Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пернай, Пространства, порожденные обобщенной мажорантой частных сумм, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 1, 153–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:29:55

Пространства, порожденные обобщенной мажорантой частных сумм

В. В. Пернай

Исследование вопросов сходимости рядов вида

$$\sum_k a_k f_k(x)$$

по системе функций $\{f_k(x)\}$, заданных на некотором множестве X , сводится обычно к оценке мажорант частных сумм

$$S_n^*(\{a_k\}, x) = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{k=1}^i a_k f_k(x) \right|.$$

Но уже при рассмотрении различных видов сходимости кратных рядов

$$\sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(x_1, \dots, x_d),$$

где $\vec{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, возникает потребность в оценках мажорант более общего вида

$$S_n^*(\{a_k\}) = \sup_{\omega \in \Omega_n} \left| \sum_{\vec{k} \in \omega} a_{\vec{k}} f_{\vec{k}}(x_1, \dots, x_d) \right|, \quad (1)$$

где Ω_n – некоторое семейство подмножеств $\mathbb{Z}^d$, $n = 1, \dots$. Примером семейства Ω_n является совокупность всех “параллелепипедов”

$$P = \{ \{1, \dots, k_1\} \times \dots \times \{1, \dots, k_d\} \subset \{0, \dots, n\}^d \}. \quad (2)$$

В работе [1; теорема 2] были получены оценки мажорант (1), зависящие от геометрических свойств семейства Ω_n . В [2], [3] был установлен аналог классической теоремы Меньшова об исправлении для дискретных ортонормированных систем $\{\varphi_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^N$ в пространствах, норма в которых определяется с помощью обобщенной мажоранты

$$\|\{a_k\}_{k=1}^n\| = \sup_{\omega \in \Omega_n} \left\| \sum_{k \in \omega} a_k \varphi_k \right\|_{l_\infty^N}. \quad (3)$$

При этом на семейства Ω_n накладывалось условие, ограничивающее их “сложность”. Точнее предполагалось, что для семейства Ω_n подмножеств отрезка $\{1, \dots, n\}$ натурального ряда при некотором $\rho < 1$ найдутся семейства Δ_s , $\emptyset \in \Delta_s$, с числом элементов $\#\Delta_s < C_0 \exp \exp s^\rho$, $s = 1, \dots, s_0$, такие, что каждое множество $\omega \in \Omega_n$ допускает представление в виде

$$\omega = \bigcup_{s=1}^{s_0} E_s, \quad E_s \in \Delta_s, \quad \#E_s \leq \frac{n}{2^s}, \quad E_s \cap E_{s'} = \emptyset \quad \text{при} \quad s \neq s'. \quad (4)$$

В этой работе продолжается изучение пространств с нормой вида (3). Установленные ниже результаты также предполагают ограничения на “сложность” семейств Ω_n . Эти условия отличаются от (4) и являются более строгими, однако охватывают несколько случаев представляющих интерес для теории функциональных рядов.

Ниже для $n = 1, \dots$, фиксированных $\alpha \geq 1$ и $\beta \geq 0$ будем рассматривать семейства $\Omega_n^{\alpha, \beta}$ подмножеств множества $\{1, \dots, n\}$ такие, что для каждого множества $\omega \in \Omega_n^{\alpha, \beta}$ имеет место

разложение (4) и при этом $\#\Delta_s \leq C_0 N^\beta \exp s^\alpha$, где $s = 0, \dots, s_0$, $\emptyset \in \Delta_s$ и C_0 – абсолютная постоянная. Для произвольной дискретной системы $\{\varphi_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}^N$, $n \leq N$, норма вида (3), где $\sup$ берется по множествам из $\Omega_n^{\alpha, \beta}$, задает банахово пространство, которое обозначим $U(\Omega_n^{\alpha, \beta})$.

Заметим, что рассматриваемый класс пространств охватывает случай “параллелепипедов” (2), когда семейства $\Omega_n^{\alpha, \beta}$ можно задать так, что $\#\Delta_s \leq n^{d-1} \cdot 2^s$.

Напомним, что при $p \in [1, 2]$ банахово пространство U называется пространством типа p , если найдется постоянная C такая, что неравенство

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right\|_U \leq C \left(\sum_{i=1}^m \|x_i\|_U^p \right)^{1/p},$$

где $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^m$ – последовательность независимых случайных величин, равных ± 1 с вероятностью $1/2$, выполняется для любой конечной последовательности $\{x_i\}_{i=1}^m \subset U$.

