Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Шашкин, Обобщение закона повторного логарифма для ассоциированных случайных полей, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 5, 769–781

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:08:50

Обобщение закона повторного логарифма для ассоциированных случайных полей

А. П. Шашкин

Доказывается вариант закона повторного логарифма для ассоциированных полей, при котором индексирующее множество для частных сумм может быть произвольным неограниченным. Дается явное значение верхнего предела в законе повторного логарифма в зависимости от структуры этого множества.

Библиография: 10 названий.

DOI: 10.4213/mzm10472

1. Постановка задачи. Закон повторного логарифма относится к традиционной области предельных теорем теории вероятностей. Он описывает точный порядок флуктуаций частных сумм случайных величин, образующих случайный процесс или поле. К фундаментальным относятся теоремы Хинчина, Колмогорова, Хартмана–Винтнера и Штрассена. Впоследствии появились аналоги этих классических результатов для зависимых систем, оценки скорости сходимости, а также были исследованы постановки задач, когда нормировка отличается от стандартной нормировки повторным логарифмом числа наблюдений [1]–[3]. Начиная с конца 1960-х гг., изучаются не только одно-, но и многопараметрические случайные системы. Так, например, для $d \geq 1$ и d -параметрического винеровского процесса $W = \{W_t, t \geq \mathbb{R}_+^d\}$ известно ([4], [5]), что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2\langle t \rangle \log \log \langle t \rangle}} = \sqrt{d} \quad \text{п.н.} \quad (1.1)$$

Здесь и далее $\langle t \rangle = t_1 \dots t_d$, $\log x = \ln(x \vee e)$, $x \geq 0$, а запись $t \rightarrow \infty$ для $t \in \mathbb{R}_+^d$ означает, что $t_1 \rightarrow \infty, \dots, t_d \rightarrow \infty$. В то же время легко видеть (пользуясь, например, законом повторного логарифма в форме Хартмана–Винтнера), что

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{W_{(s, \dots, s)}}{\sqrt{2s^d \log \log s^d}} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Справедливо и более общее утверждение, заключающееся в том, что для последовательности точек $t(k) \in \mathbb{R}_+^d$, $k \in \mathbb{N}$, для которой $t(k) \rightarrow \infty$ и $\langle t(k+1) \rangle / \langle t(k) \rangle \rightarrow 1$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00612).

при $k \rightarrow \infty$, выполняется (см. [5]) соотношение

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{W_{t(k)}}{\sqrt{2\langle t(k) \rangle \log \log \langle t(k) \rangle}} = 1 \quad \text{п.н.} \quad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) видно, что верхний предел в законе повторного логарифма существенно зависит от того, какие значения индексов допускаются. Заметим, что рассматриваются и другие варианты закона повторного логарифма для многопараметрического винеровского процесса или частных сумм независимых мультииндексированных случайных величин, определяемые его поведением на некотором классе индексирующих подмножеств, см., например, [6], [7].

Естественно задаться вопросом об обобщении закона повторного логарифма, которое бы объединяло подобные результаты. В работе [8] автором была рассмотрена постановка задачи, в которой верхний предел нормированных значений d -параметрического винеровского процесса брался по множеству произвольной формы, и было показано, как он зависит от формы множества. Целью настоящей заметки является распространение этого результата на частные суммы, образованные ассоциированными мультииндексированными случайными величинами. При этом приходится преодолевать трудности, связанные как с зависимостью упомянутых величин, так и с геометрической природой множества индексов, по которому ведется суммирование.

Напомним, что случайное поле $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ называется *ассоциированным*, если

$$\text{cov}(f(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}), g(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})) \geq 0 \quad (1.3)$$

для каждого $n \in \mathbb{N}$, произвольных по координатам неубывающих ограниченных борелевских функций $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ и любых $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}^d$. Ассоциированные случайные последовательности и поля возникают в математической физике, теории надежности, теории случайных мер и графов. Ассоциированность гауссовского поля эквивалентна неотрицательности его ковариационной функции; известны также достаточные условия ассоциированности для многих других классов стохастических систем. Начиная с 1980-х гг., ведется активная работа по установлению предельных теорем для ассоциированных процессов и полей. Здесь важные результаты получали Ч. Ньюмен, Т. Биркел, А. В. Булинский, Дж. Руссас, Хао Ю, Р. Балан и др., см. монографию [9] и приведенный в ней список литературы. В частности, Булинским в 1995 г. получен функциональный закон повторного логарифма для ассоциированных случайных полей [10]. В данной заметке доказывается закон повторного логарифма для стационарного ассоциированного случайного поля, наблюдаемого в произвольной неограниченной области $T \subseteq \mathbb{N}^d$.

2. Основной результат и следствия. Введем некоторые дополнительные обозначения. Для множества $M \subset \mathbb{R}^d$, все координаты точек которого положительны, положим

$$\log(M) = \{s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{R}^d : s_i = \log(t_i), i = 1, \dots, d, (t_1, \dots, t_d) \in M\}.$$

При $t \in \mathbb{R}_+^d$ и $a > 0$ положим $at = (at_1, \dots, at_d)$, $a^t = (a^{t_1}, \dots, a^{t_d})$, $[t] = ([t_1], \dots, [t_d])$ и $t \pm \mathbf{1} = (t_1 \pm 1, \dots, t_d \pm 1)$; здесь $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^d$, а $[x]$ есть целая часть числа $x \in \mathbb{R}$. В пространстве $\mathbb{R}^d$ введем норму $\|t\| = \sum_{i=1}^d |t_i|$. Для множества $M \subset \mathbb{R}^d$

