Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Назайкинский, О представлениях локализованных функций в $\mathbb{R}^2$ каноническим оператором Маслова, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 1, 88–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:01:35

УДК 517.9

О представлениях локализованных функций в $\mathbb{R}^2$ каноническим оператором Маслова

В. Е. Назайкинский

Доказана представимость локализованных функций в виде интеграла по параметру от канонического оператора Маслова на лагранжевом многообразии специального вида, примененного к амплитуде, полученной из преобразования Фурье представляемой функции. Это представление обобщает предложенное ранее Доброхотовым, Тироцци и Шафаревичем и позволяет при решении уравнений волнового типа с локализованными начальными данными использовать в представлении последних инвариантное лагранжево многообразие, что во многих случаях значительно упрощает формулы для асимптотического решения.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10476

Введение

Локализованные источники в задачах распространения волн естественно описывать функциями вида $V(x/\mu)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – пространственная переменная, $\mu > 0$ – малый параметр, а функция $V(y)$ “достаточно быстро” убывает на бесконечности. При построении асимптотических решений уравнений в частных производных с такими начальными данными или правыми частями удобно представить функцию $V(x/\mu)$ с помощью канонического оператора Маслова [1] на некотором лагранжевом многообразии, поскольку такое представление дает возможность воспользоваться хорошо разработанными методами квазиклассического приближения. Как отмечалось в [2], простейшее выражение этого типа в виде обратного преобразования Фурье

$$V\left(\frac{x}{\mu}\right) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{(i/\mu)\langle p, x \rangle} \tilde{V}(p) dp, \quad (1)$$

где $\langle p, x \rangle = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$ и

$$\tilde{V}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle p, y \rangle} V(y) dy, \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00521-а).

которое использовалось, например, в [3] и которое есть не что иное, как примененный к функции $\tilde{V}(p)$ канонический оператор Маслова на лагранжевой плоскости $L = \{(x, p) \in \mathbb{R}^{2n} : x = 0\}$, не особенно эффективно в задачах, для которых соответствующий классический гамильтониан (как, например, гамильтониан $H(x, p) = c(x)|p|$, отвечающий волновому уравнению) имеет на ней особенность (при $p = 0$). В двумерном случае ($n = 2$) представление, основанное на избегающем эту особенность лагранжевом многообразии

$$\Lambda_0^2 = \{(x, p) \in \mathbb{R}^4 : x = \mathbf{n}(\psi)\tau, p = \mathbf{n}(\psi)\}, \quad (3)$$

где $\mathbf{n}(\psi) = {}^t(\cos \psi, \sin \psi)$, τ пробегает вещественную прямую $\mathbb{R}$, а ψ – окружность $\mathbf{S}^1$, появилось в [4]–[6] и было доказано в [2]. Оно задается интегралом

$$V\left(\frac{x}{\mu}\right) \simeq \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{-i\pi/4} \int_0^\infty [K_{\Lambda_0^2}^{\mu/\rho}(\tilde{V}(\rho\mathbf{n}(\psi))e(\tau))](x) \sqrt{\rho} d\rho \quad (4)$$

по параметру ρ , где $K_{\Lambda_0^2}^h$ – канонический оператор с малым параметром $h > 0$ на многообразии Λ_0^2 , а $e(\tau) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ – срезающая функция, равная единице в окрестности нуля, и было применено в ряде последующих работ (см., например, [7], [8]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что лагранжево многообразие Λ_0^2 диффеоморфно двумерному цилиндру $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^1$, и его проекция на x -плоскость представляет собой двулистное накрытие, разветвляющееся над точкой $x = 0$, в которую проектируется целая окружность $\Lambda_0^1 = \{(x, p) \in \mathbb{R}^4 : x = 0, |p| = 1\}$, целиком состоящая из фокальных точек, так что это лагранжево многообразие (как и рассматриваемые ниже более общие многообразия) не находится в общем положении и соответственно не охватывается теорией катастроф (см., например, [9]). Канонический оператор Маслова на Λ_0^2 интересен и сам по себе, без всякой связи с интегральным представлением (4). Так, действие его на функцию, тождественно равную единице, приводит к функции Бесселя нулевого порядка [10].

При использовании представлений, подобных (4), в задаче Коши вычисления значительно упрощаются, если вместо Λ_0^2 использовать лагранжево многообразие Λ^2 , также проходящее через окружность Λ_0^1 , но при этом еще и инвариантное относительно гамильтонова векторного поля, соответствующего гамильтониану задачи. По-видимому, впервые возможность такой замены в представлении (4) была обнаружена (в одномерной ситуации) в [11; лемма 4]. В дальнейшем, уже в двумерной ситуации, представление (4) с заменой Λ_0^2 на Λ^2 было анонсировано в [12; теорема 2] и [13; предложение 1].

В данной работе, также посвященной двумерному случаю, мы доказываем это представление. С неформальной точки зрения ситуация проста. Рассмотрим правую часть формулы (4) (с заменой Λ_0^2 на Λ^2) как осциллирующий интеграл. Фундаментальное свойство таких интегралов (первоначально явно сформулированное для случая интегральных распределений Фурье Хёрмандером [14; теорема 3.2.1]) состоит в том, что класс задаваемых ими функций при фиксированной фазовой функции полностью определяется соответствующим последней лагранжевым многообразием. Нетрудно убедиться, что это лагранжево многообразие в данном случае есть в точности L (какое бы подходящее Λ^2 ни взять), откуда следует, что рассматриваемое представление эквивалентно представлению (1) через преобразование Фурье – остается только проверить правильность выбора амплитудной функции.

Строгая математическая реализация этого рассуждения приводит к теореме из раздела 2. Доказательство опирается на новые формулы для канонического оператора в окрестности фокальных точек и каустик [10] и метод стационарной фазы [15].

