Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Семенов, Локальная паравыпуклость и локальная селекционная теорема, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 261–269

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1048>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:59:47

УДК 517.982

ЛОКАЛЬНАЯ ПАРАВЫПУКЛОСТЬ И ЛОКАЛЬНАЯ СЕЛЕКЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

П. В. Семёнов

Доказаны теоремы о возможности локального продолжения селекций для невыпуклозначных отображений паракомпактов в банаховы пространства, т.е. доказаны бесконечномерные аналоги конечномерной селекционной теоремы Майкла. Результат удается получить при надлежащем метрическом контроле за локальной степенью невыпуклости значений $F(x)$, что естественно приводит к выделению понятия равномерно локально паравыпуклого семейства множеств. Показано, что связные подмножества интегральных кривых дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ с непрерывной правой частью f вместе со своими изометрическими образами образуют равномерно локально паравыпуклое семейство подмножеств евклидова пространства.

Библиография: 10 названий.

Непрерывное однозначное отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *селекцией многозначного отображения* $F: X \rightarrow Y$, если $f(x) \in F(x)$ для всех $x \in X$. Для $(n+1)$ -мерного (в смысле $\dim$) паракомпакта X необходимым условием существования селекций у полунепрерывного снизу отображения $F: X \rightarrow Y$ является n -связность и локальная n -связность значений $F(x)$, $x \in X$. Добавление “коллективного” варианта локальной связности, так называемой *равностепенной локальной связности*, уже дает достаточные условия существования непрерывных селекций [1]. Тем самым, для конечномерных паракомпактов селекции существуют только при наличии соответствующих ограничений на порядок связности значений полунепрерывного снизу многозначного отображения: исключением является только случай нульмерных областей определения. Для *бесконечномерных* областей определения ситуация более жесткая: недостаточно [2] потребовать стягиваемости значений $F(x)$ и равностепенной локальной стягиваемости семейства $\{F(x)\}$ значений. Более того, чисто *топологические* ограничения, гарантирующие наличие селекций, скорее всего отсутствуют в принципе. По крайней мере это так, если в качестве эталона иметь конечномерную селекционную теорему [3]. Итак, для многозначных отображений бесконечномерных пространств приходится использовать уже дополнительные, не топологические, ограничения. Своего рода палочкой-выручалочкой является здесь *выпуклость* значений многозначного отображения. Имеется ввиду либо стандартная выпуклость [4] в банаховом пространстве Y , либо различные аксиоматически заданные выпуклости в метрических или топологических пространствах Y .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-01166.

В настоящей работе доказаны теоремы о возможности локального продолжения селекций для невыпуклозначных отображений бесконечномерных паракомпактов, т.е. доказаны бесконечномерные аналоги конечномерной локальной селекционной теоремы [1]. Результат удастся получить при надлежащем *метрическом* контроле за локальной степенью невыпуклости значений $F(x)$. Селекционная теорема при глобальном метрическом контроле за невыпуклостью значений $F(x)$ известна [5]. По существу, в данной работе исследуются подходящие локальные варианты понятия *паравыпуклости* [5].

1. Для подмножества A банахова пространства Y будем обозначать через $[A]$ выпуклую оболочку множества A , а через $R(A)$ – чебышевский радиус множества A , т.е. инфимум множества радиусов открытых в Y шаров, содержащих A . Для двух подмножеств A и B метрического пространства обозначим через $\text{dist}(A : B)$ уклонение множества A от множества B , т.е.

$$\text{dist}(A : B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \{d(a, b)\}.$$

Ясно, что минимум из уклонений $\text{dist}(A : B)$ и $\text{dist}(B : A)$ является хаусдорфовым расстоянием между множествами A и B , порожденным заданной метрикой d .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\alpha \geq 0$. Будем говорить, что открытый шар D банахова пространства Y α -пересекает подмножество $L \subset Y$, если $D \cap Y \neq \emptyset$ и если $\text{dist}([A] : L) \leq \alpha R(A)$ для всех подмножеств A пересечения $D \cap L$. В случае, когда шар D α -пересекает все элементы семейства $\{L\}$, с которыми он пересекается, будем говорить, что D α -пересекает семейство $\{L\}$ подмножеств банахова пространства Y .

