Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Асимптотическое поведение емкости конденсатора при стягивании некоторых его пластин в точки, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 194–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10480>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:36:51

Асимптотическое поведение емкости конденсатора при стягивании некоторых его пластин в точки

В. Н. Дубинин

Показывается, что первые два члена в асимптотической формуле для емкости обобщенного конденсатора не зависят от формы вырождающихся пластин. Ранее указанная формула была известна лишь в случае, когда вырождающиеся пластины являлись элементами семейств почти кругов с фиксированными центрами.

Библиография: 21 название.

DOI: 10.4213/mzm10480

1. Введение и формулировка основного результата. Понятие емкости конденсатора с двумя пластинами и задача о поведении емкости при различных преобразованиях пластин конденсатора восходит к работам Поля и Сегё (см. [1], а также [2]). Из современных исследований в данном направлении отметим работы [3]–[8]. Необходимость изучения поведения емкости конденсаторов с тремя и более пластинами обусловлена многочисленными приложениями этих конденсаторов в геометрической теории функций (см., например, [9]–[16]).

Перейдем к точным формулировкам. Пусть B – открытое множество на комплексной сфере $\mathbb{C}$. *Обобщенный конденсатор* (далее *конденсатор*) в $\overline{B}$ есть тройка $C = (B, \mathcal{E}, \Delta)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=0}^n$ – совокупность замкнутых непустых попарно непесекающихся множеств $E_k \subset \overline{B}$, $k = 0, 1, \dots, n$, а $\Delta = \{\delta_k\}_{k=0}^n$ – совокупность вещественных чисел δ_k , $k = 0, 1, \dots, n$, $n \geq 1$. Множества E_k называются *пластинами* конденсатора C , $k = 0, 1, \dots, n$. *Емкость* $\text{cap } C$ конденсатора C определяется как точная нижняя грань интегралов Дирихле

$$I(v, B) := \iint_B |\nabla v|^2 dx dy$$

по всем вещественнозначным функциям v , непрерывным в $\overline{B}$, удовлетворяющим условию Липшица внутри множества B и равным δ_k на E_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Ранее рассматривался частный случай асимптотики емкости конденсатора C , когда одна из его пластин $E_0 = \partial B$, а другие пластины $E_k = E_k(r)$, $r > 0$, представляют собой “почти круги” с центрами в некоторых фиксированных различных точках $z_k \in B$ и радиусов $\mu_k r^{\nu_k} (1 + o(1))$ при $r \rightarrow 0$. Здесь μ_k, ν_k – произвольные положительные

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 14-11-00022).

числа, $k = 1, \dots, n$. Первые члены в асимптотической формуле для емкости такого конденсатора выражаются через параметры δ_k , μ_k , ν_k и значения в точках z_k “классической” функции Грина

$$g_B(z, z_l) = h_B(z, z_l) - \log |z - z_l|,$$

непрерывной в $\mathbb{C} \setminus \{z_l\}$ и равной нулю вне связной компоненты множества B , содержащей точку z_l , $k, l = 1, \dots, n$ (подробнее см. [15]). Естественно поставить вопрос: как изменится асимптотика емкости, если центры “почти кругов” будут расположены в “смещенных” точках

$$z_k(r) \rightarrow z_k, \quad r \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, n?$$

Какова будет асимптотика емкости конденсатора, если “почти круги” $E_k(r)$ заменить на произвольные континуумы логарифмической емкости¹ $\mu_k r^{\nu_k} (1 + o(1))$? Ответы на эти вопросы дает следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть B – конечносвязная область на $\overline{\mathbb{C}}$ с невырожденными граничными компонентами, $B \neq \overline{\mathbb{C}}$, $\{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность различных конечных точек области B , $\Delta = \{\delta_k\}_{k=0}^n$ – совокупность вещественных чисел таких, что $\delta_0 = 0$, $\delta_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, и пусть μ_k , ν_k , $k = 1, \dots, n$, – произвольные положительные числа. Предположим, что континуумы

$$E_k(r), \quad r > 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

имеют логарифмическую емкость

$$\text{cap } E_k(r) = \mu_k r^{\nu_k} (1 + o(1)) \quad \text{при } r \rightarrow 0$$

и расстояние

$$\text{dist}(z_k, E_k(r)) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} & \text{cap}(B, \{\partial B, E_1(r), \dots, E_n(r)\}, \Delta) \\ &= -2\pi \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} - 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, z_k)}{\mu_k} + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l) \right\} \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \\ &+ o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $r(B, z_k) = \exp h_B(z_k, z_k)$ – внутренний радиус области B относительно точки z_k , $k = 1, \dots, n$.