1. Предварительные сведения

1.1. Лагранжево многообразие Λ^2 . В четырехмерном фазовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами $(x, p) = (x_1, x_2, p_1, p_2)$ рассмотрим произвольное лагранжево многообразие Λ^2 , обладающее следующими свойствами:

- (i) Λ^2 содержит окружность $\Lambda_0^1 = \{(x, p) \in \mathbb{R}^4 : x = 0, |p| = 1\}$;
- (ii) сужение на Λ^2 формы $p dx = p_1 dx_1 + p_2 dx_2$ не обращается в нуль ни в одной точке многообразия Λ_2 .

Так как Λ^2 лагранжево и $p dx|_{\Lambda_0^1} = 0$, в окрестности подмногообразия Λ_0^1 на Λ_2 существует и единственна функция τ такая, что $d\tau = p dx|_{\Lambda^2}$ и $\tau|_{\Lambda_0^1} = 0$. Будем называть ее *действием* или *эйконалом*. Далее, пусть ψ – гладкая функция на Λ^2 со значениями на окружности $\mathbf{S}^1 = \mathbb{R} \pmod{2\pi}$ такая, что на Λ_0 выполнено соотношение $p = \mathbf{n}(\psi) = {}^t(\cos \psi, \sin \psi)$. Тогда дифференциалы $d\tau$ и $d\psi$ линейно независимы в каждой точке подмногообразия Λ_0^1 и, следовательно, набор функций (τ, ψ) является системой координат на Λ^2 в некоторой окрестности этого подмногообразия. Это частный случай введенных в [10] *эйконал-координат*. В дальнейших построениях часть многообразия Λ^2 , лежащая вне произвольно малой окрестности подмногообразия Λ_0^1 , не играет никакой роли, так что мы ее отбросим и будем без ограничения общности считать, что Λ^2 – достаточно узкая двумерная “цилиндрическая полоска”, задаваемая в эйконал-координатах уравнениями

$$x = X(\tau, \psi), \quad p = P(\tau, \psi), \quad \tau \in (-\tau_0, \tau_0), \quad \psi \in \mathbf{S}^1.$$

При этом согласно [10; лемма 1] выполнены тождества (где $X_\tau = \partial X / \partial \tau$ и т.д.)

$$\langle P, X_\tau \rangle = 1, \quad \langle P, X_\psi \rangle = 0, \quad \langle P_\psi, X_\tau \rangle = \langle P_\tau, X_\psi \rangle, \quad (5)$$

а подмногообразие Λ_0^1 выделяется уравнением $\tau = 0$, причем выполнены соотношения (последнее из которых вытекает из трех предыдущих с учетом (5))

$$X(0, \psi) = X_\psi(0, \psi) = 0, \quad P(0, \psi) = \mathbf{n}(\psi), \quad P_\psi(0, \psi) = \mathbf{n}'(\psi), \quad X_\tau(0, \psi) = \mathbf{n}(\psi). \quad (6)$$

В дальнейшем без дополнительных оговорок отождествляем функции от переменных $(\tau, \psi) \in (-\tau_0, \tau_0) \times \mathbf{S}^1$ с соответствующими функциями на Λ^2 .

1.2. Канонический оператор Маслова. Лагранжево многообразие Λ^2 удовлетворяет условиям квантования [1; § 8]. Действительно, единственным (с точностью до гомотопии) нетривиальным циклом γ в Λ^2 является подмногообразие Λ_0^1 , и в силу (6) тривиален класс когомологий формы $p dx$:

$$\oint_\gamma p dx = \int_0^{2\pi} P(0, \psi) \frac{\partial X}{\partial \psi}(0, \psi) d\psi = 0.$$

Далее (здесь $(Y; Z)$ означает матрицу, столбцами которой являются векторы Y и Z),

$$\begin{aligned}\pi \operatorname{ind} \gamma &= \varlimsup_{\psi \in [0, 2\pi]} \arg \det \frac{\partial(X - iP)}{\partial(\tau, \psi)}(0, \psi) = \varlimsup \arg \det(X_\tau - iP_\tau; X_\psi - iP_\psi)|_{\tau=0} \\ &= \varlimsup \arg \det(\mathbf{n}(\psi) - iP_\tau(0, \psi); -i\mathbf{n}'(\psi)) \\ &= \varlimsup \arg[-\det(P_\tau(0, \psi); \mathbf{n}'(\psi)) - i] = 0,\end{aligned}$$

поскольку величина в квадратных скобках не покидает нижней полуплоскости.

Таким образом (см. [1; теорема 8.1]), канонический оператор Маслова корректно определен на Λ^2 ; чтобы фиксировать его определение однозначно, нужно еще задать действие на Λ^2 (в качестве такового возьмем τ), меру на Λ^2 (в качестве нее возьмем форму объема $d\tau \wedge d\psi$) и аргумент якобиана $J(\tau, \psi) = \det(X_\tau(\tau, \psi); X_\psi(\tau, \psi))$ в какой-либо неособой точке (т.е. в точке, где этот якобиан не равен нулю). Имеем $J(0, \psi) = 0$ (т.е. все точки из Λ_0^1 являются фокальными на Λ^2); далее с учетом формул (5), (6) при $\tau = 0$ получаем

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{n}', X_{\tau\psi} \rangle - 1 &= \langle \mathbf{n}', X_{\tau\psi} \rangle - \langle \mathbf{n}, X_\tau \rangle = \langle P_\psi, X_{\tau\psi} \rangle + \langle P_{\psi\psi}, X_\tau \rangle = \langle \mathbf{n}', \mathbf{n}' \rangle - \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 0, \\ \langle \mathbf{n}, X_{\tau\psi} \rangle &= \langle P, X_{\tau\psi} \rangle = \langle P, X_\tau \rangle_\psi + \langle P_\psi, X_\tau \rangle = \langle P, X_\tau \rangle_\psi = 0,\end{aligned}$$

откуда $X_{\tau\psi}(0, \psi) = \mathbf{n}'(\psi)$, $J_\tau(0, \psi) = \det(\mathbf{n}(\psi); \mathbf{n}'(\psi)) = 1$ и знак якобиана $J(\tau, \psi)$ совпадает со знаком τ (при достаточно малых τ). Мы выберем $\arg J(+0, \psi) = 0$.