и $\varepsilon > 0$ обозначим через $M^{(\varepsilon)}$ ε -окрестность M относительно нормы $\|\cdot\|$. Для $T \subset \mathbb{N}^d$ положим $L = L(T) = (\log T)^{(1)}$. Далее, при $a, b \in \mathbb{R}^d$ и $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, d$, параллелепипедом $(a, b]$ будем называть множество $(a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]$. Мощность конечного множества H обозначаем $|H|$. Для параллелепипеда $A = (a, b]$ также используем обозначение $|A| := |A \cap \mathbb{Z}^d|$. Наконец, положим

$$R(a) = \{t \in \mathbb{R}^d : t_i \geq a, i = 1, \dots, d\}, \quad a > 0.$$

Будем предполагать, что ассоциированное поле $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ стационарно в широком смысле, центрировано, $\sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$, и выполняется условие

$$u_r = \sum_{\|j\| \geq r} \text{cov}(X_0, X_j) \leq c_0 r^{-\lambda}, \quad (2.1)$$

где $c_0, \lambda > 0$. Величины u_r , называемые коэффициентами Кокса–Гримметта, играют важную роль в исследовании ассоциированных случайных систем; так, сформулированные ограничения на u_r и моменты компонент поля обеспечивают справедливость функционального закона повторного логарифма [10]. Отметим, что в случае (2.1) конечна величина

$$\sigma^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \text{cov}(X_0, X_j). \quad (2.2)$$

Тривиальный случай, когда $\sigma^2 = 0$ (т.е. когда поле X нулевое), мы исключаем из рассмотрения.

Как обычно, для ограниченного $U \subset \mathbb{R}^d$ пишем $S(U) = \sum_{j \in U \cap \mathbb{Z}^d} X_j$ и $S_n = S((0, n])$ для $n \in \mathbb{N}^d$.

ТЕОРЕМА. Пусть множество $T \subseteq \mathbb{N}^d$ таково, что $\sup_{n \in T} \min_{i=1, \dots, d} n_i = +\infty$. Тогда, с вероятностью единица,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, n \in T} \frac{S_n}{\sqrt{2\langle n \rangle \log \log \langle n \rangle}} = - \liminf_{n \rightarrow \infty, n \in T} \frac{S_n}{\sqrt{2\langle n \rangle \log \log \langle n \rangle}} = \sigma \sqrt{r}; \quad (2.3)$$

здесь σ введено в (2.2) и

$$r = r(T) = \liminf_{a \rightarrow \infty} \left\{ \rho > 0 : \int_{L(T) \cap R(a)} \|x\|^{-\rho} dx < \infty \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $c > 1$ и $a > 0$ рассмотрим множества

$$A_k = (c^k, c^{k+1}], \quad B_k = \log A_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+^d, \quad (2.4)$$

$$K = \{k \in \mathbb{N}^d : A_k \cap T \neq \emptyset, B_k \subseteq R(a)\}. \quad (2.5)$$

ЛЕММА 1. 1) Для произвольного $\mu > r$, любого $c \in (1, e^{1/d})$ и всех достаточно больших $a > 0$ справедливо соотношение

$$\sum_{k \in K} \|k\|^{-\mu} < \infty.$$

2) Для произвольного $\mu \in (0, r)$, любого $c > e$ и всех $a > 0$ справедливо соотношение

$$\sum_{k \in K} \|k\|^{-\mu} = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\mu > r$ выберем такое $a > 1$, чтобы

$$\int_{L(T) \cap R(a)} \|x\|^{-\mu} dx < \infty.$$

Заметим, что если $k \in K$, то $(\ln c)k \in R(a)$ и $B_k \cap (\log T) \neq \emptyset$. Так как $d \ln c < 1$, то расстояние между любыми двумя точками множества B_k меньше 1 и, следовательно, $B_k \subseteq R(a) \cap L(T)$. Далее, при $x \in B_k$ выполняется неравенство

$$\|x\| \leq \|(\ln c)(k + 1)\| \leq 2(\ln c)\|k\| \leq 2\|k\|.$$

С учетом этих фактов имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} \|k\|^{-\mu} &= (\ln c)^{-d} \sum_{k \in K} \int_{B_k} \|k\|^{-\mu} \\ &\leq (\ln c)^{-d} 2^\mu \sum_{k \in K} \int_{B_k} \|x\|^{-\mu} dx \leq (\ln c)^{-d} 2^\mu \int_{L(T) \cap R(a)} \|x\|^{-\mu} dx < \infty. \end{aligned}$$

Теперь пусть $\mu < r$. Предположим, что ряд в формулировке второго утверждения леммы сходится. Заметим, что при $k \in K$ и $x \in B_k^{(1)}$ имеем

$$\|x\| \geq \|(\ln c)k\| - 1 \geq (\ln c - 1)\|k\|.$$

Следовательно,

$$\int_{\bigcup_{k \in K} B_k^{(1)}} \|x\|^{-\mu} dx \leq \sum_{k \in K} \int_{B_k^{(1)}} \|x\|^{-\mu} dx \leq (2 + \ln c)^d (\ln c - 1)^{-\mu} \sum_{k \in K} \|k\|^{-\mu} < \infty. \quad (2.6)$$

Здесь мы также воспользовались тем, что мера Лебега множества $B_k^{(1)}$ не превосходит $(2 + \ln c)^d$, $k \in K$. Пусть $x \in L(T)^{(1)} \cap R(a + \ln c + 1)$. Тогда существуют такие $k \in \mathbb{N}^d$ и $y \in R(a + \ln c)$, что $\|x - y\| < 1$ и $y \in B_k \cap \log T$. При этом $(\ln c)k \in R(a)$, так что $B_k \subset R(a)$. Следовательно,

$$L(T)^{(1)} \cap R(a + \ln c + 1) \subset \bigcup_{k \in K} B_k^{(1)},$$

но тогда (2.6) противоречит выбору μ .

