lambda \cap G^\rho,$$

где $\lambda, \rho: G \rightarrow G *_H^{\mathfrak{M}} G$ – естественные вложения группы G в свободное в квазимногообразии $\mathfrak{M}$ произведение изоморфных копий группы G с объединенной подгруппой H .

Строение доминионов групп изучалось в различных классах групп: абелевых [5], [6], нильпотентных [7]–[9], метабелевых [10].

Группа $H \in \mathfrak{M}$ называется *абсолютно замкнутой* в $\mathfrak{M}$, если $\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(H) = H$ для любой группы G из $\mathfrak{M}$, содержащей H в качестве подгруппы.

Согласно [7] группа $H \in \mathfrak{M}$ называется *n -замкнутой* в $\mathfrak{M}$, если $\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(H) = H$ для любой группы $G = \text{gr}(H, a_1, \dots, a_n)$ из $\mathfrak{M}$, содержащей H и порожденной по модулю H подходящими n элементами $a_1, \dots, a_n$.

Настоящая работа посвящена исследованию групп, абсолютно замкнутых в квазимногообразиях нильпотентных групп без кручения. Доказано, что полные группы

и только они абсолютно замкнуты в квазимногообразии 2-ступенно нильпотентных групп без кручения. Это является частичным решением проблемы 17.34 из Коуровской тетради [11], поставленной Будкиным, для случая ступени нильпотентности ≤ 2 . Кроме того, в работе установлено, что аддитивная группа рациональных чисел 1-замкнута в произвольном квазимногообразии нильпотентных групп без кручения и 3-замкнута в произвольном квазимногообразии 2-ступенно нильпотентных групп без кручения.

Используемые в работе обозначения и сведения из теории групп можно найти в [12], [13], а из теории квазимногообразий групп – в [14]–[16].

2. Предварительные замечания. В леммах 1–3 $\mathfrak{M}$ – произвольное квазимногообразие групп. Утверждение леммы 1 легко вытекает из определения доминиона.

ЛЕММА 1. Если $G \in \mathfrak{M}$, $H \leq A \leq G$, то

$$\text{dom}_A^{\mathfrak{M}}(H) \subseteq \text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(H).$$

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел. Группа G называется *полной*, если для любых $g \in G$ и $n \in \mathbb{N}$ уравнение $x^n = g$ имеет в G хотя бы одно решение.

ЛЕММА 2. Пусть $G \in \mathfrak{M}$, $H \leq G$, H – полная группа, $H \cap G' = (1)$, где G' – коммутант группы G . Тогда

$$\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(H) = H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\tau: G \rightarrow G/G'$. Поскольку $\tau(H)$ – полная группа, то она выделяется в G/G' прямым сомножителем. Так как

$$\tau(H) = HG'/G' \cong H/H \cap G' \cong H,$$

то сужение τ_H гомоморфизма τ на подгруппу H является изоморфным вложением H в G/G' , при котором $\tau_H(h) = hG'$ для любого элемента $h \in H$. Пусть $\pi: G/G' \rightarrow \tau(H) \leq G/G'$ – проекция на прямой сомножитель $\tau(H)$ в разложении группы G/G' . Возникла цепочка гомоморфизмов

$$G \xrightarrow{\tau} G/G' \xrightarrow{\pi} \tau(H) \xrightarrow{\tau_H^{-1}} H \leq G.$$

В силу равенств

$$\tau_H^{-1} \pi \tau(h) = \tau_H^{-1}(\pi(\tau(h))) = \tau_H^{-1}(\pi(hG')) = \tau_H^{-1}(hG') = h$$

произведение $\tau_H^{-1} \pi \tau$ гомоморфизмов является эндоморфизмом группы G на подгруппу H , тождественным на H , т.е. подгруппа H – ретракт группы G .

Пусть 1_G – тождественный автоморфизм группы G . Имеем

$$\tau \pi \tau_H^{-1}|_H = 1_G|_H, \quad \tau \pi \tau_H^{-1}(g) \neq 1_G(g)$$

для любого элемента $g \in G$, $g \notin H$. Значит, $\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(H) = H$.