Канонический оператор на Λ^2 зададим формулами из [10]. Как и в [10; лемма 3], заключаем, что уравнение

$$\langle P(\tau, \psi), x - X(\tau, \psi) \rangle = 0 \quad (7)$$

имеет при $(x, \psi) \in U \times \mathbf{S}^1$, где U – достаточно малая окрестность нуля в $\mathbb{R}^2$, единственное гладкое решение $\tau = \tau(x, \psi)$ такое, что $\tau(0, \psi) = 0$. Это следует из теоремы о неявной функции, так как $X|_{\tau=0} = 0$ и $\langle P, x - X \rangle_\tau|_{\tau=0, x=0} = -\langle P, X_\tau \rangle = -1$. Выберем настолько малое $\delta \in (0, \tau_0)$, что $X(\tau, \psi) \in U_1$ и $\det(P; P_\psi) > 0$ при $(\tau, \psi) \in (-\delta, \delta) \times \mathbf{S}^1$, где $U_1 \Subset U$ – меньшая окрестность нуля в $\mathbb{R}^2$. Это возможно, поскольку $\det(P; P_\psi)|_{\tau=0} = \det(\mathbf{n}; \mathbf{n}') = 1$. Пусть $\varkappa(x) \in C_0^\infty(U)$ – срезающая функция, равная единице в U_1 . На функциях $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^2)$ с носителем во множестве $(-\delta, \delta) \times \mathbf{S}^1$ канонический оператор Маслова задается формулой (ср. [10; формула (28)])

$$[K_{\Lambda^2}^h \varphi](x, h) = \frac{e^{i\pi/4} \varkappa(x)}{\sqrt{2\pi h}} \int_0^{2\pi} \left[e^{i\tau/h} \varphi(\tau, \psi) \sqrt{\det(P; P_\psi)} \right]_{\tau=\tau(x, \psi)} d\psi. \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В данной работе срезающие функции в формулах (в (8) это $\varkappa(x)$) мы всегда выписываем явно, в отличие от [10] (где они для краткости опущены).

2. Основной результат

В весьма широких пределах формула, представляющая локализованную функцию $V(x/\mu)$ через канонический оператор, выглядит одинаково вне зависимости от того, какой конкретный смысл придается требованию достаточно быстрого убывания на бесконечности функции $V(y)$, так что с физической точки зрения выбор того

или иного условия не играет первостепенной роли. Однако оценка остаточного члена в этой формуле уже, естественно, зависит от того, какие условия наложены на $V(y)$. Из всего многообразия существующих здесь вариантов мы для определенности остановимся на следующем.

УСЛОВИЕ А. Преобразование Фурье (2) функции $V(y)$, $y \in \mathbb{R}^2$ – обычная (не обобщенная) функция, гладкая вне нуля, и удовлетворяет оценкам

$$|\tilde{V}^{(\beta)}(p)| \leq C_{\beta s} |p|^{-|\beta|} (1 + |p|)^{-s}, \quad |\beta|, s = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

с некоторыми (зависящими от функции V) постоянными $C_{\beta s}$.

ЗАМЕЧАНИЯ. В качестве некоторой мотивировки условия А отметим следующие обстоятельства.

1) Функции, удовлетворяющие условию А, действительно убывают на бесконечности (как $(1 + |y|)^{-2}$, причем при дифференцировании скорость убывания увеличивается); обратно, если $(1 + |y|)^{|\alpha|} V^{(\alpha)}(y) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ для всех α , то $V(y)$ удовлетворяет условию А (см. предложение 1 в Дополнении). Таким образом, хотя условие и сформулировано в удобных скорее для доказательства теоремы терминах преобразования Фурье, проверка его для исходной функции чаще всего не будет затруднительной. В частности, функции класса Шварца (и подавно финитные функции) ему удовлетворяют.

2) По-видимому, при переходе от функций, удовлетворяющих условию А, к функциям из класса Шварца (или даже финитным) не происходит радикального улучшения оценок для остаточного члена в формуле представления.

3) Условию А удовлетворяет (с некоторым запасом) функция

$$V(y) = \left(1 + \left(\frac{y_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{b_2}\right)^2\right)^{-3/2}$$

(ее преобразование Фурье есть $\tilde{V}(p) = \exp\{-\sqrt{b_1^2 p_1^2 + b_2^2 p_2^2}\}$), которая довольно широко используется в литературе (в частности, при моделировании локализованных начальных данных для волнового уравнения); упомянем здесь лишь работы [16]–[20], дальнейшую библиографию можно найти в [10].

ТЕОРЕМА. Пусть функция $V(y)$ удовлетворяет условию А. Тогда справедливо представление

$$V\left(\frac{x}{\mu}\right) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{-i\pi/4} \int_0^\infty [K_{\Lambda^2}^{\mu/\rho}(\tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi))e(\tau))](x) \sqrt{\rho} d\rho + R(x, \mu), \quad (10)$$

где $K_{\Lambda^2}^h$ – канонический оператор Маслова (8) на лагранжесовом многообразии Λ^2 , срезающая функция $e(\tau) \in C_0^\infty((-\delta, \delta))$ равна единице в окрестности нуля, а остаточный член $R(x, \mu)$ удовлетворяет при $\mu \rightarrow 0$ следующим оценкам:

$$|(-i\mu\nabla)^\alpha R(x, \mu)| \leq C_\alpha \mu, \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (11)$$

где $\nabla = \partial/\partial x$, с некоторыми постоянными C_α ;

$$\|R(x, \mu)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\mu^2 \sqrt{|\ln \mu|}, \quad \|\nabla R(x, \mu)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\mu \quad (12)$$

с некоторой постоянной C , которая, как и C_α , зависит от функции $V(y)$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Оценки (11) устанавливают малость остатка $R(x, \mu)$ и его μ -производных по x (т.е. производных по x , умноженных на μ в степени, равной порядку производной) в равномерной норме и показывают, что остаток действительно мал по сравнению с функцией $V(x/\mu)$ (у которой все μ -производные суть $O(1)$ в равномерной норме).