При $n = 1$ слагаемые в формуле (1.1) с участием функций Грина следует опустить. Если $r \rightarrow 0$, то пластины $E_k(r)$ стягиваются к точкам соответственно z_k , $k = 1, \dots, n$. Конденсатор в левой части (1.1) определен при достаточно малых значениях r , когда множества $E_k(r)$ принадлежат области B и попарно непересекаются. В случае произвольного открытого множества B асимптотическая формула для

¹С определением и свойствами логарифмической емкости компакта (емкости, трансфинитного диаметра) можно ознакомиться в монографии [17].

емкости подобного конденсатора получается сложением асимптотических формул для связанных компонент B . Мы ограничились также конечносвязными областями, так как в приложениях формулы (1.1) задачи для произвольных областей (в том числе не имеющих классическую функцию Грина) решаются предельным переходом по конечносвязным областям. Из формулы (1.1) видно, что начальные члены асимптотики емкости не зависят от формы вырождающихся пластин. При $n = 1$ формула (1.1) установлена В. В. Асеевым и О. А. Лазаревой даже в случае, когда пластина $E_1(r)$ стягивается в точку z_1 , но не обязательно является связным множеством (см. [18]). Для $n \geq 2$ вопрос о справедливости (1.1) при отказе от связности пластин $E_k(r)$, но при условии

$$\max\{|z - z_k| : z \in E_k(r)\} \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

остается открытым. Из теоремы 1 вытекает асимптотическая формула для емкости конденсатора в одном важном частном случае, когда вместо пластины ∂B рассматривается собственное подмножество $\Gamma \subset \partial B$, при этом функции Грина $g_B(z, z_k)$ необходимо заменить на функции Робена $g_B(z, z_k, \Gamma)$ (см. п. 4). Можно получить также аналогичную (1.1) формулу для множества $B = \mathbb{C}$. Доказательство теоремы 1 приводится в п. 3 данной статьи. Перед этим нам необходимо установить несколько вспомогательных утверждений, касающихся в том числе сведения ситуации к конденсаторам, вырождающиеся пластины которых являются “почти кругами”.

2. Вспомогательные утверждения. Введем обозначения

$$U(z_0, R) = \{z : |z - z_0| < R\}, \quad V(z_0, R) = \{z : |z - z_0| > R\}, \quad z_0 \in \mathbb{C}, \quad R > 0.$$

ЛЕММА 1. *Предположим, что для некоторой точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и семейства континуумов $\{E(r)\}_{r>0}$ выполняются условия $\text{cap } E(r) \rightarrow 0$ и $\text{dist}(z_0, E(r)) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, и пусть функция f_r конформно и однолистно отображает внешнюю компоненту² дополнения континуума $E(r)$ на область $V(z_0, c(r))$ так, что $f_r(\infty) = \infty$, $f'_r(\infty) = 1$. Тогда для любого числа $R > 0$ при достаточно малом $r > 0$ функция f_r представима в виде*

$$f_r(z) = z + \alpha_0(r) + c(r)\tau(z; r), \quad z \in V(z_0, R), \quad (2.1)$$

где $\alpha_0(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, $\tau(z; r) = O(1)$ при $r \rightarrow 0$ равномерно по $z \in V(z_0, R)$ и

$$\tau(z'; r) - \tau(z''; r) = O(|z' - z''|) \quad \text{при } r \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

равномерно по z', z'' в любом круге $U \subset V(z_0, R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что величина $c(r)$ равна логарифмической емкости континуума $E(r)$ и, следовательно, $c(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Каждому числу $r > 0$ сопоставим некоторую точку $z(r)$ континуума $E(r)$ такую, что $|z_0 - z(r)| = \text{dist}(z_0, E(r))$. Обозначим через

$$g_r(\zeta) = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)\zeta^{-n}$$

²То есть связную компоненту, содержащую бесконечно удаленную точку.