ЛЕММА 3. Если $G \in \mathfrak{M}$, $K \leq H \leq G$, $K \triangleleft G$, $G/K \in \mathfrak{M}$, $\text{dom}_{G/K}^{\mathfrak{M}}(H/K) = H/K$, то $\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(H) = H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через τ естественный гомоморфизм $\tau: G \rightarrow G/K$. Для произвольного элемента $g \in G$, $g \notin H$ выполнено $\tau(g) \notin H/K$. По условию леммы найдутся группа $M \in \mathfrak{M}$ и гомоморфизмы $\varphi, \psi: G/K \rightarrow M$ такие, что

$$\varphi|_{H/K} = \psi|_{H/K}, \quad \varphi(\tau(g)) \neq \psi(\tau(g)).$$

Поскольку $\varphi\tau|_H = \psi\tau|_H$, то, принимая во внимание последнее неравенство, получаем $\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(H) = H$. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{N}_{c,\infty}$ квазимногообразие групп без кручения ступени нильпотентности $\leq c$, где c – фиксированное натуральное число.

ЛЕММА 4. Пусть $G \in \mathfrak{N}_{c,\infty}$, $G = \text{gr}(a, H)$. Если H – полная абелева группа, то G' – полная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму индукцией по c . Предположим, что лемма верна для $c = k - 1$. Пусть $G \in \mathfrak{N}_{k,\infty}$, $G = \text{gr}(a, H)$, H – полная абелева группа.

Обозначим через $\gamma_k G$ k -й член нижнего центрального ряда группы G , $Z(G)$ – центр группы G . По лемме 17.2.1 [12] $\gamma_k G$ порождается простыми коммутаторами веса k от элементов из множества $\{a, h \mid h \in H\}$ порождающих группы G . Поскольку H – полная группа, то в силу свойства линейности коммутатора веса k в группе G из каждого простого коммутатора веса k можно извлечь корень произвольной степени. Учитывая, что $\gamma_k G \subseteq Z(G)$, получаем, что $\gamma_k G$ – полная группа.

Введем обозначения $\overline{G} = G/\gamma_k G$, $\overline{g}$ – образ элемента g при естественном гомоморфизме $G \rightarrow \overline{G}$. Поскольку $\overline{G} \in \mathfrak{N}_{k-1,\infty}$ и $H\gamma_k G/\gamma_k G$ – полная абелева группа, то по предположению индукции $\overline{G}'$ – полная группа. Таким образом, для произвольных $g \in G'$ и $m \in \mathbb{N}$ найдется $g_1 \in G'$ такой, что $\overline{g} = \overline{g}_1^m$. Отсюда $g = g_1^m f$ для некоторого $f \in \gamma_k G$. Так как $\gamma_k G$ – полная группа и $\gamma_k G \subseteq Z(G)$, то найдется $f_1 \in \gamma_k G$ такой, что $f = f_1^m$, и $g = (g_1 f_1)^m$. Лемма доказана.

При доказательстве основных результатов потребуется следующий факт: если фактор-группа по коммутанту нильпотентной группы G полная, то группа G и все члены ее нижнего центрального ряда являются также полными. Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [17].

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Полные группы и только они абсолютно замкнуты в квазимногообразии $\mathfrak{N}_{2,\infty}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – абсолютно замкнута в $\mathfrak{N}_{c,\infty}$. Докажем, что она полная. Предположим, что для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $g \in G$ уравнение $x^n = g$ не имеет решений в G . Обозначим через $\sqrt[n]{g}$ решение уравнения $x^n = g$ в группе $\sqrt[n]{G} \in \mathfrak{N}_{c,\infty}$, являющейся мальцевским пополнением группы G .