2) Оценки (12) не вытекают из оценок (11). Тот факт, что они все же верны, свидетельствует о том, что и остаток $R(x, \mu)$ является в каком-то смысле “локализованной” функцией. Оценки (12) очень важны, если представления вида (10) использовать при анализе волновых процессов. Квадрат модуля градиента (с точностью до множителя) имеет смысл плотности энергии, и вторая оценка из (12) означает, что энергетическая норма остатка $R(x, \mu)$ мала по сравнению с энергетической нормой самой функции $V(x/\mu)$, которая есть $O(1)$:

$$\iint \left| \nabla \left(V \left(\frac{x}{\mu} \right) \right) \right|^2 dx = \frac{1}{\mu^2} \iint \left| (\nabla V) \left(\frac{x}{\mu} \right) \right|^2 dx = \iint |\nabla V(y)|^2 dy = \text{const.}$$

Аналогично, первая оценка из (12) означает, что L^2 -норма остатка $R(x, \mu)$ мала по сравнению с L^2 -нормой самой функции $V(x/\mu)$, которая есть $O(\mu)$. Рассуждая как в доказательстве теоремы, несложно выписать оценки для L^2 -норм дальнейших производных. Мы опускаем их, так как они не имеют особого физического смысла.

3) Если рассматривать “анизотропное” волновое уравнение с гамильтонианом

$$H(x, p) = \sqrt{\sum a_{jk}(x) p_j p_k},$$

где $a_{jk}(x)$ – положительно определенный тензор квадрата скорости, то для построения лагранжева многообразия Λ^2 , инвариантного относительно гамильтонова векторного поля, траектории нужно выпускать не из окружности Λ_0^1 , а из эллипса

$$\tilde{\Lambda}_0^1 = \left\{ (x, p) \in \mathbb{R}^4 : x = 0, \sum a_{jk}(0) p_j p_k = 1 \right\}.$$

Результаты данной статьи можно применить и в этой ситуации, совершив линейную замену переменных x , такую, что двойственная замена в импульсных переменных приводит форму $\sum a_{jk}(0) p_j p_k$ к сумме квадратов.

3. Доказательство теоремы

Пусть $F(x, \mu)$ – правая часть формулы (10) без остаточного члена:

$$\begin{aligned} F(x, \mu) &= \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} e^{-i\pi/4} \int_0^\infty [K_{\Lambda^2}^{\mu/\rho}(\tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi))e(\tau))](x) \sqrt{\rho} d\rho \\ &= \frac{\varkappa(x)}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[e^{i\rho\tau/\mu} \tilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi))e(\tau) \sqrt{\det(P; P_\psi)} \right]_{\tau=\tau(x, \psi)} \rho d\rho d\psi. \end{aligned}$$

Вместо того, чтобы сравнивать функции $V(x/\mu)$ и $F(x, \mu)$ непосредственно, мы сравним их преобразования Фурье, а затем получим оценки для $R(x, \mu)$, возвращаясь к переменным x . Для этого запишем разность $R(x, \mu) = V(x/\mu) - F(x, \mu)$ в виде

$$R(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle p, x \rangle / \mu} (\tilde{V}(p) - W(p, \mu)) dp,$$

где функция $W(p, \mu)$ получается из $F(x, \mu)$ преобразованием Фурье. Выпишем ее:

$$\begin{aligned} W(p, \mu) &= \frac{1}{2\pi\mu^2} \iint e^{-i\langle p, x \rangle / \mu} F(x, \mu) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi\mu)^2} \int_0^\infty \iiint e^{(i/\mu)(\rho\tau(x, \psi) - \langle p, x \rangle)} \tilde{V}(\rho\mathbf{n}(\psi)) \chi(x, \psi) \rho d\rho d\psi dx \\ &= \left(\frac{r}{2\pi\mu}\right)^2 \int_0^\infty \iiint e^{(ir/\mu)(\xi\tau(x, \psi) - \langle \mathbf{n}(\omega), x \rangle)} \tilde{V}(r\xi\mathbf{n}(\psi)) \chi(x, \psi) \xi d\xi d\psi dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь обозначения пределов в интегралах, кроме интегралов по ρ и ξ , опущены,

$$\begin{aligned} \chi(x, \psi) &= \kappa(x) \left[e(\tau) \sqrt{\det(P(\tau, \psi); P_\psi(\tau, \psi))} \right] \Big|_{\tau=\tau(x, \psi)}, \\ \chi &\in C_0^\infty(U \times \mathbf{S}^1), \quad \chi(0, \psi) \equiv 1, \end{aligned}$$

и при переходе от второй строки к третьей мы представили p в виде $p = r\mathbf{n}(\omega)$ ($\omega \in \mathbf{S}^1$, $r = |p| \in [0, \infty)$) и сделали замену переменной интегрирования $\rho = r\xi$.

Итак, чтобы оценить $R(x, \mu)$, прежде всего мы оценим разность

$$\Delta(p, \mu) = \tilde{V}(p) - W(p, \mu). \quad (14)$$

Здесь удобно выделить два случая: $|p| \geq \mu$ и $|p| < \mu$.