ТЕОРЕМА 1. *Пространство $U(\Omega_n^{\alpha, \beta})$ является пространством типа 2 с постоянной $K(\varepsilon, \beta, C)(\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}$, где ε – произвольное число больше 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности для заданного набора $\{x_i\}_{i=1}^m \subset U(\Omega_n^{\alpha, \beta})$ можно считать, что $\sum_{i=1}^m \|x_i\|_{U(\Omega_n^{\alpha, \beta})}^2 = 1$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right\|_{U(\Omega_n^{\alpha, \beta})} &= \int_0^\infty \mathbb{P} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right\|_{U(\Omega_n^{\alpha, \beta})} > y \right\} dy \\ &= \int_0^{C_1 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}} \mathbb{P} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right\|_{U(\Omega_n^{\alpha, \beta})} > y \right\} dy \\ &\quad + \int_{C_1 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}}^\infty \mathbb{P} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right\|_{U(\Omega_n^{\alpha, \beta})} > y \right\} dy \\ &\leq \int_0^{C_1 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}} 1 dy \\ &\quad + \int_{C_1 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}}^\infty \mathbb{P} \left\{ \left\| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right\|_{U(\Omega_n^{\alpha, \beta})} > y \right\} dy \\ &= C_1 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon} + J_1. \end{aligned}$$

Далее, координаты векторов $\varphi \in \mathbb{R}^N$ в стандартном базисе будем обозначать $(\varphi)_j$, $1 \leq j \leq N$. Получаем, что

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \int_{C_1 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}}^\infty \mathbb{P} \left\{ \sup_{\Lambda \in \Omega_\alpha} \sup_{1 \leq k \leq N} \left| \left(\sum_{j \in \Lambda} \left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i x_i \right)_j \right)_k \right| > y \right\} dy \\ &\leq \int_{C_1 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}}^\infty \sum_{k=1}^N \mathbb{P} \left\{ \sup_{\bigcup E_s \in \Omega_\alpha} \left| \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{j \in E_s} \left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i (x_i)_j \right) (\varphi)_k \right| > y \sum_{s=1}^{s_0} \frac{C_\varepsilon}{s^{1+\varepsilon}} \right\} dy \\ &\leq \int_{C_1 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}}^\infty \sum_{k=1}^N \mathbb{P} \left\{ \sum_{s=1}^{s_0} \sup_{E_s \in \Delta_s} \left| \sum_{j \in E_s} \left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i (x_i)_j \right) (\varphi)_k \right| > \sum_{s=1}^{s_0} \frac{C_\varepsilon y}{s^{1+\varepsilon}} \right\} dy \\ &\leq \sum_{k=1}^N \int_{C_1 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}}^\infty \sum_{s=1}^{s_0} \mathbb{P} \left\{ \sup_{E_s \in \Delta_s} \left| \sum_{j \in E_s} \left(\sum_{i=1}^m \varepsilon_i (x_i)_j \right) (\varphi)_k \right| > \frac{C_\varepsilon y}{s^{1+\varepsilon}} \right\} dy \\ &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{s_0} \#\Delta_s \int_{C_1 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}}^\infty \mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \left(\sum_{j \in E_s} (x_i)_j (\varphi)_k \right) \right| > \frac{C_\varepsilon y}{s^{1+\varepsilon}} \right\} dy = J_2. \end{aligned}$$

Далее, применив классический результат А. Я. Хинчина (см., например [4; теорема 2.5]), получаем

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{s_0} \# \Delta_s \int_{C_1(\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}}^{\infty} \exp\left(-\frac{C_\varepsilon^2 y^2}{2s^{2(1+\varepsilon)} \cdot (\sum_{i=1}^m (\sum_{j \in E_s} (x_i)_j (\varphi_j)_k)^2)}\right) dy \\ &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{s_0} \# \Delta_s \int_{C_1(\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}}^{\infty} \exp\left(-\frac{C_\varepsilon^2 y^2}{2s^{2(1+\varepsilon)}}\right) dy = J_3. \end{aligned}$$

Учитывая, что $y/a > 1$ при $y \in (a, \infty)$, $a > 0$, можно получить следующее несложное неравенство:

$$\int_a^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy < \int_a^\infty \frac{y}{a} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = \frac{1}{a} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right).$$

Из него простой заменой переменных получается, что для $b > 0$ верно

$$\int_a^\infty \exp\left(-\frac{b^2 y^2}{2}\right) dy = \frac{1}{b} \int_{ab}^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy < \frac{1}{ab^2} \exp\left(-\frac{a^2 b^2}{2}\right).$$

Используя данное неравенство, а также то, что $s \leq 2 \log N$, получаем следующую оценку для J_3 :