Пусть $\varphi, \psi: \sqrt[n]{G} \rightarrow M \in \mathfrak{N}_{c,\infty}$ – произвольные гомоморфизмы, совпадающие на G . Тогда имеют место равенства

$$(\varphi(\sqrt[n]{g}))^n = \varphi(g) = \psi(g) = (\psi(\sqrt[n]{g}))^n.$$

По теореме 16.2.8 [12] в нильпотентных группах без кручения извлечение корней – однозначная операция. Отсюда вытекает равенство $\varphi(\sqrt[n]{g}) = \psi(\sqrt[n]{g})$. Значит,

$$\sqrt[n]{g} \in \text{dom}_{\sqrt[n]{G}}^{\mathfrak{N}_{c,\infty}}(G), \quad \text{dom}_{\sqrt[n]{G}}^{\mathfrak{N}_{c,\infty}}(G) \neq G,$$

что противоречит предположению относительно G .

Докажем теперь, что любая полная группа $H \in \mathfrak{N}_{2,\infty}$ является абсолютно замкнутой в $\mathfrak{N}_{2,\infty}$, т.е. $\text{dom}_G^{\mathfrak{N}_{2,\infty}}(H) = H$ для любой группы G из $\mathfrak{N}_{2,\infty}$, содержащей H в качестве подгруппы. По лемме 1 достаточно доказать равенство $\text{dom}_{\sqrt[G]{G}}^{\mathfrak{N}_{2,\infty}}(H) = H$. Поэтому в дальнейших рассуждениях будем полагать, что G – полная группа. Согласно приведенному выше утверждению из [17] о полноте членов нижнего центрального ряда G' и $G' \cap H$ – полные группы. Значит, $G/G' \cap H \in \mathfrak{N}_{2,\infty}$.

Введем обозначения

$$\bar{G} = G/G' \cap H, \quad \bar{H} = H/G' \cap H.$$

Покажем, что $\bar{G}' \cap \bar{H} = (\bar{1})$. Действительно, пусть $\bar{g} \in \bar{G}' \cap \bar{H}$. Тогда $\bar{g} = \bar{h}$, где $g \in G'$, $h \in H$. Отсюда $g^{-1}h \in G' \cap H$. Значит, $g \in H$, $\bar{g} = \bar{e}$. По лемме 2 $\text{dom}_{\bar{G}}^{\mathfrak{N}_{2,\infty}}(\bar{H}) = \bar{H}$. По лемме 3 получаем $\text{dom}_G^{\mathfrak{N}_{2,\infty}}(H) = H$. Теорема доказана.

Фактически при доказательстве теоремы 1 установлено, что для любого натурального s верно следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Абсолютно замкнутая в квазимногообразии $\mathfrak{N}_{c,\infty}$ группа является полной.

В [7] доказано, что полная абелева группа 1-замкнута в произвольном квазимногообразии $\mathfrak{M}$ нильпотентных ступени ≤ 2 групп без кручения. Оказывается, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Аддитивная группа Q рациональных чисел

- 1) 1-замкнута в произвольном квазимногообразии нильпотентных групп без кручения;
- 2) 3-замкнута в произвольном квазимногообразии нильпотентных ступени ≤ 2 групп без кручения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1) зафиксируем $s \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное квазимногообразие нильпотентных групп без кручения, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_{c,\infty}$, $Q \leq G \in \mathfrak{M}$, $G = \text{gr}(a, Q)$ для некоторого элемента a группы G .

Предположим для начала, что G – абелева группа. Известно (см., например, [16], [18]), что существует единственное нетривиальное квазимногообразие абелевых групп без кручения – квазимногообразие, порожденное бесконечной циклической группой. Поскольку G/Q – абелева группа без кручения, то G/Q содержится в этом квазимногообразии. Следовательно, $G/Q \in \mathfrak{M}$, и $\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(Q) = Q$.

Пусть теперь G – неабелева группа. Ввиду леммы 2 достаточно рассмотреть случай, когда $Q \cap G' \neq (1)$. По лемме 4 G' – полная группа. Так как Q – абелева группа ранга 1, то в силу однозначности извлечения корня получаем включение $Q \subseteq G'$. По теореме 16.2.5 [12] коммутант нильпотентной группы содержится в подгруппе Фраттини. Значит, $G = (a)$. Это противоречит предположению о неабелевости группы G , и случай $Q \cap G' \neq (1)$ невозможен. Утверждение 1) теоремы доказано.