3.1. Случай $|p| \geq \mu$. Интеграл (13) при $r = |p| \geq \mu$ мы исследуем с помощью метода стационарной фазы [15], причем в роли малого параметра будет выступать частное μ/r . Проведем сначала формальные вычисления. Найдем стационарные точки по переменным (x, ξ, ψ) фазовой функции

$$\Phi(x, \xi, \psi, \omega) = \xi\tau(x, \psi) - \langle \mathbf{n}(\omega), x \rangle \quad (15)$$

этого интеграла. Уравнения стационарной точки имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_x(x, \xi, \psi, \omega) &= \xi\tau_x(x, \psi) - \mathbf{n}(\omega) \\ &= \frac{\xi P(\tau(x, \psi), \psi)}{1 - \langle x - X(\tau(x, \psi), \psi), P_\tau(\tau(x, \psi), \psi) \rangle} - \mathbf{n}(\omega) = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Phi_\xi(x, \xi, \psi, \omega) = \tau(x, \psi) = 0, \quad (17)$$

$$\Phi_\psi(x, \xi, \psi, \omega) = \xi\tau_\psi(x, \psi) = \frac{\xi \langle x - X(\tau(x, \psi), \psi), P_\psi(\tau(x, \psi), \psi) \rangle}{1 - \langle x - X(\tau(x, \psi), \psi), P_\tau(\tau(x, \psi), \psi) \rangle} = 0; \quad (18)$$

в (16) и (18) мы воспользовались выражением для производных функции $\tau(x, \psi)$, данным в [10; первая формула без номера после (56)]. Найдем решение уравнений (16)–(18). Из (16) ясно, что $\xi \neq 0$. Тогда из (18) вытекает, что $\langle x - X, P_\psi \rangle = 0$. В сочетании с уравнением (7), определяющим функцию $\tau(x, \psi)$, и линейной независимостью векторов P и P_ψ ($\det(P; P_\psi) \neq 0$) это приводит к заключению, что $x = X(\tau(x, \psi), \psi) = X(0, \psi) = 0$ (мы воспользовались уравнением (17)). Теперь уравнение (16) приобретает вид $\xi\mathbf{n}(\psi) = \mathbf{n}(\omega)$, откуда окончательно получаем, что стационарная точка задается уравнениями

$$x = 0, \quad \xi = 1, \quad \psi = \omega. \quad (19)$$

Матрица вторых производных фазовой функции Φ в стационарной точке имеет вид (мы опускаем промежуточные вычисления)

$$\Phi''(0, 1, \omega, \omega) = \begin{pmatrix} \tau_{x_1 x_1}(0, \omega) & \tau_{x_1 x_2}(0, \omega) & \cos \omega & -\sin \omega \\ \tau_{x_2 x_1}(0, \omega) & \tau_{x_2 x_2}(0, \omega) & \sin \omega & \cos \omega \\ \cos \omega & \sin \omega & 0 & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Определитель этой матрицы равен единице (так что стационарная точка невырожденна), а сигнатура – нулю (два собственных значения положительны и два отрицательны). Поэтому формально вклад стационарной точки (19) в интеграл (13) в соответствии с [15; гл. III, теорема 2.1 и следствие 2.1] и с учетом того факта, что $\Phi(0, 1, \omega, \omega) = 0$, равен $\tilde{V}(p)$.

Проведем теперь соответствующие оценки.

Заметим, что $\tau_x = P(1 - \langle x - X, P_\tau \rangle)^{-1}$ не обращается в нуль (это противоречило бы первому соотношению в (5)). Положим

$$a = \frac{1}{2 \max |\tau_x(x, \psi)|}, \quad b = \frac{2}{\min |\tau_x(x, \psi)|},$$

где и максимум, и минимум берутся по множеству $\text{supp } \chi$. Поскольку $|\mathbf{n}(\omega)| = 1$, из определения a и b и формулы (16) следует, что на носителе подынтегрального выражения в (13) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\Phi_x| &\geq \frac{1}{2} && \text{при } \xi \in [0, a], \\ |\Phi_x| &\geq \frac{2}{b} \xi && \text{при } \xi \in [b, \infty). \end{aligned}$$

На полуоси $\mathbb{R}_+$ выберем разбиение единицы

$$1 = \theta_1(\xi) + \theta_2(\xi) + \theta_3(\xi), \quad \text{supp } \theta_1 \subset [0, a], \quad \text{supp } \theta_2 \subset [a/2, 2b], \quad \text{supp } \theta_3 \subset [b, \infty)$$

и представим интеграл (13) в виде

$$W(p, \mu) = W_1(p, \mu) + W_2(p, \mu) + W_3(p, \mu),$$

где для $j = 1, 2, 3$

$$W_j(p, \mu) = \left(\frac{r}{2\pi\mu} \right)^2 \int_0^\infty \iiint e^{(ir/\mu)\Phi(x, \xi, \psi, \omega)} \tilde{V}(r\xi\mathbf{n}(\psi)) \chi(x, \psi) \xi \theta_j(\xi) d\xi d\psi dx. \quad (21)$$

Оценим W_1 . Для этого, пользуясь соотношением $\Phi_x \geq 1/2$, проинтегрируем N раз по частям по переменным x , подводя экспоненту под знак дифференциала (при этом дифференцированию будет подвергаться только множитель $\chi(x, \psi)$ в амплитуде). При каждом интегрировании будет возникать множитель μ/r . Учитывая, что область интегрирования компактна, а подынтегральное выражение ограничено, получим оценку

$$|W_1(p, \mu)| \leq C_N \left(\frac{\mu}{|p|} \right)^{N-2}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (22)$$

Далее оценим W_3 . Для этого опять N раз проинтегрируем по частям. На сей раз при каждом интегрировании будет возникать множитель $\mu/(r\xi)$, и с учетом быстрого убывания функции $\tilde{V}(q)$ при $q \rightarrow \infty$ получим (здесь $s > \max\{0, 2 - N\}$)

$$\begin{aligned} |W_3(p, \mu)| &\leq \tilde{C}_{Ns} \left(\frac{\mu}{r}\right)^{N-2} \int_b^\infty \frac{\xi^{1-N} d\xi}{(1+r\xi)^s} \\ &= \tilde{C}_{Ns} \left(\frac{\mu}{r}\right)^{N-2} \int_b^\infty \frac{\xi^{1-N-s} d\xi}{(r+1/\xi)^s} \leq C_{Ns} \mu^{N-2} |p|^{-s}, \quad N = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (23)$$

