Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Журавлёва, Диофантовы свойства степеней некоторых чисел Пизо, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 1, 148–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:53:01

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Диофантовы свойства степеней некоторых чисел Пизо

В. В. Журавлева

1. Введение. Пусть α – это число Пизо, т.е. такое целое алгебраическое число, что оно само больше 1, а его сопряженные лежат строго внутри единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Минимальный многочлен для α обозначим

$$P(x) = x^d - a_1x^{d-1} - a_2x^{d-2} - \dots - a_kx^{d-k} - \dots - a_{d-1}x - a_d, \quad \text{где } a_i \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим последовательность $X = (x_n)_{n=1}^\infty$ с $x_n \rightarrow 0$, которая удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \dots + a_kx_{n-k} + \dots + a_{d-1}x_{n-d+1} + a_dx_{n-d}. \quad (1)$$

Примером такой последовательности является геометрическая прогрессия $(\alpha^n)_{n=1}^\infty$.

В настоящей статье мы исследуем величину

$$L(X) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi x_n\|.$$

(Здесь и далее $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого, в то время как $\{\cdot\}$ – это дробная часть, а $[\cdot]$ – это целая часть.)

Известен следующий результат (см. книгу Касселса [1]).

ТЕОРЕМА 1. Если ξ – целое алгебраическое число из поля $\mathbb{Q}(\alpha)$, то последовательность $\|\xi \alpha^n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Очевидно, что в формулировке теоремы 1 последовательность $(\alpha^n)_{n=1}^\infty$ можно заменить на X .

Перейдем к нижним оценкам $L(X)$. Последовательность $X = (x_n)_{n=1}^\infty$ является лакунарной, т.е. для некоторого $M > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \geq 1 + \frac{1}{M}.$$

В 1924 году было доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2 (Хинчин [2]). Если $X = (x_n)_{n=1}^\infty$ – лакунарная последовательность, то найдутся такие $\xi \in \mathbb{R}$ и $\gamma > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\|\xi x_n\| \geq \gamma.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00681-а).

DOI: 10.4213/mzm10479

Следовательно, $L(X) \geq \gamma > 0$.

Напомним определение приведенной длины многочлена, которое ввел Дубицкас в [3] (будем обозначать ее через $d(P)$). Для этого рассмотрим множество

$$\Gamma = \{g_0 + g_1x + \dots + g_mx^m \in \mathbb{R}[x] : g_0 = 1 \text{ или } g_m = 1\}.$$

Положим

$$d(P) := \inf_{G \in \Gamma} D(PG),$$

где $D(\cdot)$ – это обычная длина многочлена. Тогда верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3 (Дубицкас [3]). *Если $\xi \notin \mathbb{Q}(\alpha)$, то*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\xi \alpha^n\} - \liminf_{n \rightarrow \infty} \{\xi \alpha^n\} \geq \frac{1}{d(P)},$$

где P – это минимальный многочлен для α .

Заметим, что из теоремы 3 можно получить верхнюю оценку $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi x_n\|$ (но не для всех ξ).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если $\xi \notin \mathbb{Q}(\alpha)$, то*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi x_n\| \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2d(P)}.$$

Легко проверить, что верен следующий результат.

ТЕОРЕМА 4 (Дубицкас [4]). *Если $\sum_{i=1}^d a_i$ – нечетное, то*

$$L(X) = \frac{1}{2}.$$

В данной статье мы докажем следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $a_i > 0$, если i нечетное, $a_i < 0$, если i четное, и $\sum_{i=1}^d a_i$ четное. Тогда*

$$L(X) = \frac{\sum_{i=1}^d |a_i|}{2 \sum_{i=1}^d |a_i| + 2}.$$

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $a_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, d$ и $\sum_{i=1}^d a_i$ четное. Пусть также $d > 1$ и*

$$\alpha \neq \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Тогда

$$L(X) = \frac{\sum_{i=1}^d a_i - 2}{2 \sum_{i=1}^d a_i - 2}.$$

В статье [4] Дубицкас доказал теорему 5 для случая $d = 1$ и теорему 6 для случая $d = 2$,

$$\alpha \neq \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Автор доказал в [5], что для случая

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

имеет место

$$L(X) = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, в данной статье мы обобщаем результаты Дубицкаса.