Вернемся к доказательству теоремы. Как обычно при проверке закона повторного логарифма, вычисление верхнего предела состоит из получения верхней и нижней оценок. Для получения верхней оценки возьмем $\rho > r$, $c \in (1, e^{1/d})$ и $a > 0$, точные значения которых подберем позже. Имеем

$$\begin{aligned} &P\left(\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in T}} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 \langle n \rangle \log \log \langle n \rangle}} \geq \sqrt{\rho}\right) \\ &\leq P\left(\max_{n \in A_k} \frac{S_n}{\sqrt{2\sigma^2 \langle n \rangle \log \log \langle n \rangle}} \geq \sqrt{\rho} \text{ для бесконечного числа } k \in K\right) \\ &\leq P\left(\max_{n \in A_k} S_n \geq \sqrt{2\rho\sigma^2 \langle c^k \rangle \log \log \langle c^k \rangle} \text{ для бесконечного числа } k \in K\right). \end{aligned}$$

Согласно максимальному неравенству Булинского–Кина [9; т. 2.4.8] при условиях теоремы для любого $\tau \in (0, 1)$ и всех $k \in K$, кроме, возможно, конечного числа, имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{n \in A_k} S_n \geq \sqrt{2\rho\sigma^2\langle c^k \rangle \log \log \langle c^k \rangle}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\max_{n \leq c^{k+1}} S_n \geq \sqrt{2\rho\sigma^2\langle c^k \rangle \log \log \langle c^k \rangle}\right) \\ &\leq 2\mathbb{P}\left(S_{[c^{k+1}]} \geq \tau\sqrt{2\sigma^2\rho\langle c^k \rangle \log \log \langle c^k \rangle}\right). \end{aligned}$$

Из оценки скорости сходимости в центральной предельной теореме для ассоциированных случайных полей [9; т. 3.1.21] следует существование таких $C_1 > 0$ и $\beta > 0$, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_m}{\sqrt{\mathcal{D}S_m}} \leq x\right) - \mathbb{P}(Z \leq x) \right| \leq C_1 \langle m \rangle^{-\beta} \quad (2.7)$$

для всех $m \in \mathbb{N}^d$; здесь $Z \sim N(0, 1)$. Следовательно,

$$\mathbb{P}\left(S_{[c^{k+1}]} \geq \tau\sqrt{2\sigma^2\rho\langle c^k \rangle \log \log \langle c^k \rangle}\right) \leq C_1 \langle c^k \rangle^{-\beta} + \mathbb{P}\left(Z > \tau\sqrt{2\rho\frac{\sigma^2\langle c^k \rangle}{\mathcal{D}S_{[c^{k+1}]}} \log \log \langle c^k \rangle}\right).$$

В силу конечности величины σ^2 , фигурирующей в формуле (2.2), для любого конечного множества $U \subset \mathbb{Z}^d$ верна оценка $\mathcal{D}S(U) \leq \sigma^2|U|$ и, таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z > \tau\sqrt{2\rho\frac{\sigma^2\langle c^k \rangle}{\mathcal{D}S_{[c^{k+1}]}} \log \log \langle c^k \rangle}\right) &\leq \mathbb{P}\left(Z > \tau\sqrt{2\rho\frac{\langle c^k \rangle}{\langle [c^{k+1}] \rangle} \log \log \langle c^k \rangle}\right) \\ &\leq \exp\left\{-\tau^2\rho\frac{\langle c^k \rangle}{\langle [c^{k+1}] \rangle} \log \log \langle c^k \rangle\right\}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались также известной оценкой $\mathbb{P}(Z > y) \leq e^{-y^2/2}$, $y \geq 0$. Заметим, что $\langle c^k \rangle / \langle [c^{k+1}] \rangle \geq c^{-d}$ при всех $k \in K$. Отсюда и из леммы 1 вытекает, что

$$\sum_{k \in K} \mathbb{P}\left(S_{[c^{k+1}]} \geq \tau\sqrt{2\sigma^2\rho\langle c^k \rangle \log \log \langle c^k \rangle}\right) \leq \sum_{k \in K} C_1 \langle c^k \rangle^{-\beta} + \sum_{k \in K} (\log \langle c^k \rangle)^{-\tau^2\rho c^{-d}} < \infty,$$

если параметры выбраны так, чтобы $\tau^2\rho c^{-d} > r$. Так как при этом ρ можно взять сколь угодно близким к r , то верхняя оценка получена.

Если $r = 0$, то теорема доказана; в противном случае возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Также подберем $\rho \in (0, r/(1 + \varepsilon))$, а затем целое $c > 3$ такое, что $\lambda \ln c > d$ и $\tau := \rho(1 + \varepsilon)(1 - c^{-1})^{-d} < r$. Введем множества A_k и B_k , $k \in \mathbb{N}^d$, так, как это сделано в (2.4). Согласно теореме Болтхаузена [9; т. 3.1.8] можно выбрать $a \in \mathbb{N}$, $a > \ln c$ таким образом, чтобы

$$\frac{\mathcal{D}S_m}{\sigma^2\langle m \rangle} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad (2.8)$$

при $\min_{i=1, \dots, d} m_i \geq 2^a$, $i = 1, \dots, d$. Будем считать, что такое a взято в определении множества K (см. (2.5)).