Отметим, что свойство шара D α -пересекать данное семейство $\{L\}$ *наследственно* в том смысле, что если шар D' лежит в D , то и D' α -пересекает семейство $\{L\}$. *Телом* $\cup\{L\}$ семейства $\{L\}$ подмножеств данного множества назовем объединение всех членов этого семейства. Множество называется *паравыпуклым* [5], если для некоторого $\alpha \in [0, 1)$ любой шар D или не пересекает это множество, или же α -пересекает его.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейство $\{L\}$ непустых замкнутых подмножеств банахова пространства называется *равностепенно локально паравыпуклым*, если для любой точки y из тела семейства $\{L\}$ найдутся $r = r(y)$ и $\alpha = \alpha(y) \in [0, 1)$ такие, что шар $D(y, r)$ радиуса r с центром в y α -пересекает семейство $\{L\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть F – полунепрерывное снизу отображение паракомпакта X в равностепенно локально паравыпуклое семейство $\{L\}$ замкнутых подмножеств банахова пространства Y . Пусть A замкнуто в Y и h является непрерывной однозначной селекцией отображения $F|_A$. Тогда найдется открытое множество $U \supset A$ и непрерывная однозначная селекция f отображения $F|_U$, являющаяся продолжением частичной селекции h .

Естественная версия теоремы 1, в которой невыпуклость оценивается в точках из множества значений $h(A)$ частичной селекции h отображения F .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для семейства $\{L\}$ непустых замкнутых подмножеств банахова пространства и любой точки $y \in \cup\{L\}$ *локальной невыпуклостью семейства $\{L\}$ в точке y* называется число

$$\alpha_{\text{loc}}(y, \{L\}) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \inf \{\alpha \geq 0\},$$

где инфимум берется по всем шарам $D(y, r)$, α -пересекающим $\{L\}$.

ТЕОРЕМА 2. Теорема 1 верна при замене условия равностепенной локальной паравыпуклости семейства $\{L\}$ на условие $\alpha_{\text{loc}}(h(a), \{L\}) < 1$ для всех $a \in A$.

В случае одного непустого замкнутого подмножества L банахова пространства определение 3 приводит к понятию локальной невыпуклости $\alpha_{\text{loc}}(y, L)$ множества L в точке $y \in L$.

В п. 2 доказана теорема 1, а в п. 3 собраны доказательства используемых в п. 2 вспомогательных утверждений и доказана теорема 2. В п. 4 приведены примеры локально паравыпуклых множеств и равностепенно локально паравыпуклых семейств множеств. Наконец, напомним, что многозначное отображение $F: X \rightarrow Y$ топологических пространств называется *полунепрерывным снизу*, если в X открыт прообраз $F^{-1}(U)$ любого открытого в Y множества U ; при этом (полный) прообраз $F^{-1}(U)$ множества U определяется как множество всех тех $x \in X$, для которых значения $F(x)$ пересекают множество U .

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $\{L\}$ – равностепенно локально паравыпуклое семейство подмножеств банахова пространства Y . Для всех чисел $r > 0$ и $\alpha \in [0, 1)$ определим следующее подмножество $G(r, \alpha)$ тела семейства $\{L\}$. Точка y из тела семейства $\{L\}$, по определению, принадлежит множеству $G(r, \alpha)$, если для некоторых $r' > r$ и $\alpha' \leq \alpha$ открытый шар $D(y, r')$ радиуса r' с центром в точке y α' -пересекает семейство $\{L\}$.

ЛЕММА 1. Справедливы следующие утверждения:

- а) если $R \leq r$ и $\beta \geq \alpha$, то $G(R, \beta) \supset G(r, \alpha)$;
- б) $\cup\{L\} = \cup\{G(r, \alpha) \mid r > 0, 0 \leq \alpha < 1\}$;
- в) множества $G(r, \alpha)$ открыты в $\cup\{L\}$.

Доказательство теоремы разобьем на два случая. В первом “равномерном” случае мы предположим, что тело $\cup\{L\}$ семейства $\{L\}$ совпадает с некоторым из множеств $G(r, \alpha)$. Во втором случае мы представим тело $\cup\{L\}$ семейства $\{L\}$ в виде растущей последовательности открытых множеств $G_n = G(r_n, \alpha_n)$ для некоторой монотонно убывающей к 0 последовательности $\{r_n\}$ положительных чисел и некоторой монотонно возрастающей к 1 последовательности $\{\alpha_n\}$ чисел из промежутка $[0, 1)$.