Докажем утверждение 2). Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольное квазимногообразие нильпотентных ступени ≤ 2 групп без кручения, $Q \leq G \in \mathfrak{M}$, $G = \text{gr}(a, b, c, Q)$, $\sqrt[G]{G}$ – мальцевское пополнение группы G . Тогда

$$\sqrt[G]{G} \in \mathfrak{N}_{2,\infty}, \quad \sqrt[G]{G} = \text{gr}(\sqrt[k]{g} \mid g \in G, k \in \mathbb{N})$$

и произвольный элемент $v \in \sqrt{G}$ представляется в виде $v = \sqrt[k]{g_1} \cdots \sqrt[k]{g_m}$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $g_i \in G$, $i = 1, \dots, m$. Покажем, что $\sqrt{G} \in \mathfrak{M}$.

Согласно [19] квазимногообразие $\mathfrak{M}$ задается в $\mathfrak{N}_{2,\infty}$ коммутаторными квазитождествами. Пусть Φ – одно из них,

$$\Phi = (\forall x_1) \dots (\forall x_n) \left(\bigwedge_{i \in I} r_i(x_1, \dots, x_n) = 1 \rightarrow r(x_1, \dots, x_n) = 1 \right),$$

где r_i, r – слова из коммутанта свободной группы. Предположим, что при некоторой интерпретации $\tau: \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \sqrt{G}$ левая часть квазитождества Φ истинна, т.е. $r_i(\tau(x_1), \dots, \tau(x_n)) = 1$ для всех $i \in I$. Так как $\tau(x_i) = v_i(\sqrt[k]{g_1}, \dots, \sqrt[k]{g_m})$, $i = 1, \dots, n$, для подходящего $k \in \mathbb{N}$ и элементов $g_1, \dots, g_m \in G$, то верны равенства

$$\begin{aligned} r_i^{k^2}(\tau(x_1), \dots, \tau(x_n)) &= r_i^{k^2}(v_1(\sqrt[k]{g_1}, \dots, \sqrt[k]{g_m}), \dots, v_n(\sqrt[k]{g_1}, \dots, \sqrt[k]{g_m})) \\ &= r_i(v_1(g_1, \dots, g_m), \dots, v_n(g_1, \dots, g_m)) = 1. \end{aligned}$$

Поскольку Φ истинно в группе G , то

$$r(v_1(g_1, \dots, g_m), \dots, v_n(g_1, \dots, g_m)) = 1 = r^{k^2}(\tau(x_1), \dots, \tau(x_n)).$$

Значит, $r(\tau(x_1), \dots, \tau(x_n)) = 1$, квазитождество Φ истинно в группе $\sqrt{G}$, $\sqrt{G} \in \mathfrak{M}$.

По лемме 1 достаточно доказать, что $\text{dom}_{\sqrt{G}}^{\mathfrak{M}}(Q) = Q$. Поэтому в дальнейших рассуждениях можно считать, что

$$G = \text{gr}(\sqrt[k]{a}, \sqrt[k]{b}, \sqrt[k]{c}, Q \mid k \in \mathbb{N}).$$

Если $Q \cap G' = (1)$, то по лемме 2 $\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(Q) = Q$. Пусть $Q \cap G' \neq (1)$. В силу приведенного выше факта из [17] о полноте членов нижнего центрального ряда полной нильпотентной группы G' – полная группа. Значит, $Q \leq G'$, $Q \triangleleft G$. Покажем, что $G/Q \in \mathfrak{M}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим подгруппы $G_n = \text{gr}(\sqrt[n]{a}Q, \sqrt[n]{b}Q, \sqrt[n]{c}Q)$ группы G/Q . Ясно, что $G/Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$.

Предположим, что $G/Q \notin \mathfrak{M}$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $G_n \notin \mathfrak{M}$. Обозначим через $\mathfrak{N}_2$ многообразие нильпотентных ступени ≤ 2 групп, $F_2(\mathfrak{N}_2)$ – свободная в $\mathfrak{N}_2$ группа ранга 2, $qF_2(\mathfrak{N}_2)$ – квазимногообразие, порожденное группой $F_2(\mathfrak{N}_2)$. Тогда $G_n \notin qF_2(\mathfrak{N}_2)$.