Для каждого $I \subseteq \{1, \dots, d\}$ введем множество $K(I) \subset \mathbb{N}^d$, полагая

$$K(I) := \{k \in K : k_i > \ln \|k\|, i \in I, \text{ и } k_i \leq \ln \|k\|, i \notin I\}.$$

Если $I \neq \{1, \dots, d\}$ и $I \neq \emptyset$, то сделаем еще следующие построения. Для $k \in \mathbb{N}^d$ и $I \subseteq \{1, \dots, d\}$ будем писать $k_I = \{k_i : i \in I\} \in \mathbb{N}^{|I|}$. Введем множество

$$M(I) = \{m \in \mathbb{N}^{|I|} : \text{существует } k \in K(I), k_I = m\}.$$

Для каждого $m \in M(I)$ выберем произвольным образом такое $k(m) \in K(I)$, что $k(m)_I = m$, и определим

$$K_0(I) = \{k(m), m \in M(I)\}. \quad (2.9)$$

Если $I = \{1, \dots, d\}$, то положим $M(I) = K_0(I) = K(I)$.

Пусть $\mu \in (\tau, r)$. В силу леммы 1 существует такое непустое $I \subseteq \{1, \dots, d\}$, что $\sum_{k \in K(I)} \|k\|^{-\mu} = +\infty$. Зафиксируем это I .

ЛЕММА 2. Для любого $\nu \in (0, \mu)$ справедливы соотношения

$$\sum_{m \in M(I)} \|m\|^{-\nu} = \sum_{k \in K_0(I)} \|k\|^{-\nu} = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $I = \{1, \dots, d\}$, то утверждение леммы очевидно. Пусть теперь $|I| < d$.

Сначала докажем расходимость первого ряда. Заметим, что при $m \in M(I)$ и $\|m\| > d$ существует не более чем $(2d \ln \|m\|)^d$ целочисленных решений системы неравенств

$$k_i \leq \ln \left(\sum_{i \notin I} k_i + \|m\| \right), \quad k_i \geq a, \quad i \in \{1, \dots, d\} \setminus I.$$

Допустим, первое утверждение леммы неверно. Тогда

$$\sum_{k \in K(I)} \|k\|^{-\mu} \leq \sum_{m \in M(I)} \sum_{k \in K(I) : k_I = m} \|k\|^{-\mu} \leq \sum_{m \in M(I)} (2d \ln \|m\|)^d \|m\|^{-\mu} < \infty,$$

так как $\mu > \nu$; но это противоречит сделанному выбору множества I .

Теперь заметим, что для любого $m \in M(I)$ выполняется неравенство

$$\|k(m)\| - d \ln \|k(m)\| \leq \|m\|$$

(обозначение $k(m)$ введено перед (2.9)). Следовательно, для всех m , для которых $\|m\| \geq 4d^2$, имеем $\|k(m)\| \leq 2\|m\|$. Поэтому

$$\sum_{k \in K_0(I)} \|k\|^{-\nu} \geq \sum_{m \in M(I) : \|m\| \geq 4d^2} \|k(m)\|^{-\nu} \geq 2^{-\nu} \sum_{m \in M(I) : \|m\| \geq 4d^2} \|m\|^{-\nu} = +\infty.$$

Пусть $\Gamma = \{0, 1, 2\}^{|I|}$. Каждому $\alpha \in \Gamma$ поставим в соответствие множество

$$K^{(\alpha)} = \{k \in K_0(I) : k_i \equiv \alpha_i \pmod{3}, i \in I\}.$$

Другими словами, соответствующие друг другу компоненты мультииндексов $k \in K^\alpha$, если их номер входит в I , должны иметь одинаковые остатки от деления на три. Существует такое $\alpha \in \Gamma$, что

$$\sum_{k \in K^{(\alpha)}} \|k\|^{-\mu} = \infty \quad (2.10)$$

(потому что сумма левых частей (2.10) по всем $\alpha \in \Gamma$ расходится). Далее фиксируем это α .

В каждом из множеств A_k , $k \in K^{(\alpha)}$, выберем точку $t(k) \in T$, и обозначим $v(k)_i = c^{k_i-1}$, $i = 1, \dots, d$. Введем параллелепипеды $G_k := (v(k), t(k)]$ и события

$$E_k = \{S(G_k) > \sqrt{2\sigma^2 \rho \langle t(k) \rangle \log \log \langle t(k) \rangle}\}, \quad k \in K^{(\alpha)}.$$

Заметим, что по построению $\langle t(k) \rangle \leq \langle c^{k+1} \rangle$, а также что

$$1 \leq \frac{\langle t(k) \rangle}{\langle t(k) - v(k) \rangle} \leq (1 - c^{-1})^{-d}$$