1) $\cup\{L\} = G(r, \alpha)$ для некоторых $r > 0$ и $\alpha \in [0, 1)$. Фиксируем $\beta \in (\alpha, 1)$ и положим

$$\varepsilon = r \frac{2(1 - \beta)}{3 - \beta} > 0.$$

Произвольно продолжим $h: A \rightarrow Y$ до непрерывного отображения (необязательно селекции) $h^*: X \rightarrow Y$. Для каждой точки $a \in A$ определим ее окрестность:

$$V(a) = F^{-1}\left(D\left(h(a), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \cap (h^*)^{-1}\left(D\left(h(a), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \subset X.$$

Пусть U – окрестность множества A , замыкание которой лежит в объединении всех окрестностей $V(a)$. Тогда ограничение отображения h^* на замыкание окрестности U есть непрерывное однозначное отображение с паракомпактной областью определения, являющееся ε -селекцией соответствующего ограничения отображения F . Действительно, если $x \in V(a)$ для некоторого $a \in A$, то $\|h^*(x) - h(a)\| < \varepsilon/2$ и множество $F(x)$ пересекает шар $D(h(a), \varepsilon/2)$. Более того, ε -шары $D(h^*(x), \varepsilon)$ α -пересекают множества $F(x)$, $x \in \text{Cl}(U)$.

Действительно, если $x \in V(a)$ для некоторого $a \in A$, то шар $D(h^*(x), \varepsilon)$ лежит в шаре $D(h(a), \varepsilon + \varepsilon/2)$, который лежит в шаре $D(h(a), r)$ в силу равенства

$$r = \varepsilon \frac{3 - \beta}{2(1 - \beta)} = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon(1 + \beta + \beta^2 + \dots) > \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Согласно условию $\cup\{L\} = G(r, \alpha)$, т.е. для некоторых $r' > r$ и $\alpha' \leq \alpha$ открытый шар $D(h(a), r')$ α' -пересекает семейство $\{L\}$ и, в частности, α' -пересекает множество $F(x)$. Так как шар $D = D(h^*(x), \varepsilon)$ лежит в шаре $D(h(a), r')$, то D α' -пересекает множество $F(x)$, а значит, и α -пересекает множество $F(x)$. Отметим, что условие равностепенной локальной паравыпуклости использовалось только в точках множества $h(a) \subset \cup\{L\}$.

Искомое продолжение f отображения h , являющееся селекцией отображения $F|_U$, построим как равномерный предел некоторой последовательности $f_n: \text{Cl}(U) \rightarrow Y$, в которой $f_0 = h^*|_{\text{Cl}(U)}$. Итак, по индукции построим отображения $f_n: \text{Cl}(U) \rightarrow Y$ так, чтобы для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in \text{Cl}(U)$:

- i_n) $\|f_n - f_{n-1}\| \leq \beta^{n-1}\varepsilon$;
- ii_n) шары $D(f_n(x), \beta^n\varepsilon)$ пересекали множества $F(x)$;
- iii_n) шары $D(f_n(x), \beta^n\varepsilon)$ α -пересекали множества $F(x)$.

Формально полагая $f_{-1} = f_0 = h^*$, получаем, что эти условия выполнены при $n = 0$. Действительно, условие i₀) тривиально, а условия ii₀) и iii₀) уже проверены. Допустим, что отображения $f_{-1}, f_0, f_1, \dots, f_n$ уже построены так, что выполняются условия i_m)–iii_m) для $0 \leq m \leq n$. Определим многозначное отображение $F_{n+1}: \text{Cl}(U) \rightarrow Y$ равенством

$$F_{n+1}(x) = \text{Cl}([D(f_n(x), \beta^n\varepsilon) \cap F(x)]).$$

Значения этого отображения замкнуты, выпуклы и непусты по условию ii_n), а само это отображение полунепрерывно снизу в силу непрерывности f_n и полунепрерывности снизу F . Согласно классической выпуклозначной селекционной теореме [4] отображение F_{n+1} имеет селекцию $f_{n+1}: \text{Cl}(U) \rightarrow Y$. Условие i_{n+1}) выполнено, так как $f_{n+1}(x) \in F_{n+1}(x) \subset \text{Cl}(D(f_n(x), \beta^n\varepsilon))$. Условие ii_{n+1}) есть следствие условия iii_{n+1}), поскольку

$$\begin{aligned} \text{dist}(f_{n+1}(x), F(x)) &\leq \text{dist}([D(f_n(x), \beta^n\varepsilon) \cap F(x)] : F(x)) \\ &\leq \alpha R([D(f_n(x), \beta^n\varepsilon) \cap F(x)]) \leq \alpha\beta^n\varepsilon < \beta^{n+1}\varepsilon. \end{aligned}$$

Условие iii_n) проверяется, как и выше условие iii₀). Действительно, если $x \in V(a)$ для некоторого $a \in A$, то шар $D(f_{n+1}(x), \beta^{n+1}\varepsilon)$ лежит в шаре $D(h(a), \varepsilon/2 + \varepsilon(1 + \beta + \dots + \beta^n))$, так как

$$\|f_{n+1}(x) - h^*(x)\| = \|f_{n+1}(x) - f_0(x)\| \leq \sum_{m=0}^n \|f_{m+1}(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon(1 + \beta + \dots + \beta^n)$$

в силу условий i₀)–i_{n+1}).