Доказательства теоремы 5 и теоремы 6 состоят из двух частей. Исходя из этого, данная статья организована следующим образом. Во втором пункте мы докажем неравенства

$$L(X) \geq \frac{\sum_{i=1}^d |a_i|}{2 \sum_{i=1}^d |a_i| + 2}$$

(в случае теоремы 5) и

$$L(X) \geq \frac{\sum_{i=1}^d a_i - 2}{2 \sum_{i=1}^d a_i - 2}$$

(в случае теоремы 6) с помощью леммы 1.1 из [4]. В третьем пункте мы докажем, что

$$L(X) \leq \frac{\sum_{i=1}^d a_i - 2}{2 \sum_{i=1}^d a_i - 2}$$

(в случае теоремы 6), обобщив доказательство теоремы 1.3 из [4]. Неравенство

$$L(X) \leq \frac{\sum_{i=1}^d |a_i|}{2 \sum_{i=1}^d |a_i| + 2}$$

(в случае теоремы 5) доказывается аналогичным образом.

2. Оценка снизу. Для доказательства обоих неравенств нам понадобится следующее утверждение.

ЛЕММА (Дубицкас [4]). *Пусть существует периодическая по модулю 1 последовательность $X^* = (x_n^*)_{n=1}^\infty$, удовлетворяющая (1). Пусть длина периода этой последовательности равна t . Тогда $L(X) \geq \min_{i=1, \dots, t} \|x_i\|$.*

Для доказательства теоремы 6 рассмотрим последовательность $B = (b_n)_{n=1}^\infty$, с

$$\{b_n\} = \frac{\sum_{i=1}^d a_i - 2}{2 \sum_{i=1}^d a_i - 2}.$$

Для доказательства теоремы 5 рассмотрим последовательность $C = (c_n)_{n=1}^\infty$, с

$$\{c_n\} = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^d |a_i|}{2 \sum_{i=1}^d |a_i| + 2}, & \text{если } n \text{ нечетное;} \\ \frac{\sum_{i=1}^d |a_i| + 2}{2 \sum_{i=1}^d |a_i| + 2}, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

Легко проверить, что эти последовательности действительно удовлетворяют соответствующим рекуррентным соотношениям. Поэтому нужные нам неравенства сразу следуют из леммы.

3. Оценка сверху для теоремы 3. Надо доказать, что

$$L(X) \leq \frac{\sum_{i=1}^d a_i - 2}{2 \sum_{i=1}^d a_i - 2}.$$

Рассуждение почти совпадает с приведенным в [4] (с точностью до замены 2 на d). Так что мы опишем лишь основные шаги.

Пусть $u_n := [\xi x_n]$, а $w_n := \{\xi x_n\} - 1/2$. Поэтому $-1/2 \leq w_n < 1/2$. Тогда

$$u_n + w_n + \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^d a_i \left(u_{n-i} + w_{n-i} + \frac{1}{2} \right).$$

Предположим, что

$$L(X) > \frac{\sum_{i=1}^d a_i - 2}{2 \sum_{i=1}^d a_i - 2}.$$

Тогда существует положительное число

$$w < \frac{1}{2} - \frac{\sum_{i=1}^d a_i - 2}{2 \sum_{i=1}^d a_i - 2} = \frac{1}{2 \sum_{i=1}^d a_i - 2}$$

такое, что $-w \leq w_n \leq w$ для $n \geq n_0$. Легко показать, что

$$\delta_n := \sum_{i=1}^d a_i w_{n-i} - w_n \in \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$$