функцию, которая конформно и однолистно отображает внешнюю компоненту дополнения континуума

$$\left\{ \zeta : \zeta = \frac{z - z(r)}{c(r)}, z \in E(r) \right\}$$

на область $|w| > 1$. Функция, обратная к $g_r(\zeta)$, принадлежит известному классу Σ и не обращается в нуль при $|w| > 1$. По теореме 6.11 из монографии [19]

$$|a_0(r)| \leq 2 \quad \text{для любых } r > 0.$$

Кроме того, из результата Нетаньяху [20] следует, что для любых $r > 0$ и $n = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства

$$|a_n(r)| \leq |b_n|. \quad (2.3)$$

Здесь функция

$$w = g(\zeta) = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^{-n}$$

является обратной к функции $\zeta = w + 2 + 1/w$, которая отображает область $|w| > 1$ на внешность отрезка $[0, 4]$. В силу теоремы единственности функция f_r представима в виде

$$f_r(z) = z_0 + c(r)g_r\left(\frac{z - z(r)}{c(r)}\right).$$

Отсюда выполняется (2.1), где $\alpha_0(r) = z_0 - z(r) + c(r)a_0(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и

$$\tau(z; r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(r)c^n(r)}{(z - z(r))^n}.$$

Покажем равномерную ограниченность $\tau(z; r)$. По заданному $R > 0$ выберем $r > 0$ такое, что $|z(r) - z_0| < R/2$ и $c(r) < R/10$. Тогда для любых $z \in V(z_0, R)$ с учетом (2.3) имеем

$$|\tau(z; r)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{|(z - z(r))/c(r)|^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{5^n} = O(1), \quad r \rightarrow 0.$$

Для доказательства (2.2) заметим сперва, что при любых конечных ζ_1 и ζ_2 , удовлетворяющих условию $\text{dist}(0, [\zeta_1, \zeta_2]) > 0$, выполняется оценка

$$|\zeta_1^{-n} - \zeta_2^{-n}| \leq n \int_{[\zeta_1, \zeta_2]} |\zeta^{-n-1}| |d\zeta| \leq n[\text{dist}(0, [\zeta_1, \zeta_2])]^{-n-1} |\zeta_1 - \zeta_2|. \quad (2.4)$$

По заданному $R > 0$ фиксируем круг $U \subset V(z_0, R)$ и возьмем $r > 0$ такое, что $|z(r) - z_0| < R/2$ и $c(r) < R/(10e)$. Тогда для любых $z', z'' \in U$ с учетом (2.3) и (2.4) имеем

$$\begin{aligned} |\tau(z'; r) - \tau(z''; r)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(r)| n \left(\frac{2c(r)}{R} \right)^{n+1} \left| \frac{z' - z(r)}{c(r)} - \frac{z'' - z(r)}{c(r)} \right| \\ &\leq \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n} \frac{|b_n|}{[R/(2ec(r))]^n} |z' - z''| \\ &\leq \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b_n|}{5^n} |z' - z''| = O(|z' - z''|), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

В обозначениях теоремы 1 пусть U_k , $k = 1, \dots, n$, – фиксированные круги с центрами в точках соответственно z_k , удовлетворяющие условиям

$$\bar{U}_k \subset B, \quad \bar{U}_k \cap \bar{U}_l = \emptyset, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, \dots, n.$$

Пусть $U = U_1 \times \dots \times U_n$, $Z = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in U$,

$$g_B(z, \zeta) =: g(z, \zeta) = h(z, \zeta) - \log |z - \zeta|$$

и $r(B, \zeta) =: R(\zeta)$. Предположим, что для некоторого семейства областей $\{B_r\}_{r>0}$ выполняется

$$g_r(z, \zeta) := g_{B_r}(z, \zeta) \Rightarrow g_B(z, \zeta), \quad r \rightarrow 0,$$