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^{s_0} \# \Delta_s \frac{s^{2(1+\varepsilon)}}{C_1 C_\varepsilon^2 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}} \cdot \exp\left(-\frac{C_1^2 C_\varepsilon^2 (\log N)^{\alpha+2(1+\varepsilon)}}{2s^{2(1+\varepsilon)}}\right) \\ &\leq N^{\beta+1} \sum_{s=1}^{s_0} \frac{C_0 s^{2(1+\varepsilon)}}{C_1 C_\varepsilon^2 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}} \cdot \exp\left(s^\alpha - \frac{C_1^2 C_\varepsilon^2 (\log N)^{\alpha+2(1+\varepsilon)}}{2s^{2(1+\varepsilon)}}\right) \\ &\leq N^{\beta+1} \sum_{s=1}^{s_0} \frac{C_0 (2 \log N)^{2(1+\varepsilon)}}{C_1 C_\varepsilon^2 (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}} \cdot \exp\left((2 \log N)^\alpha - \frac{C_1^2 C_\varepsilon^2 (\log N)^{\alpha+2(1+\varepsilon)}}{2(2 \log N)^{2(1+\varepsilon)}}\right) \\ &\leq 2N^{\beta+1} \log N \cdot \frac{C_0 \cdot 4^{1+\varepsilon}}{C_1 C_\varepsilon^2 (\log N)^{\alpha/2-1-\varepsilon}} \cdot \exp\left((2 \log N)^\alpha - \frac{C_1^2 C_\varepsilon^2}{2 \cdot 4^{1+\varepsilon}} (\log N)^\alpha\right) \\ &= \frac{2C_0 \cdot 4^{1+\varepsilon}}{C_1 C_\varepsilon^2} (\log N)^{2-\alpha/2+\varepsilon} \cdot N^{\beta+1+(2^\alpha - C_1^2 C_\varepsilon^2 / (2 \cdot 4^{1+\varepsilon})) \cdot (\log N)^{\alpha-1}} = J_4. \end{aligned}$$

По условию $\alpha \geq 1$. Следовательно, $2 - \alpha/2 + \varepsilon \leq 1 + \alpha - \alpha/2 + \varepsilon = \alpha/2 + 1 + \varepsilon$. При соответствующем выборе константы C_1 получаем, что

$$J_4 \leq K(\varepsilon, \beta, C) (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon},$$

где $K(\varepsilon, \beta, C)$ – постоянная, зависящая от ε , β и C . Следовательно, пространство $U(\Omega_n^{\alpha, \beta})$ является пространством типа 2 с постоянной $K(\varepsilon, \beta, C) (\log N)^{\alpha/2+1+\varepsilon}$.

Теорема 1 позволяет получить обобщение результата работы Бургейна и Кашина [7] об оценках Φ -поперечников. Напомним, что для данной системы $\Phi = \{\varphi_i\} \subset U$ Φ -поперечником порядка n множества F в банаховом пространстве U называется величина

$$d_n^\Phi(F, U) = \inf_{G_n} \sup_{f \in F} \text{dist}_U(f, G_n),$$

где $\inf$ берется по всем подпространствам вида

$$G_n = \text{span}(\{\varphi_i\}_{i \in \Lambda}), \quad |\Lambda| = n.$$

В работе [5] приведены оценки Φ -поперечника для пространства l_∞^N в случае, когда вектора φ_i ортонормированы. В работе [7] этот результат был расширен на произвольную линейно-независимую систему векторов с равномерно ограниченными нормами в l_∞^N . Используя метод работы [7], а также теорему 1, получаем

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Phi = \{\varphi\}_{i=1}^n$ – набор линейно-независимых функций в L_2^N таких, что

$$\|\varphi_i\|_\infty \leq M, \quad 1 \leq i \leq n,$$

и

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \mid \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \leq 1 \right\}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого целого k , $1 \leq k \leq n$, верно неравенство

$$d_k^\Phi(F, U(\Omega_n^{\alpha, \beta})) \leq K(\varepsilon, \beta, C) M (\log N)^{4+\alpha/2+\varepsilon} \sqrt{\frac{n}{k}}.$$

Автор благодарен Б. С. Кашину за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. С. Кашин, С. Й. Шарек, *Матем. заметки*, **58**:2 (1995), 218–230. [2] Б. С. Кашин, *Матем. заметки*, **46**:6 (1989), 67–74. [3] Б. С. Кашин, *Матем. заметки*, **62**:6 (1997), 937–939. [4] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999. [5] O. Guedon, S. Mendelson, A. Pajor, N. Tomczak-Jaegermann, *Positivity*, **11**:2 (2007), 269–283. [6] J. Bourgain, A. Pajor, S. J. Szarek, N. Tomczak-Jaegermann, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Math., **1376**, Springer-Verlag, Berlin, 50–63. [7] Ж. Бургейн, Б. С. Кашин, *Матем. сб.*, **203**:12 (2012), 57–80.

В. В. Пернай

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: vladimir.pernay@gmail.com

Поступило

20.09.2013