В свою очередь, из

$$r = \varepsilon \frac{3 - \beta}{2(1 - \beta)} = \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon(1 + \beta + \beta^2 + \dots)$$

следует, что шар $D(h(a), \varepsilon/2 + \varepsilon(1 + \beta + \dots + \beta^n))$ лежит в шаре $D(h(a), r)$, и дальнейшее рассуждение повторяет доказательство условия iii₀).

Условия i_n), $n \in \mathbb{N}$, гарантируют фундаментальность построенной функциональной последовательности и, значит, непрерывность поточечного предела f этой последовательности. Включение $f(x) \in F(x)$ следует из условий ii_n), $n \in \mathbb{N}$, и полноты множеств $F(x)$. Случай 1) в теореме 1 доказан.

2) Не существует $r > 0$ и $\alpha \in [0, 1)$ таких, что $\{L\} = G(r, \alpha)$. Пусть $r_n = 2^{-n}$ и $\alpha_n = 1 - 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ и $G_n = G(r_n, \alpha_n)$. Так как семейство $\{L\}$ равностепенно локально паравыпуклое, метрическое пространство $M = \bigcup \{L\}$ есть объединение возрастающей последовательности $\{G_n\}$ своих собственных открытых подмножеств G_n . Построим открытые подмножества $W_n \subset G_n$ так, чтобы $\text{Cl}(W_n) \subset G_n$, $\text{Cl}(W_n) \subset W_{n+1}$ и $\bigcup W_n = M$. Для этого достаточно, например, рассмотреть ограниченную метрику ρ на M , совместимую с заданной в Y топологией, и положить

$$W_n = \left\{ x \in M \mid \text{dist}_\rho(x, M \setminus G_n) > \frac{d}{n+1} \right\}, \quad d = \sup_{x \in M} \{ \text{dist}_\rho(x, M \setminus G_1) \} > 0.$$

Пусть $h: A \rightarrow Y$ – данная селекция отображения $F|_A$ и $E_n = h^{-1}(W_n) \subset A \subset X$. Так как $\bigcup W_n = M = \bigcup \{L\}$, то открытые (в A) множества E_n можно считать непустыми, покрывающими в объединении все множество A , и при этом $\text{Cl}_A(E_n) = A_n \subset E_{n+1}$. Мы индуктивно будем продолжать селекции с A_n на некоторые окрестности $U_n \supset A_n$ так, чтобы $U_{n+1} \supset U_n$. Построение основано на следующем утверждении, являющемся некоторым уточнением разобранного выше случая 1) теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\Phi: X \rightarrow Y$ – полунепрерывное снизу отображение паракомпакта X в банахово пространство Y , A – замкнутое подмножество X , а $C, B, C \subset B$, – открытые в A подмножества A такие, что $\text{Cl}_A(C) \subset B$; $\varphi: A \rightarrow Y$ – непрерывная селекция ограничения $\Phi|_A$. Пусть для некоторых $R > 0$, $\mu \in [0, 1)$ все $2R$ -шары с центрами в точках из $\varphi(\text{Cl}_A(C))$ μ -пересекают семейство $\{\Phi(x)\}$, $x \in X$, а все R -шары с центрами из $\varphi(B)$ μ -пересекают то же семейство. Тогда найдутся открытое в X множество $U \supset \text{Cl}_A(C)$ и непрерывная селекция $\psi: \text{Cl}(U) \cup A \rightarrow Y$ отображения Φ такие, что

- а) $\psi|_A = \varphi$;
- б) R -шары с центрами из $\psi(\text{Cl}(U))$ μ -пересекают семейство $\{\Phi(x)\}$;
- в) $\text{Cl}(U) \cap (A \setminus B) = \emptyset$.