при $n \geq n_0$. Возьмем большое число N . Положим $l_j = 1$, если $\delta_{n+j} = 1/2$, и $l_j = -1$, если $\delta_{n+j} = -1/2$, где $j = 0, \dots, N-1$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{j=0}^{N-1} l_j \left(\sum_{i=1}^d a_i w_{n-i+j} - w_{n+j} \right) = \frac{N}{2}.$$

Если доопределить $l_j := 0$ при $j < 0$ и $j > N-1$, то выполнено

$$\sum_{j=0}^{N-1} l_j \left(\sum_{i=1}^d a_i w_{n-i+j} - w_{n+j} \right) = \sum_{j=-d}^{N-1} w_{n+j} \left(\sum_{i=1}^d a_i l_{j+i} - l_j \right).$$

Оценим величину

$$\begin{aligned} T &:= \sum_{j=-d}^{N-1} \left| \sum_{i=1}^d a_i l_{j+i} - l_j \right| \leq \sum_{j=0}^{N-d-1} \left| \sum_{i=1}^d a_i l_{j+i} - l_j \right| + 2d \left(\sum_{i=1}^d a_i + 1 \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^d a_i - 1 \right) (N+d) + \sum_{j=0}^{N-d-1} \left(\left| \sum_{i=1}^d a_i l_{j+i} - l_j \right| - \sum_{i=1}^d a_i + 1 \right) + 4d. \end{aligned}$$

Очевидно, что неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^d a_i l_{j+i} - l_j \right| - \left(\sum_{i=1}^d a_i - 1 \right) \leq 0$$

не выполнено только тогда, когда $\left| \sum_{i=1}^d a_i l_{j+i} - l_j \right| = \sum_{i=1}^d a_i + 1$. Рассмотрим следующие два множества:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ j \mid 0 \leq j \leq N-d-1, \left| \sum_{i=1}^d a_i l_{j+i} - l_j \right| = \sum_{i=1}^d a_i + 1 \right\}, \\ B &= \left\{ j \mid 0 \leq j \leq N-d-1, \left| \sum_{i=1}^d a_i l_{j+i} - l_j \right| = \left| \sum_{i=1}^{d-1} a_i - a_d - 1 \right| \right\}. \end{aligned}$$

Аналогично [4] получаем, что $|A| \leq |B| + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^d a_i + 1 \right) |A| + \left| \sum_{i=1}^{d-1} a_i - a_d - 1 \right| |B| - \left(\sum_{i=1}^d a_i - 1 \right) (|A| + |B|) \\ &\leq 2|B| + 2 + \left(\left| \sum_{i=1}^{d-1} a_i - a_d - 1 \right| - \sum_{i=1}^d a_i + 1 \right) |B| \leq 2. \end{aligned}$$

Получаем, что

$$T \leq \left(\sum_{i=1}^d a_i - 1 \right) (N + d) + 4d + 2.$$

Заметим, что раз $|w_{n+j}| \leq w$, то $Tw \geq N/2$. Следовательно,

$$\frac{1}{2w} \leq \frac{T}{N} \leq \frac{(\sum_{i=1}^d a_i - 1)(N + d)}{N} + \frac{4d + 2}{N},$$

а это противоречит $w < 1/(2 \sum_{i=1}^d a_i - 2)$ при достаточно большом N .

Автор благодарен А. Дубицкасу за обсуждение вопросов, затронутых в настоящей заметке, и ряд полезных замечаний.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximations*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys., **45**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957. [2] A. Khintchine, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **50:2** (1926), 170–195. [3] A. Dubickas, *Bull. London Math. Soc.*, **38** (2006), 70–80. [4] A. Dubickas, *Carpathian J. Math.* (to appear). [5] V. Zhuravleva, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **25** (2013), 499–520.

В. В. Журавлева

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: victoria.zhuravleva@me.com

Поступило

13.01.2014