при всех $k \in K^{(\alpha)}$ и $i = 1, \dots, d$. Следовательно, в силу (2.7) и (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K^{(\alpha)}} \mathbb{P}(S(G_k) > \sqrt{2\sigma^2 \rho \langle t(k) \rangle \log \log \langle t(k) \rangle}) \\ \geq \sum_{k \in K^{(\alpha)}} \mathbb{P}\left(\frac{S(G_k)}{\sqrt{\mathbb{D}S(G_k)}} > \sqrt{2\rho(1+\varepsilon) \frac{\langle t(k) \rangle}{\langle t(k) - v(k) \rangle} \log \log \langle c^{k+1} \rangle}\right) \\ \geq \sum_{k \in K^{(\alpha)}} \mathbb{P}\left(\frac{S(G_k)}{\sqrt{\mathbb{D}S(G_k)}} > \sqrt{2\tau \log \log \langle c^{k+1} \rangle}\right) \\ \geq \sum_{k \in K^{(\alpha)}} \mathbb{P}\left(Z > \sqrt{2\tau \log \log \langle c^{k+1} \rangle}\right) - C_1 \sum_{k \in K^{(\alpha)}} \langle c^k \rangle^{-\beta}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $Z \sim N(0, 1)$. Используя стандартную оценку хвоста нормального распределения, видим, что

$$\mathbb{P}(Z > \sqrt{2\tau \log \log \langle c^{k+1} \rangle}) \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{2\tau \log \log \langle c^{k+1} \rangle}} (\|k\| + d)^{-\tau} \quad (2.12)$$

при всех $k \in K^{(\alpha)}$ (за исключением, возможно, конечного числа). Принимая во внимание лемму 2 (в которой можно взять $\nu > \tau$), видим, что $\sum_{k \in K^{(\alpha)}} \mathbb{P}(E_k) = +\infty$.

Теперь убедимся, что с вероятностью единица происходит бесконечное число событий E_k . Обозначим

$$Z_k = \frac{S(G_k)}{\sqrt{\mathbb{D}S(G_k)}}, \quad x_k = \sqrt{2\tau \log \log \langle c^{k+1} \rangle}, \quad D_k = \{Z_k \geq x_k\}, \quad k \in K^{(\alpha)}.$$

Согласно (2.11) и (2.12) сумма $\sum_{k \in K^{(\alpha)}} \mathbb{P}(D_k)$ конечна. Пусть

$$\{k(l), l \in \mathbb{N}\}$$

есть биекция из $\mathbb{N}$ в $K^{(\alpha)}$ такая, что последовательность $\{\|k(l)\|, l \in \mathbb{N}\}$ не убывает. Проверим, что

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} \frac{\sum_{1 \leq i \neq j \leq q} (\mathbb{P}(D_{k(i)} D_{k(j)}) - \mathbb{P}(D_{k(i)}) \mathbb{P}(D_{k(j)}))}{(\sum_{j=1}^q \mathbb{P}(D_{k(j)}))^2} = 0, \quad q \rightarrow \infty. \quad (2.13)$$

В этом случае (см., например, [9; л. 6.1.4]) с вероятностью единица происходит бесконечное число событий $\{D_k\}$, а следовательно, и событий $\{E_k\}$. Пусть $\{\gamma_q, q \in \mathbb{N}\}$

– такая последовательность, что $\gamma_q \in (0, 1 \wedge \sqrt{2\tau \log \log c})$ и что $\gamma_q \rightarrow 0$ при $q \rightarrow \infty$ (явный вид этой последовательности будет указан позже). Далее, при $x \in \mathbb{R}$ и $z > 0$ введем функцию $h_{x,z}$, которая принимает значение 0, когда ее аргумент не превосходит $x - z$, значение 1, когда ее аргумент не меньше x , и линейна на отрезке $[x - z, x]$. Заметим, что

$$I\{t \geq x - z\} \geq h_{x,z}(t) \geq I\{t \geq x\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \neq j \leq q} (\mathbb{P}(D_{k(i)} D_{k(j)}) - \mathbb{P}(D_{k(i)}) \mathbb{P}(D_{k(j)})) \\ & \leq \sum_{1 \leq i \neq j \leq q} \text{cov}(h_{x_{k(i)}, \gamma_q}(Z_{k(i)}), h_{x_{k(j)}, \gamma_q}(Z_{k(j)})) \\ & \quad + \left(\sum_{i=1}^q \mathbb{E} h_{x_{k(i)}, \gamma_q}(Z_{k(i)}) \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^q \mathbb{P}(D_{k(i)}) \right)^2 =: J_1 + J_2 - J_3. \end{aligned}$$

Ковариационное неравенство для ассоциированных случайных величин [9; т. 1.5.3] позволяет заключить, что

$$J_1 \leq \gamma_q^{-2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq q} \text{cov}(Z_{k(i)}, Z_{k(j)}). \quad (2.14)$$

ЛЕММА 3. *Справедливо соотношение*

$$\sum_{i, j \in \mathbb{N}, i \neq j} \text{cov}(Z_{k(i)}, Z_{k(j)}) < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \text{cov}(Z_{k(i)}, Z_{k(j)}) & \leq (\mathbb{E} X_0^2)^{-1} \sum_{k, l \in K^{(\alpha)}, k \neq l} \frac{\text{cov}(S(G_k), S(G_l))}{\sqrt{|G_k| |G_l|}} \\ & \leq (\mathbb{E} X_0^2)^{-1} \sum_{k, l \in K^{(\alpha)}, k \neq l} \frac{\text{cov}(S(G_k), S(G_l))}{c^{\|k\|/2 + \|l\|/2}} \end{aligned}$$

(так как $|G_k| \geq |A_k| = (c-1)^d c^{\|k\|}$, $k \in K^{(\alpha)}$).