Обратимся теперь к интегралу W_2 . Стационарная точка (19) лежит как раз на носителе подынтегрального выражения W_2 . Поскольку в силу быстрого убывания функции $\tilde{V}(q)$ и ее производных на бесконечности и выполненных на носителе подынтегрального выражения соотношений $a/2 \leq \xi \leq 2b$ и $|\mathbf{n}(\psi)| = 1$ производные амплитудной функции $V(r\xi\mathbf{n}(\psi))\chi(x, \psi)\xi\theta_2(\xi)$ этого интеграла удовлетворяют оценкам

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial(x, \xi, \psi)^\alpha} V(r\xi\mathbf{n}(\psi))\chi(x, \psi)\xi\theta_2(\xi) \right| \leq C_{\alpha s} (1+r)^{-s}, \quad |\alpha|, s = 0, 1, 2, \dots,$$

мы заключаем в соответствии с [15; гл. III, теорема 2.1 и следствие 2.1], что

$$W_2(p, \mu) = \tilde{V}(p) + Q(p, \mu), \quad (24)$$

где остаточный член $Q(p, \mu)$ удовлетворяет оценкам

$$|Q(p, \mu)| \leq C_s \frac{\mu}{|p|} (1+|p|)^{-s}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (25)$$

3.2. Случай $|p| < \mu$. В этом случае подынтегральные выражения в W_1 и W_2 ограничены, частное $|p|/\mu$ ограничено, и потому ввиду ограниченности промежутка интегрирования

$$|W_1(p, \mu)| + |W_2(p, \mu)| \leq C \quad \text{при} \quad |p| < \mu. \quad (26)$$

Кроме того, в силу условия A справедлива оценка

$$|\tilde{V}(p)| \leq C \quad \text{при} \quad |p| < \mu. \quad (27)$$

Займемся оценкой интеграла I_3 . Мы воспользуемся первой строкой в (23) и далее при $N = 2, 3$ и достаточно большом s находим

$$\begin{aligned} |W_3(p, \mu)| &\leq \text{const} \int_b^\infty \frac{\xi^{-1} d\xi}{(1+r\xi)^s} = \text{const} \int_{br}^\infty \frac{\xi^{-1} d\xi}{(1+\xi)^s} \leq \text{const} |\ln |p||, \\ |W_3(p, \mu)| &\leq \text{const} \frac{\mu}{r} \int_b^\infty \frac{\xi^{-2} d\xi}{(1+r\xi)^s} \leq \text{const} \frac{\mu}{|p|}, \end{aligned}$$

так что окончательно

$$|W_3(p, \mu)| \leq C \min \left\{ |\ln |p||; \frac{\mu}{|p|} \right\}. \quad (28)$$

3.3. Оценка остатка $R(x, \mu)$. Из результатов предыдущих двух пунктов получаем (слегка огрубляя их), что разность $\Delta(p, \mu)$ удовлетворяет следующей оценке:

$$|\Delta(p, \mu)| \leq C \begin{cases} \frac{\mu^N}{|p|^N} + \frac{\mu}{|p|(1+|p|)^N}, & |p| \geq \mu, \\ \min \left\{ |\ln |p||; \frac{\mu}{|p|} \right\}, & |p| < \mu. \end{cases} \quad (29)$$

(Здесь N произвольно велико, а постоянная, разумеется, зависит от N .) Оценим функцию $R(x, \mu)$ и ее производные, которые задаются формулой

$$(-i\mu\nabla)^\alpha R(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\langle p, x \rangle / \mu} p^\alpha \Delta(p, \mu) dp. \quad (30)$$

Чтобы получить оценки (11), представим правую часть формулы (30) в виде $J_1 + J_2$, где J_1 – интеграл по области $|p| \leq \mu$, а J_2 – интеграл по области $|p| \geq \mu$. Переходя к полярным координатам, можно оценить J_1 следующим образом:

$$|J_1| \leq \text{const} \int_0^\mu \min \left\{ |\ln r|; \frac{\mu}{r} \right\} r^{|\alpha|+1} dr = \text{const} \left(\int_0^{r_*} |\ln r| r^{|\alpha|+1} dr + \mu \int_{r_*}^\mu r^{|\alpha|} dr \right)$$

где $r_* \in (0, \mu)$ находится из уравнения $r_* |\ln r_*| = \mu$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mu \int_{r_*}^\mu r^{|\alpha|} dr &= O(\mu^{|\alpha|+2}), \\ \int_0^{r_*} |\ln r| r^{|\alpha|+1} dr &= \frac{1}{|\alpha|+2} |\ln r_*| r_*^{|\alpha|+2} (1 + o(1)) \\ &\leq \text{const} \frac{(|\ln r_*| r_*)^{|\alpha|+2}}{|\ln r_*|^{|\alpha|+1}} = \text{const} \frac{\mu^{\alpha+2}}{|\ln r_*|^{|\alpha|+1}} = o(\mu^{|\alpha|+2}), \end{aligned}$$

так что $J_1 = O(\mu^{|\alpha|+2})$. Далее, аналогичным образом переходя к полярным координатам, получаем при достаточно большом N , что

$$|J_2| \leq \text{const} \left(\int_\mu^\infty \mu^N r^{|\alpha|+1-N} dr + \mu \int_\mu^\infty (1+r)^{-N} r^\alpha dr \right) = O(\mu),$$

и мы приходим к оценкам (11).