Вернемся к доказательству случая 2) теоремы 1. Используем предложение 1 для $\Phi = F$, $\varphi = h$, $C = E_1 \subset \text{Cl}_A(E_1) \subset E_2 = B$, $2R = r_1$, $\mu = \alpha_2$. По построению $h(E_i) \subset W_i \subset G_i = G(r_i, \alpha_i)$, $i = 1, 2$, т.е. r_i -шары с центрами в точках из $h(E_i)$ α_i -пересекают семейство множеств $\{L\}$. Так как $\alpha_1 < \alpha_2 = \mu$, можно считать, что эти шары μ -пересекают семейство $\{L\}$. Кроме того, $r_2 = r_1/2$, значит предложение 1 действительно применимо. Поэтому найдутся открытое в X множество $U_1 \supset \text{Cl}_A(E_1)$, замыкание которого не пересекается с $A \setminus E_2$, и непрерывная селекция $f_1: \text{Cl}(U_1) \cup A \rightarrow Y$ отображения F , продолжающая h , такие, что r_2 -шары с центрами из $f_1(\text{Cl}(U_1))$ α_2 -пересекают семейство $\{F(x)\}$. Используем предложение 1 для $\Phi = F$, подмножества $\text{Cl}(U_1) \cup A$ паракомпакта X , частичной селекции $\varphi = f_1: \text{Cl}(U_1) \cup A \rightarrow Y$, $C = U_1 \cup E_2 \subset B = U_1 \cup E_3$, $2R = r_2$, $\mu = \alpha_3$. Применимость предложения 1 следует из свойств частичной селекции f_1 и определения множеств E_2 и E_3 . Поэтому найдутся окрестность U_2 (в X) множества $\text{Cl}(U_1) \cup \text{Cl}_A(E_2)$, замыкание которой не пересекается с $A \setminus E_3$, и непрерывная

селекция $f_2: \text{Cl}(U_2) \cup A \rightarrow Y$ отображения F , продолжающая селекцию f_1 , такие, что r_3 -шары с центрами из $f_2(\text{Cl}(U_2))$ α_3 -пересекают семейство $\{F(x)\}$.

Индуктивное продолжение этой процедуры дает монотонно возрастающую последовательность $\{U_n\}$ открытых в X множеств таких, что $U_{n+1} \supset (\text{Cl}(U_n) \cup \text{Cl}_A(E_{n+1}))$, и последовательность частичных селекций $f_n: \text{Cl}(U_n) \cup A \rightarrow Y$ отображения F таких, что f_{n+1} продолжает f_n и каждая f_n продолжает h . Так как $E_n = h^{-1}(W_n) \subset A \subset X$ и $\bigcup W_n = \bigcup \{L\}$, то $\bigcup E_n = A$. Поэтому объединение $U = \bigcup \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ является окрестностью множества A , на которую продолжается частичная селекция h . Теорема 1 доказана.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Свойство а) есть прямое следствие определения, а свойство б) есть переформулировка равностепенной локальной паравыпуклости семейства $\{L\}$. Докажем свойство в). Для данной точки $y \in G = G(r, \alpha)$ фиксируем $r' > r$ и $\alpha' \leq \alpha$ так, чтобы открытый шар $D(y, r')$ α' -пересекал семейство $\{L\}$. Выберем $R \in (r, r')$ и положим $\delta = R - r$. Тогда если $\|y' - y\| < \delta$, то $D(y', R) \subset D(y, r')$. Поэтому если $L \cap D(y', R) \neq \emptyset$, то из $A \subset L \cap D(y', R) \subset D(y, r')$ следует, что $\text{dist}([A] : L) \leq \alpha' R(A)$. Следовательно, шар $D(y', R)$ с $R > r$ α' -пересекает множество L с $\alpha' \leq \alpha$. Поэтому все точки, δ -близкие к точке $y \in G$, также лежат в G . Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Произвольно продолжим частичную селекцию $\varphi: A \rightarrow Y$ отображения Φ до непрерывного отображения (не селекции) $\varphi^*: X \rightarrow Y$ и фиксируем число $\lambda \in (\mu, 1)$. Отделим в пространстве X непересекающиеся замкнутые множества $\text{Cl}_A(C)$ и $A \setminus B$ открытыми множествами $U_0 \supset \text{Cl}_A(C)$ и $U_{-1} \supset A \setminus B$ соответственно. Положим, как и выше,

$$\varepsilon = R \frac{2(1-\lambda)}{3-\lambda} > 0.$$

Для каждой точки $c \in \text{Cl}_A(C)$ определим открытое множество

$$V(c) = \Phi^{-1}\left(D\left(\varphi(c), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \cap (\varphi^*)^{-1}\left(D\left(\varphi(c), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \cap U_0$$