Зафиксируем k . Заметим, что если $l \neq k$, $\|l\| \geq \|k\|$, то мультииндексы l и k не могут (см. построение множеств $K_0(I)$ и $K^{(\alpha)}$) совпадать во всех координатах, номера которых принадлежат I . Следовательно, существует такое $i \in I$, что $l_i \neq k_i$. Тогда $|l_i - k_i| \geq 3$ и при этом $k_i \geq \ln \|k\|$, а также $l_i \geq \ln \|l\| \geq \ln \|k\|$. Пусть, например, $l_i > k_i$. Тогда

$$\max_{n \in G_k} n_i \leq c^{k_i+1}, \quad \min_{n \in G_l} n_i \geq c^{l_i-1} \geq c^{k_i+2}.$$

Значит, расстояние между множествами G_k и G_l составляет не менее c^{k_i} . С другой стороны, если $k_i > l_i$, то аналогичным образом убеждаемся, что это расстояние не меньше $c^{k_i-1} - c^{k_i-2} \geq c^{k_i-2}$. Итак, в обоих случаях расстояние между G_k и G_l оценивается снизу величиной

$$c^{-2} c^{k_i} \geq c^{\ln \|k\| - 2} \geq c^{-2} \|k\|^c.$$

Поэтому ввиду (2.1)

$$\sum_{l \in K^{(\alpha)}, \|l\| \geq \|k\|} \frac{\text{cov}(S(G_k), S(G_l))}{c^{\|k\|/2 + \|l\|/2}} \leq |G_k| c^{2\lambda - \|k\|} \|k\|^{-\lambda \ln c}.$$

Так как $|G_k| \leq 2^d |A^k| \leq (2c - 2)^d c^{\|k\|}$, выбранное значение c обеспечивает то, что ряд из полученных выражений по всем $k \in K^{(\alpha)}$ сходится.

Перейдем к оценке $J_2 - J_3$. Имеем

$$\begin{aligned} J_2 - J_3 &\leq \left(\sum_{i=1}^q \mathbb{P}(Z_{k(i)} > x_{k(i)} - \gamma_q) \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^q \mathbb{P}(Z_{k(i)} > x_{k(i)}) \right)^2 \\ &\leq 2 \left(\sum_{i=1}^q \mathbb{P}(Z_{k(i)} > x_{k(i)} - \gamma_q) \right) \left(\sum_{i=1}^q \mathbb{P}(Z_{k(i)} \in (x_{k(i)} - \gamma_q, x_{k(i)})) \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Пользуясь оценкой (2.7), видим, что

$$\sum_{i=1}^q \mathbb{P}(Z_{k(i)} > x_{k(i)} - \gamma_q) \leq C_1 \sum_{k \in K^{(\alpha)}} \langle c^k \rangle^{-\beta} + \sum_{i=1}^q \mathbb{P}(Z > x_{k(i)} - \gamma_q), \quad (2.16)$$

где $Z \sim N(0, 1)$, и аналогичная оценка верна для второго множителя в правой части (2.15). Следовательно, обозначая через C_2 первое слагаемое в правой части (2.16), получаем оценку

$$\begin{aligned} J_2 - J_3 &\leq C_2^2 + 2C_2 \sum_{i=1}^q \mathbb{P}(Z > x_{k(i)} - \gamma_q) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^q \mathbb{P}(Z > x_{k(i)} - \gamma_q) \right) \left(\sum_{i=1}^q \mathbb{P}(Z \in (x_{k(i)} - \gamma_q, x_{k(i)})) \right) \\ &\leq C_2^2 + 2C_2 e^{x_{k(q)}} \sum_{i=1}^q \|k(i)\|^{-\tau} + \gamma_q \left(\sum_{i=1}^q \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_{k(i)} - \gamma_q)^2 \right\} \right)^2 \\ &\leq C_2^2 + 2C_2 e^{x_{k(q)}} \sum_{i=1}^q \|k(i)\|^{-\tau} + \gamma_q e^{2x_{k(q)}} \left(\sum_{i=1}^q \|k(i)\|^{-\tau} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь мы воспользовались также неравенством

$$\mathbb{P}(|Z - y| \leq z) \leq z \exp \left\{ -\frac{(y - z)^2}{2} \right\},$$

справедливым при $y > 0$ и $z \in (0, y)$.

Теперь оценим снизу знаменатель дроби в (2.13). Рассуждая так же, как при получении (2.11), видим, что при всех достаточно больших $q \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \mathbb{P}(Z_{k(i)} > x_{k(i)}) &\geq \sum_{i=1}^q \frac{(\|k(i)\| + d)^{-\tau}}{8\sqrt{\pi\tau} (\log c)^\tau \sqrt{\log(\|k(q)\| + d) + \log \log c}} \\ &\geq \frac{1}{16\sqrt{\pi\tau} (\log c)^\tau \sqrt{\log \|k(q)\|}} \sum_{i=1}^q \|k(i)\|^{-\tau}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Далее нам потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 4. Пусть $\mu > 0$ и $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ – неубывающая последовательность натуральных чисел, причем $a_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим также, что

$$\sum_{n=1}^N a_n^{-\mu} \leq C_3 \exp\{(\log a_N)^{2/3}\} \quad \text{при } C_3 > 1 \text{ и всех } N \in \mathbb{N}.$$