Пусть $G_n = \text{gr}(x_1, x_2, x_3 \mid R_1 = 1, \dots, R_m = 1)$ – представление группы G_n в многообразии $\mathfrak{N}_2$. Поскольку $G_n \notin qF_2(\mathfrak{N}_2)$, то пересечение всех нормальных подгрупп N группы G_n таких, что $G_n/N \in qF_2(\mathfrak{N}_2)$, не равно (1) . Обозначим через $R = R(x_1, x_2, x_3)$ произвольное групповое слово, значение которого на порождающих x_1, x_2, x_3 группы G_n – неединичный элемент из этого пересечения. Легко видеть, что квазитождество

$$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(R_1 = 1 \& \dots \& R_m = 1 \rightarrow R = 1)$$

ложно в G_n и истинно в $F_2(\mathfrak{N}_2)$. Однако согласно [20] не существует квазимногообразий нильпотентных групп ступени ≤ 2 без кручения, имеющих аксиоматический ранг 3, т.е. квазимногообразий, которые задаются квазитождествами от трех переменных и не могут быть заданы квазитождествами от меньшего числа переменных. Полученное противоречие показывает, что $G/Q \in \mathfrak{M}$. Значит, $\text{dom}_G^{\mathfrak{M}}(Q) = Q$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает искреннюю признательность А.И. Будкину за обсуждение результатов и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. R. Isbell, “Epimorphisms and dominions”, *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra*, Springer, New York, 1966, 232–246.
- [2] A. Budkin, “Dominions in quasivarieties of universal algebras”, *Studia Logica*, **78**:1-2 (2004), 107–127.
- [3] P. M. Higgins, “Epimorphisms and amalgams”, *Colloq. Math.*, **56**:1 (1988), 1–17.
- [4] А. И. Будкин, “Решётки доминионов универсальных алгебр”, *Алгебра и логика*, **46**:1 (2007), 26–45.
- [5] С. А. Шахова, “О решётках доминионов в квазимногообразиях абелевых групп”, *Алгебра и логика*, **44**:2 (2005), 238–251.
- [6] С. А. Шахова, “Условия дистрибутивности решёток доминионов в квазимногообразиях абелевых групп”, *Алгебра и логика*, **45**:4 (2006), 484–499.
- [7] А. И. Будкин, “Доминионы универсальных алгебр и проективные свойства”, *Алгебра и логика*, **47**:5 (2008), 541–557.
- [8] A. Magidin, “Dominions in varieties of nilpotent groups”, *Comm. Algebra*, **28**:3 (2000), 1241–1270.
- [9] A. Magidin, “Absolutely closed nil-2 groups”, *Algebra Universalis*, **42**:1-2 (1999), 61–77.
- [10] А. И. Будкин, “О доминионах в квазимногообразиях метабелевых групп”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:3 (2010), 498–505.
- [11] *Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь*, 17-е изд., Ин-т матем. СО РАН, Новосибирск, 2010.
- [12] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, М., 1972.
- [13] А. Г. Курош, *Теория групп*, Лань, СПб., 2005.
- [14] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М., 1970.
- [15] В. А. Горбунов, *Алгебраическая теория квазимногообразий*, Сибирская школа алгебры и логики, **5**, Научная книга, Новосибирск, 1999.
- [16] А. И. Будкин, *Квазимногообразия групп*, Изд-во Алтайского ун-та, Барнаул, 2002.
- [17] А. И. Мальцев, “Нильпотентные группы без кручения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **13**:3 (1949), 201–212.
- [18] А. А. Виноградов, “Квазимногообразия абелевых групп”, *Алгебра и логика*, **4**:6 (1965), 15–19.
- [19] А. Н. Федоров, “Квазитожества свободной 2-нильпотентной группы”, *Матем. заметки*, **40**:5 (1986), 590–597.
- [20] Е. С. Половникова, “Об аксиоматическом ранге квазимногообразий”, *Сиб. матем. журн.*, **40**:1 (1999), 167–176.

С. А. Шахова

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

E-mail: sashakhova@gmail.com

Поступило

03.02.2014

Исправленный вариант

08.07.2014