и определим U как окрестность (в X) множества C такую, что $C \subset U \subset \text{Cl}(U) \subset \bigcup \{V(c) \mid c \in \text{Cl}_A(C)\} \subset U_0$. Тогда на паракомпакте $\text{Cl}(U) \cup A$ отображение ψ_0 , являющееся ограничением отображения φ^* , есть ε -селекция ограничения Φ на $\text{Cl}(U) \cup A$. Действительно, для точек $x \in \text{Cl}_A(U)$ $\varphi^*(x) = \varphi(x) \in \Phi(x)$, а для точек $x \in \text{Cl}(U)$ $\varphi^*(x)$ по построению лежит в некотором шаре радиуса $\varepsilon/2$, который пересекается с множеством $\Phi(x)$. Построим последовательность $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots$ (аналогично тому, как строилась последовательность $f_0, f_1, \dots, f_n, \dots$ в доказательстве случая 1) теоремы 1) $(\lambda^n \varepsilon)$ -селекций ограничения отображения Φ на паракомпакт $\text{Cl}(U) \cup A$. При этом внесем дополнение, гарантирующее совпадение ψ_n с φ на множестве A . Для этого в индуктивном процессе определим многозначное отображение $\Phi_{n+1}: \text{Cl}(U) \cup A \rightarrow Y$ равенством $\Phi_{n+1}(x) = \text{Cl}([D(\psi_n(x), \lambda^n \varepsilon) \cap \Phi(x)])$. Тогда по индуктивному предположению φ есть селекция $\Phi_{n+1}|_A$. Затем определим отображение $\psi_{n+1}: \text{Cl}(U) \cup A \rightarrow Y$ как непрерывную селекцию полунепрерывного снизу многозначного отображения Φ_{n+1} , совпадающего с φ на A и с Φ_{n+1} на $\text{Cl}(U) \setminus A$. Тогда последовательность $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n, \dots$ равномерно сходится к некоторой селекции ψ ограничения отображения Φ на паракомпакт $\text{Cl}(U) \cup A$. Тем самым, свойство а) очевидно, а свойство в) следует из того, что

$\text{Cl}(U) \subset U_0$ и множество U_0 не пересекается с множеством $U_{-1} \supset A \setminus B$. Для доказательства свойства б) оценим расстояние $\|\psi(x) - \varphi(c)\|$ для $x \in V(c)$ и $c \in \text{Cl}_A(C)$:

$$\begin{aligned} \|\psi(x) - \varphi(c)\| &\leq \|\psi(x) - \varphi^*(x)\| + \|\varphi^*(x) - \varphi(c)\| < \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_{n+1}(x) - \psi_n(x)\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon(1 + \lambda + \lambda^2 + \dots) = \varepsilon \frac{3 - \lambda}{2(1 - \lambda)} = R. \end{aligned}$$

Значит, шар $D(\psi(x), R)$ лежит в шаре $D(\varphi(c), 2R)$, который по условию μ -пересекает семейство $\{\Phi(x)\}$, $x \in X$. Следовательно, и шар $D(\psi(x), R)$ μ -пересекает семейство $\{\Phi(x)\}$, $x \in X$. Предложение 1 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. По аналогии с определением 2 семейство $\{L\}$ непустых замкнутых подмножеств банахова пространства назовем *равностепенно локально паравыпуклым относительно подмножества* $M \subset \cup\{L\}$, если для любой точки $y \in M$ найдутся $r = r(y) > 0$ и $\alpha = \alpha(y) \in [0, 1)$ такие, что шар $D(y, r)$ радиуса r с центром в точке y α -пересекает семейство $\{L\}$. Нетрудно видеть, что в доказательстве теоремы 1 равностепенную локальную паравыпуклость всего семейства $\{L\}$ можно ослабить до условия равностепенной локальной паравыпуклости семейства $\{L\}$ относительно множества $h(A) \subset \cup\{L\}$ значений частичной селекции $h: A \rightarrow Y$. В свою очередь, неравенство

$$\alpha_{\text{loc}}(y, \{L\}) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \inf\{\alpha \geq 0\} < 1,$$

где инфимум берется по всем шарам $D(y, r)$, α -пересекающим $\{L\}$, означает наличие чисел $r = r(y) > 0$ и $\alpha = \alpha(y) \in [0, 1)$ таких, что шар $D(y, r)$ радиуса r с центром в точке y α -пересекает семейство $\{L\}$. Другими словами, условие $\alpha_{\text{loc}}(h(a), \{L\}) < 1$ для всех $a \in A$ как раз и означает равностепенную локальную паравыпуклость семейства $\{L\}$ относительно множества $h(a) \subset \cup\{L\}$. Теорема 2 доказана.