Тогда для любого $\delta > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-\mu-\delta}$ сходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем непрерывно дифференцируемую и неубывающую функцию $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ так, чтобы $f(0) = 1$ и $f(n) = a_n, n \in \mathbb{N}$. С учетом интегрального признака сходимости ряда достаточно проверить, что

$$\int_0^{\infty} f(t)^{-\mu-\delta} dt < \infty.$$

Введем функцию F , полагая $F(t) = \int_0^t f(s)^{-\mu} ds, t \geq 0$. Заметим, что тогда

$$F(t) \leq F([t]) + 1 \leq 3C_3 \exp\{(\log f(t))^{2/3}\}, \quad t > 0.$$

Интегрируя по частям, при $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^N f(t)^{-\mu-\delta} dt &= \int_0^N F'(t) f(t)^{-\delta} dt = F(N) f(N)^{-\delta} + \delta \int_0^N F(t) f(t)^{-1-\delta} f'(t) dt \\ &\leq C_3 \exp\{(\log a_N)^{2/3}\} a_N^{-\delta} \\ &\quad + 3C_3 \delta \int_0^N \exp\{(\log f(t))^{2/3}\} f(t)^{-\delta/2} f(t)^{-1-\delta/2} f'(t) dt. \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю, когда $N \rightarrow \infty$, а второе не превосходит интеграла

$$3C_3 C_4 \delta \int_0^N f(t)^{-1-\delta/2} f'(t) dt = 3C_3 C_4 \left(\frac{1}{2^{\delta/2}} - f(N)^{-\delta/2} \right),$$

где $C_4 = \sup_{x \geq 1} x^{-\delta/2} \exp\{(\log x)^{2/3}\}$. Последнее выражение, очевидно, имеет конечный предел при $N \rightarrow \infty$.

Теперь мы можем оценить дробь в (2.13). Возьмем

$$\gamma_q := \left(\sum_{i=1}^q \|k(i)\|^{-\tau} \right)^{-1/2},$$

если последнее выражение меньше $1 \wedge \sqrt{2\tau \log \log c}$, и положим γ_q равным достаточно малому положительному числу при тех q (их конечное число), когда указанное условие не выполнено. Заметим, что в силу леммы 2 и построения множества $K^{(\alpha)}$ можно найти такое $\varkappa > 0$, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \|k(i)\|^{-\tau-\varkappa}$ расходится. Следовательно, по лемме 4 множество тех чисел $q \in \mathbb{N}$, для которых $\gamma_q \leq \exp\{-(\log \|k(q)\|)^{2/3}/2\}$, $v \in \mathbb{N}$, бесконечно. При q , принадлежащих такому множеству, дробь (2.13) в силу (2.14),

леммы 3, (2.17) и (2.18) оценивается сверху произведением некоторого множителя, не зависящего от q , и выражения

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_q^{-2} + e^{x_{k(q)}} \sum_{i=1}^q \|k(i)\|^{-\tau} + \gamma_q e^{2x_{k(q)}} (\sum_{i=1}^q \|k(i)\|^{-\tau})^2}{(\sum_{i=1}^q \|k(i)\|^{-\tau})^2} \log \|k(q)\| \\ &= (\gamma_q^2 + e^{x_{k(q)}} \gamma_q^2 + \gamma_q e^{2x_{k(q)}}) \log \|k(q)\| \leq 3\gamma_q e^{2x_{k(q)}} \log \|k(q)\| \\ &\leq 3 \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\log \|k(q)\|)^{2/3} + 2\sqrt{2\tau \log(2\|k(q)\| \log c)} + \log \log \|k(q)\| \right\} \rightarrow 0, \\ & q \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Итак, условие (2.13) выполнено и $P(E_k \text{ бесконечно часто}) = 1$. Далее, пользуясь верхней оценкой в обычном законе повторного логарифма для ассоциированных случайных полей [9; т. 6.1.1] или уже доказанной верхней оценкой в данной теореме, для любой вершины $p(k)$ параллелепипеда $(\beta(k), t(k))$, не совпадающей с $t(k)$, с вероятностью единица имеем

$$|S_{p(k)}| \leq \sqrt{3d\sigma^2 \langle p(k) \rangle \log \log \langle p(k) \rangle} \leq \sqrt{3d\sigma^2 \frac{\langle t(k) \rangle}{c} \log \log \langle t(k) \rangle}$$

при всех k за исключением, возможно, конечного их числа. Поэтому

$$\begin{aligned} \limsup_{\|n\| \rightarrow \infty, n \in T} \frac{|S_n|}{\sqrt{2\langle n \rangle \log \log \langle n \rangle}} &\geq \limsup_{\|k\| \rightarrow \infty, k \in K^{(\alpha)}} \frac{|S_{t(k)}|}{\sqrt{2\langle t(k) \rangle \log \log \langle t(k) \rangle}} \\ &\geq \limsup_{\|k\| \rightarrow \infty, k \in K^{(\alpha)}} \frac{|S(G_k)|}{\sqrt{2\langle t(k) \rangle \log \log \langle t(k) \rangle}} - 2^d \sigma \sqrt{\frac{3d}{c}} \geq \sigma \sqrt{\rho} - 2^d \sigma \sqrt{\frac{3d}{c}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Так как ρ можно было выбрать сколь угодно близким к r , а c сколь угодно большим, то верхний предел в левой части равен $\sigma \sqrt{r}$.

Для доказательства теоремы теперь остается заметить, что в определении множеств B_k и K при построении нижней оценки параметр a можно было взять сколь угодно большим, а потому в (2.19) предел по $\|n\| \rightarrow \infty$ можно заменить на предел по $n \rightarrow \infty$.

Получим следствие доказанной теоремы, дающее описание ситуации, когда множество T задается графиком достаточно регулярной функции.