Получим теперь оценки (12). Заметим прежде всего, что из (30) по теореме Парсеваля вытекает соотношение

$$\|(-i\mu\nabla)^\alpha R\|_{L^2} = \mu \|p^\alpha \Delta\|_{L^2}.$$

Разбивая аналогично предыдущему интеграл в определении нормы $\|p^\alpha \Delta\|_{L^2}$ в сумму интегралов по трем областям $|p| \leq r_*$, $r_* \leq |p| \leq \mu$ и $|p| \geq \mu$, где по-прежнему $r_* |\ln r_*| = \mu$, переходя к полярным координатам и используя оценки (29), получаем при $\alpha = 0$ (мы опускаем более подробные выкладки)

$$\begin{aligned} \|\Delta\|_{L^2}^2 &\leq \text{const} \left(\int_0^{r_*} |\ln r|^2 r dr + \int_{r_*}^\mu \frac{\mu^2}{r^2} r dr + \int_\mu^\infty \frac{\mu^{2N}}{r^{2N}} r dr + \int_\mu^\infty \frac{\mu^2}{r^2} \frac{r dr}{1+r^N} \right) \\ &= O(\mu^2) + O(\mu^2 |\ln \mu|) + O(\mu^2) + O(\mu^2 |\ln \mu|) = O(\mu^2 |\ln \mu|), \end{aligned}$$

а при $|\alpha| = 1 -$

$$\begin{aligned} \|p\Delta\|_{L^2}^2 &\leq \text{const} \left(\int_0^{r_*} |\ln r|^2 r^3 dr + \int_{r_*}^{\mu} \frac{\mu^2}{r^2} r^3 dr + \int_{\mu}^{\infty} \frac{\mu^{2N}}{r^{2N}} r^3 dr + \int_{\mu}^{\infty} \frac{\mu^2}{r^2} \frac{r^3 dr}{1+r^N} \right) \\ &= O\left(\frac{\mu^4}{(\ln \mu)^2}\right) + O(\mu^4) + O(\mu^4) + O(\mu^2) = O(\mu^2), \end{aligned}$$

так что $\|R\|_{L^2} = \mu\|\Delta\|_{L^2} = O(\mu^2\sqrt{\ln \mu})$, $\|\nabla R\|_{L^2} = \|p\Delta\|_{L^2} = O(\mu)$, и теорема доказана.

Дополнение. О функциях, удовлетворяющих условию **A**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. (i) Пусть функция $V \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ удовлетворяет условию

$$(1 + |y|)^{|\alpha|} V^{(\alpha)}(y) \in L^1(\mathbb{R}^2), \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

Тогда она удовлетворяет и условию **A**.

(ii) Если функция $V(y)$ удовлетворяет условию **A**, то она удовлетворяет и оценкам

$$|V^{(\alpha)}(y)| \leq C_\alpha (1 + |y|)^{-|\alpha|-2}, \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \dots, \quad (32)$$

с некоторыми постоянными C_α (и, в частности, лежит в пространстве $L^2(\mathbb{R}^2)$ вместе со всеми своими производными).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Непрерывность функции $\tilde{V}(p)$ и оценки (9) при $\beta = 0$ вытекают из того, что функция $V(y)$ и все ее производные лежат в пространстве $L^1(\mathbb{R}^2)$. Далее, в силу неравенств $|p^\beta| \leq |p|^{|\beta|} \leq 2^{|\beta|} \max_{|\gamma|=|\beta|} |p^\gamma|$, оценки (9) при $\beta = \tilde{\beta}$ эквивалентны оценкам

$$|p^\gamma \tilde{V}^{(\tilde{\beta})}(p)| \leq C_{\tilde{\beta}s} (1 + |p|)^{-s}, \quad |\gamma| = |\tilde{\beta}|, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

(с другими постоянными $C_{\tilde{\beta}s}$), т.е. оценкам вида (9) с $\beta = 0$ для функций $p^\gamma \tilde{V}^{(\tilde{\beta})}(p)$, так что в силу уже доказанного достаточно показать, с учетом свойств преобразования Фурье, что если функция $V(x)$ обладает свойством (31), то им же обладает и функция $(x^{\tilde{\beta}} V(x))^{(\gamma)}$ при $|\gamma| = |\tilde{\beta}|$. Последнее же очевидно.

(ii) Поскольку все функции $V^{(\alpha)}(y)$ гладкие, оценки (32) достаточно доказать при больших $|y|$. Для доказательства возьмем гладкое разбиение единицы в $\mathbb{R}^2$ вида $e_1(p) + e_2(p) = 1$, $\text{supp } e_1 \subset \{|p| < 2\}$, $\text{supp } e_2 \subset \{|p| > 1\}$, и представим $V^{(\alpha)}(y)$ в виде

$$V^{(\alpha)}(y) = \frac{1}{2\pi} \iint e^{i\langle p, y \rangle} e_1(p|y|) p^\alpha \tilde{V}(p) dp + \frac{1}{2\pi} \iint e^{i\langle p, y \rangle} e_2(p|y|) p^\alpha \tilde{V}(p) dp \equiv I_1 + I_2.$$

Область интегрирования в интеграле I_1 содержится в круге $\{|p| < 2/|y|\}$. Так как функция $\tilde{V}(p)$ ограничена, переходя к полярным координатам, получаем

$$|I_1| \leq \text{const} \int_0^{2/|y|} t^{|\alpha|+1} dt \leq \text{const} |y|^{-|\alpha|-2}.$$

Для оценки интеграла I_2 воспользуемся тождеством

$$\frac{i}{|y|} \left\langle \Omega, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle e^{i\langle p, y \rangle} = -e^{i\langle p, y \rangle}, \quad \text{где } \Omega = \frac{y}{|y|},$$