4. В примерах ограничимся пространствами Y , норма которых задана скалярным произведением. Фиксируем разложение $Y = Z \oplus Z^\perp$ в прямую ортогональную сумму подпространств с $\dim Z^\perp = 1$. Пусть $V \subset Z$ — замкнутое выпуклое подмножество и $f: V \rightarrow Z^\perp$ — функция с фиксированной константой Липшица $k \geq 0$.

ЛЕММА 2. *Существует константа $\alpha(k) \in [0, 1)$ такая, что график $P = \Gamma_f$ любой функции f определенного выше типа есть $\alpha(k)$ -паравыпуклое подмножество Y (независимо от Z, V, f).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — точки из V , а $y_i = (x_i, f(x_i))$ — соответствующие точки на графике Γ_f . Рассмотрим (единственный) чебышевский центр s многогранника $[y_1, y_2, \dots, y_n]$. Можно считать, что s лежит внутри $[y_1, y_2, \dots, y_n]$ (иначе возможен переход к меньшей размерности), поэтому все расстояния sy_i равны чебышевскому радиусу $R = R[y_1, y_2, \dots, y_n]$ этого многогранника. Проведем через s гиперплоскость Π параллельную Z и обозначим через s^* соответствующую точку графика. Если $s \in \Pi$, то $s = s^* \in \Gamma_f$ и, тем самым, $\text{dist}(s, \Gamma_f) = 0$. Если же $s \notin \Pi$, то одна из точек, скажем y_1 , лежит с точкой s^* по разные стороны от Π . Проведем двумерную плоскость Π_0 через точки s, s^*, y_1 и рассмотрим ограничение функции f на пересечение $V \cap \Pi_0$. В плоскости Π_0 проведем угол величины $2 \arctg k$ с вершиной в точке y_1 и с биссектрисой, параллельной гиперплоскости Π и пересекающей прямую, проходящую через точки s

и c^* . Тогда в силу липшицевости с константой k функции f обе точки c и c^* лежат в одной из половин этого угла. Поэтому Γ_f пересекает перпендикуляр, опущенный из точки c на “наклонную”, т.е. непараллельную гиперплоскости Π сторону этой половины. Осталось заметить, что длина этого перпендикуляра не больше $R \sin(\arctg k)$. Значит, $\text{dist}(c, \Gamma_f) \leq R \sin(\arctg k)$. Для точки y многогранника $[y_1, y_2, \dots, y_n]$, отличной от c , возможны два случая: либо y близка к c и тогда оценка для $\text{dist}(y, \Gamma_f)$ чуть хуже оценки для $\text{dist}(c, \Gamma_f)$, либо расстояние cy_i больше некоторой константы и тогда одно из расстояний yy_i заметно меньше R (подробнее см. [6, леммы 1, 2]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Семейство всех графиков липшицевых с константой k функций с выпуклыми замкнутыми областями определения является равностепенно локально паравыпуклым (система координат не фиксирована).

Достаточно любопытным является следующее наблюдение: если в лемме 2 $\dim Y = 2$ и f непрерывно дифференцируемым образом зависит от одной вещественной переменной x , то константа Липшица k есть максимум модуля производной f' на соответствующем промежутке. Если фиксировать точку x и рассмотреть оценку невыпуклости графика Γ_f в малых окрестностях точки x , то получится величина типа $\sin(\arctg f'(x))$. При этом дифференцирование по x последнего выражения дает в точности кривизну графика Γ_f в точке x . Впрочем, за счет изменения системы координат локальная невыпуклость для графиков функций оценивается куда более радикальным образом.

ЛЕММА 3. Локальная невыпуклость графика функции $f: V \rightarrow Z^\perp$, $V \subset Z$, $Y = Z \oplus Z^\perp$, равна 0 в любой точке графика, где существует касательная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В достаточно малых окрестностях такой точки расстояния от точек графика до касательной гиперплоскости есть величины, бесконечно малые по сравнению с радиусами окрестностей.