Пусть $d > 1$ и $\varphi(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная неубывающая положительная функция такая, что $\varphi(t) \leq t^{1/d}$, $t \geq 1$. Введем множества

$$T_{\varphi,i} = \left\{ n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d : n_i \geq \varphi \left(\prod_{j=1}^d n_j \right), i = 1, \dots, d \right\}, \quad T_\varphi = \bigcap_{i=1}^d T_{\varphi,i}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Для множества T_φ выполняется соотношение (2.3), причем

$$r(T_\varphi) = \inf \left\{ \rho \in [1, d] : I(\rho, \varphi) = \int_1^\infty \left(\log \frac{z}{\varphi(z)^d} \right)^{d-1} \frac{dz}{z \log^\rho z} < \infty \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) < \infty$, то множество T при некотором $a > 0$ содержит ортант $R(a)$. Но тогда очевидным образом

$$r(T) = d = \inf\{\rho > 0 : I(\rho, \varphi) < \infty\}.$$

Поэтому далее рассматриваем только случай $\varphi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда соотношение $n \rightarrow \infty$, $n \in T_\varphi$, равносильно соотношению $\|n\| \rightarrow \infty$, $n \in T_\varphi$ (потому что $\min_{i=1, \dots, d} n_i \geq \varphi(n_1 \dots n_d) \rightarrow \infty$ при $\|n\| \rightarrow \infty$). Заметим, что $r(T) \geq 1$ (так как T_φ содержит все точки вида $k\mathbf{1}$, $k \in \mathbb{N}$). Следовательно, по теореме достаточно проверить, что при каждом $\rho \in (1, d)$ соотношение $I(\rho, \varphi) < \infty$ равносильно

$$\int_{L(T)} \|x\|^{-\rho} dx < \infty.$$

Положим $\psi(y) = \log \varphi(e^y)$ и

$$D_\psi = \{x \in \mathbb{R}_+^d : x_i \geq \psi(\|x\|), i = 1, \dots, d\}.$$

Сначала докажем, что

$$I(\rho, \varphi) < \infty \iff \int_{D_\psi} \|x\|^{-\rho} dx < \infty. \quad (2.20)$$

В самом деле, правая часть (2.20) равна

$$\begin{aligned} & \int_{\sqrt{d}}^{\infty} y^{-\rho} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} I\left\{x_i \geq \psi(y), i = 1, \dots, d-1, \sum_i x_i \leq y - \psi(y)\right\} dx_1 \dots dx_{d-1} dy \\ &= \frac{1}{(d-1)!} \int_{\sqrt{d}}^{\infty} y^{-\rho} (y - d\psi(y))^{d-1} dy. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Делая замену $z = \log y$, видим, что сходимость последнего интеграла эквивалентна соотношению $I(\rho, \varphi) < \infty$.

Далее, если $x \in D_\psi$ и $x \in R(d)$, то существует такое $n \in \mathbb{N}^d$, что $\log n \in D_\psi$ и $\|x - \log n\| < 1$, поэтому $x \in L(T)^{(1)}$. С другой стороны, если $x \in L(T)^{(1)}$, то при $i = 1, \dots, d$ выполняются неравенства

$$x_i + 1 \geq \psi(\|x\| - d).$$

Следовательно, $x \in D_{\psi_1}$, где

$$\psi_1(y) = \psi(y - d) - 1.$$

Легко видеть, что сходимость интеграла в правой части (2.21) равносильна сходимости аналогичного интеграла, содержащего функцию ψ_1 .

Из приведенного следствия вытекает, например, что для функции $\varphi(t) = t^\tau$, где $\tau \in (0, 1/d)$, имеем $r(T_\varphi) = d$; для функции $\varphi_b(t) = t^{1/d} \exp(-(\log t)^b)$, где $b \in (0, 1]$, имеем $r(T_\varphi) = 1 + (d-1)b$. Другими словами, семейство функций $\{\varphi_b, b \in (0, 1]\}$ определяет множества, для которых значения верхних пределов в законе повторного логарифма занимают промежуточное положение между возникающими в (1.1) и (1.2).

Автор благодарен профессору А. В. Булинскому за полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Булинский, “Новый вариант функционального закона повторного логарифма”, *ТВП*, **25:3** (1980), 502–512.
- [2] Y.-C. Qi, “On strong convergence of arrays”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **50:2** (1994), 219–223.
- [3] А. В. Булинский, М. А. Лифшиц, “Скорость сходимости в функциональном законе повторного логарифма при нестандартных нормирующих множителях”, *УМН*, **50:5** (1995), 83–102.
- [4] G. J. Zimmerman, “Some sample function properties of the two-parameter Gaussian process”, *Ann. Math. Statist.*, **43** (1972), 1235–1246.
- [5] M. J. Wichura, “Some Strassen-type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments”, *Ann. Probab.*, **1** (1973), 272–296.
- [6] M. T. Lacey, “A remark on the multiparameter law of the iterated logarithm”, *Stochastic Process. Appl.*, **32:2** (1989), 355–367.
- [7] A. Gut, F. Johnson, U. Stadtmüller, “Between the LIL and the LSL”, *Bernoulli*, **16:1** (2010), 1–22.
- [8] A. Shashkin, “A variant of the LIL for multiparameter Brownian motion”, *Transactions of XXV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models* (Maiori (Salerno), Italy, September 20–24), Maiori, 2005, 258–263.
- [9] А. В. Булинский, А. П. Шашкин, *Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2008.
- [10] А. В. Булинский, “Функциональный закон повторного логарифма для ассоциированных случайных полей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **1:3** (1995), 623–639.

А. П. Шашкин

Московский государственный университет

имени М. В. Ломоносова

E-mail: ashashkin@hotmail.com

Поступило

21.02.2014

Исправленный вариант

09.05.2014