и проинтегрируем по частям $n = |\alpha| + 3$ раз; в результате получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{i^n}{2\pi|y|^n} \iint e^{i\langle p, y \rangle} \left\langle \Omega, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle^n (e_2(p|y|) p^\alpha \tilde{V}(p)) dp \\ &= \frac{i^n}{2\pi} \sum_{k=0}^n C_n^k \iint e^{i\langle p, y \rangle} |y|^{-n} \left[\left\langle \Omega, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle^{n-k} e_2(p|y|) \right] \left[\left\langle \Omega, \frac{\partial}{\partial p} \right\rangle^k (p^\alpha \tilde{V}(p)) \right] dp \\ &\equiv \sum_{k=0}^n I_{2k}. \end{aligned}$$

Во всех интегралах I_{2k} , кроме последнего ($k = n$), область интегрирования содержится в кольце $\{|y|^{-1} \leq |p| \leq 2|y|^{-1}\}$, а в последнем – во множестве $\{|p| > |y|^{-1}\}$. Из оценок (9) следует, что подынтегральное выражение в I_{2k} оценивается через $\text{const}|y|^{-k}|p|^{|\alpha|-k}(1+|p|)^{-s}$, где s произвольно велико. Переходя к полярным координатам, для интегралов I_{2k} получаем оценки

$$\begin{aligned} |I_{2k}| &\leq \text{const}|y|^{-k} \int_{1/|y|}^{2/|y|} r^{|\alpha|-k+1} dr \\ &\leq \text{const}|y|^{-k} = \text{const}|y|^{-|\alpha|-2}, \quad k \leq n-2 = |\alpha|+1; \\ |I_{2,n-1}| &\leq \text{const}|y|^{-n+1} \int_{1/|y|}^{2/|y|} r^{-1} dr \\ &= \text{const}|y|^{-|\alpha|-2} \ln 2, \quad k = n-1 = |\alpha|+2; \\ |I_{2n}| &\leq \text{const}|y|^{-n} \int_{1/|y|}^{\infty} \frac{r^{-2} dr}{(1+r)^s} \\ &\leq \text{const}|y|^{-|\alpha|-3}|y| = \text{const}|y|^{-|\alpha|-2}, \quad k = n = |\alpha|+3. \end{aligned}$$

Складывая все эти оценки, завершаем доказательство.

Автор признателен С. Ю. Доброхотову за внимание и поддержку.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [2] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, А. И. Шафаревич, “Представления быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова”, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 792–796.
- [3] С. Ю. Доброхотов, П. Н. Жевандров, В. П. Маслов, А. И. Шафаревич, “Асимптотические быстроубывающие решения линейных строго гиперболических систем с переменными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **49**:4 (1991), 31–46.
- [4] S. Dobrokhotov, S. Sekerzh-Zenkovich, B. Tirozzi, T. Tudorovski, “Asymptotic theory of tsunami waves: geometrical aspects and the generalized Maslov representation”, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **4**:1482 (2006), 118–153.

- [5] С. Ю. Доброхотов, С. Я. Секерж-Зенькович, Б. Тироцци, Т. Я. Тудоровский, “Описание распространения волн цунами на основе канонического оператора Маслова”, *Докл. РАН*, **409**:2 (2006), 171–175.
- [6] S. Dobrokhotov, S. Sekerzh-Zenkovich, B. Tirozzi, B. Volkov, “Explicit asymptotics for tsunami waves in framework of the piston model”, *Russ. J. Earth Sci.*, **8** (2006), ES4003.
- [7] S. Yu. Dobrokhotov, A. I. Shafarevich, B. Tirozzi, “Localized wave and vortical solutions of linear hyperbolic systems and their application to the linear shallow water equations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **15**:2 (2008), 192–221.
- [8] S. Yu. Dobrokhotov, B. Tirozzi, C. A. Vargas, “Behavior near the focal points of asymptotic solutions to the Cauchy problem for the linearized shallow water equations with initial localized perturbations”, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:2 (2009), 228–245.
- [9] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, Библиотека математика, **1**, Фазис, М., 1996.
- [10] С. Ю. Доброхотов, Г. Н. Макракис, В. Е. Назайкинский, Т. Я. Тудоровский, “Новые формулы для канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек и каустик в двумерных квазиклассических асимптотиках”, *ТМФ*, **177**:3 (2013), 355–386.
- [11] S. Yu. Dobrokhotov, S. O. Sinitsyn, B. Tirozzi, “Asymptotics of localized solutions of the one-dimensional wave equation with variable velocity. I. The Cauchy problem”, *Russ. J. Math. Phys.*, **14**:1 (2007), 28–56.
- [12] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, Б. Тироцци, “Асимптотические решения двумерного модельного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и локализованными начальными данными”, *Алгебра и анализ*, **22**:6 (2010), 67–90.
- [13] S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, B. Tirozzi, “Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and asymptotic solutions with localized initial data”, *Russ. J. Math. Phys.*, **20**:4 (2013), 389–401.
- [14] L. Hörmander, “Fourier integral operators. I”, *Acta Math.*, **127** (1971), 79–183.
- [15] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
- [16] С. Ф. Доценко, Б. Ю. Сергиевский, Л. В. Черкасов, “Пространственные волны цунами, вызванные знакопеременным смещением поверхности океана”, *Исследования цунами*, 1986, № 1, 7–14.
- [17] S. Wang, “The propagation of the leading wave”, *Coastal Hydrodynamics*, ASCE Specialty Conference on Coastal Hydrodynamics (June 28–July 1, University of Delaware), American Society of Civil Engineers, New York, NY, 1987, 657–670.
- [18] Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 1996.
- [19] S. Ya. Sekerzh-Zenkovich, “Simple asymptotic solution to the Cauchy–Poisson problem for leading waves”, *Russ. J. Math. Phys.*, **16**:2 (2009), 315–322.
- [20] С. Ю. Доброхотов, С. Я. Секерж-Зенькович, “Один класс точных алгебраических локализованных решений многомерного волнового уравнения”, *Матем. заметки*, **88**:6 (2010), 942–945.

В. Е. Назайкинский

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского
РАН, г. Москва,
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: nazaikinskii@yandex.ru

Поступило

11.04.2014