равномерно внутри $B \times B$ (т.е. на любых компактных подмножествах $B \times B$), $k = 1, \dots, n$. Учитывая равномерную непрерывность функции $h(z, \zeta)$ на любом множестве $U_k \times U_l$, $k, l = 1, \dots, n$, заключаем, что для функций Грина справедливы асимптотические разложения

$$g_r(z, \zeta_k) = -\log |z - \zeta_k| + \log R(\zeta_k) + o(1),$$

$$z \rightarrow \zeta_k, \quad r \rightarrow 0, \quad \text{равномерно по } \zeta_k \in U_k;$$

$$g_r(\zeta_l, z) = g(\zeta_l, \zeta_k) + o(1),$$

$$z \rightarrow \zeta_k, \quad r \rightarrow 0, \quad \text{равномерно по } \zeta_k \in U_k, \quad \zeta_l \in U_l, \quad k \neq l.$$

При фиксированных $Z \in U$, r , $0 < r < 1$, и ρ , $0 < \rho < 1$, рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(z) = \sum_{k=1}^n \delta_k \sum_{l=1}^n \beta_{lk}(Z, \rho) g_r(z, \zeta_l), \quad (2.5)$$

где δ_k , $k = 1, \dots, n$, – вещественные числа,

$$\beta_{lk}(Z, \rho) = \begin{cases} -(\log \psi_k(\rho))^{-1} (\log \psi_l(\rho))^{-1} g(\zeta_l, \zeta_k), & l \neq k, \\ -(\log \psi_k(\rho))^{-1} [1 + (\log \psi_k(\rho))^{-1} \log R(\zeta_k)], & l = k, \end{cases}$$

$\psi_k(\rho) = \mu_k \rho^{\nu_k}$, μ_k, ν_k , $k = 1, \dots, n$, – положительные числа.

ЛЕММА 2. Пусть

$$\delta_k \neq 0 \quad \text{и} \quad E_k(Z, \rho, r) := \left\{ z \in U(\zeta_k, \psi_k(2\rho)) : \frac{g(z)}{\delta_k} \geq 1 \right\}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Тогда

$$|z - \zeta_k| \sim \psi_k(\rho) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0,$$

равномерно по $z \in \partial E_k(Z, \rho, r)$ и $Z \in U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При достаточно малых $r > 0$, $\rho > 0$ для точек $z \in \partial E_k(Z, \rho, r)$ и $Z \in U$ выполняется

$$\delta_k = \delta_k \sum_{l=1}^n \beta_{lk}(Z, \rho) g_r(z, \zeta_l) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \delta_j \sum_{l=1}^n \beta_{lj}(Z, \rho) g_r(z, \zeta_l)$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_k \left\{ -(\log \psi_k(\rho))^{-1} [1 + (\log \psi_k(\rho))^{-1} \log R(\zeta_k)] [-\log |z - \zeta_k| + \log R(\zeta_k) + o(1)] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n (\log \psi_k(\rho))^{-1} (\log \psi_l(\rho))^{-1} g(\zeta_l, \zeta_k) [g(\zeta_k, \zeta_l) + o(1)] \right\} \\
&\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \delta_j \left\{ -(\log \psi_j(\rho))^{-1} (\log \psi_k(\rho))^{-1} g(\zeta_k, \zeta_j) [-\log |z - \zeta_k| + \log R(\zeta_k) + o(1)] \right. \\
&\quad \left. - (\log \psi_j(\rho))^{-1} [1 + (\log \psi_j(\rho))^{-1} \log R(\zeta_j)] [g(\zeta_k, \zeta_j) + o(1)] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k \\ l \neq j}}^n (\log \psi_j(\rho))^{-1} (\log \psi_l(\rho))^{-1} g(\zeta_l, \zeta_j) [g(\zeta_k, \zeta_l) + o(1)] \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь $o(1)$ – бесконечно малая при $r \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$ (и, следовательно, $z \rightarrow \zeta_k$) равномерно по z и Z . Поэтому

$$\begin{aligned}
\delta_k &= (\delta_k + o(1)) (\log \psi_k(\rho))^{-1} \log |z - \zeta_k|, \quad r \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0, \\
\log |z - \zeta_k| &\sim \log \psi_k(\rho), \quad r \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Учитывая последнее соотношение в предыдущих вычислениях, заключаем