Пусть Y – двумерное евклидово пространство и $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Назовем бескоординатным дифференциальным уравнением выражение $y'(p) = f(p)$, $p \in Y$. Решением такого уравнения назовем пару (T, φ) , где $T: Y \rightarrow \mathbb{R}^2$ – изометрия евклидовых пространств и $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ – решение дифференциального уравнения $y'(x) = f(T^{-1}(x, y(x)))$ для некоторого невырожденного замкнутого числового промежутка $I \subset \mathbb{R}$, $x \in I$. Графиком решения (T, φ) бескоординатного дифференциального уравнения $y'(p) = f(p)$, $p \in Y$, назовем подмножество $T^{-1}(\Gamma_\varphi)$ пространства Y . Другими словами, мы рассматриваем связанные замкнутые подмножества интегральных кривых некоторого фиксированного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, и к этим множествам применяем все возможные изометрии плоскости. Теорема Пеано гарантирует наличие (но не единственность) интегральных кривых, проходящих через фиксированную точку $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f_0: Y \rightarrow [0, \infty)$ – локально ограниченная функция и $C(Y, \leq f_0)$ – множество всех непрерывных функций $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$, которые по модулю мажорируются функцией f_0 . Тогда семейство графиков всех решений бескоординатных дифференциальных уравнений $y'(p) = f(p)$, $p \in Y$, с непрерывными правыми частями $f \in C(Y, \leq f_0)$ есть равностепенно локально паравыпуклое семейство подмножеств двумерного евклидова пространства Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для фиксированной точки $p_0 \in Y$ выберем окрестность W , в которой значения функции $f_0: Y \rightarrow \mathbb{R}$ по модулю не превосходят константы $k = |f(p_0)| + 1$.

Тогда для любой $f \in C(Y, \leq f_0)$ и любого решения (T, φ) уравнения $y'(p) = f(p)$, график которого $T^{-1}(\Gamma_\varphi)$ проходит через точку p_0 , пересечение этого графика с окрестностью W есть (в подходящей системе координат) график липшицевой с константой k функции с выпуклой замкнутой областью определения. По лемме 2 все такие пересечения есть $\alpha(k)$ -паравыпуклые подмножества Y для некоторой константы $\alpha(k) < 1$.

Верен и аналог следствия 2 для $(n + 1)$ -мерного евклидова пространства Y . Следует только заменить функции $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$ отображениями f из Y в пространство $\mathbb{R}^n$, интерпретируемое как пространство $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ всех линейных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. При этом решением такого бескоординатного дифференциального уравнения является пара (T, φ) , где $T: Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ – изометрия евклидовых пространств и $\varphi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ – решение дифференциального уравнения $y'(x) = f(T^{-1}(x, y(x)))$ для некоторого выпуклого замкнутого тела $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \Delta$. Селекционная теорема 1 в случае гильбертова пространства говорит о возможности непрерывного (локального) выбора начальных условий в зависимости от решения: на каждой интегральной кривой непрерывным образом выбирается по точке.

В заключение сформулируем открытый вопрос.

ВОПРОС. Является ли паравыпуклым график липшицева с константой f отображения (не функции) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$?

Ответ неизвестен даже при $n = 1$ и $m = 2$. Формальное препятствие состоит в неприменимости техники работы [7]. Отметим также, что в определениях 1, 2 и теоремах 1, 2 возможна замена паравыпуклости с некоторой константой из $[0, 1)$ на функциональную паравыпуклость в стиле работ [8]–[10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Michael E. Continuous selections. II // Ann. of Math. 1956. V. 64. P. 562–580.
- [2] Pixley C. An example concerning continuous selections on infinite dimensional spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 43. P. 237–244.
- [3] Michael E. Selection theorems with and without dimensional restrictions // Internat. Conference in Memory of F. Hausdorff. Math. Res. V. 67. Berlin: Akademie-Verlag, 1992. P. 218–222.
- [4] Michael E. Continuous selections. I // Ann. of Math. 1956. V. 63. P. 361–382.
- [5] Michael E. Paraconvex sets // Math. Scand. 1959. V. 7. P. 372–376.
- [6] Семёнов П. В. Опаравыпуклости звездноподобных множеств // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. № 2. С. 399–405.
- [7] Семёнов П. В. Выпуклые сечения графиков непрерывных функций // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 5. С. 75–80.
- [8] Repovš D., Semenov P. V. On paraconvexity of graphs of continuous functions // Set-Valued Anal. 1995. V. 3. P. 23–32.
- [9] Repovš D., Semenov P. V. On functions of nonconvexity for graphs of continuous functions // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 196. P. 1021–1029.
- [10] Семёнов П. В. Функционально паравыпуклые множества // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 6. С. 74–91.