$$\begin{aligned}
\delta_k &= \delta_k \{ (\log \psi_k(\rho))^{-1} \log |z - \zeta_k| + [(\log \psi_k(\rho))^{-1} \log R(\zeta_k)] (1 + o(1)) \\
&\quad - (\log \psi_k(\rho))^{-1} \log R(\zeta_k) + o((\log \rho)^{-1}) \} \\
&\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \delta_j \{ (\log \psi_j(\rho))^{-1} g(\zeta_k, \zeta_j) (1 + o(1)) - (\log \psi_j(\rho))^{-1} g(\zeta_k, \zeta_j) + o((\log \rho)^{-1}) \} \\
&= \delta_k \{ (\log \psi_k(\rho))^{-1} \log |z - \zeta_k| + o((\log \rho)^{-1}) \}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|z - \zeta_k| \sim \psi_k(\rho) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Лемма доказана.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
s_k^*(\rho, r) &= \inf \{ |z - \zeta_k| : z \in \partial E_k(Z, \rho, r), Z \in U \}, \\
t_k^*(\rho, r) &= \sup \{ |z - \zeta_k| : z \in \partial E_k(Z, \rho, r), Z \in U \}, \quad k = 1, \dots, n, \\
r_*(\rho, r) &= \min_{1 \leq k \leq n} \psi_k^{-1}(s_k^*(\rho, r)), \quad r^*(\rho, r) = \max_{1 \leq k \leq n} \psi_k^{-1}(t_k^*(\rho, r)), \quad \rho > 0.
\end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть $s_k(r)$ и $t_k(r)$, $r > 0$, – произвольные функции, удовлетворяющие условиям $s_k(r) \sim t_k(r) \sim \psi_k(r)$, $r \rightarrow 0$, $k = 1, \dots, n$, и пусть

$$\underline{r}(r) = \min_{1 \leq k \leq n} \psi_k^{-1}(s_k(r)), \quad \bar{r}(r) = \max_{1 \leq k \leq n} \psi_k^{-1}(t_k(r)).$$

Тогда функции

$$\rho'(r) = \inf \{ \rho : r_*(\rho, r) \geq \bar{r}(r) \} \quad \text{и} \quad \rho''(r) = \sup \{ \rho : r^*(\rho, r) \leq \underline{r}(r) \}$$

эквивалентны r при $r \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сперва функцию $\rho''(r)$. Из леммы 2 и условия леммы 3 следует, что справедливы представления

$$r^*(\rho, r) = \rho(1 + \alpha^*(\rho, r)) \quad \text{и} \quad \underline{r}(r) = r(1 + \underline{\alpha}(r)),$$

где $\alpha^*(\rho, r)$ и $\underline{\alpha}(r)$ – бесконечно малые при $\rho \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$. Отсюда

$$0 \leq \rho''(r)(1 + o(1)) \leq r(1 + \underline{\alpha}(r)), \quad r \rightarrow 0.$$

Следовательно, $\rho''(r)$ – бесконечно малая при $r \rightarrow 0$ и

$$\rho''(r) \leq r(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Положим

$$\alpha(\rho, r) := \sup_{u \leq \rho} \max(|\alpha^*(u, r)|, |\underline{\alpha}(u)|).$$

Из условия $\rho(1 + \alpha(\rho, r)) \leq r(1 - \alpha(r, r))$ следует $\rho(1 + \alpha^*(\rho, r)) \leq r(1 + \underline{\alpha}(r))$. Поэтому

$$\rho''(r) \geq \sup\{\rho : \rho(1 + \alpha(\rho, r)) \leq r(1 - \alpha(r, r))\} \geq r(1 - 2\alpha(r, r)). \quad (2.7)$$

Последнее неравенство выполняется ввиду

$$\begin{aligned} & r(1 - 2\alpha(r, r))[1 + \alpha(r(1 - 2\alpha(r, r)), r)] \\ &= r + r\alpha(r(1 - 2\alpha(r, r)), r) - 2r\alpha(r, r) - 2r\alpha(r, r)\alpha(r(1 - 2\alpha(r, r)), r) \\ &\leq r(1 - \alpha(r, r)). \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что функция $\alpha(\rho, r) > 0$ неубывающая по ρ . Из неравенств (2.6), (2.7) вытекает, что $\rho''(r) \sim r$ при $r \rightarrow 0$. Функция $\rho'(r)$ рассматривается аналогично. Вновь из леммы 2 и условия леммы 3 имеем

$$r_*(\rho, r) = \rho(1 + \alpha_*(\rho, r)) \quad \text{и} \quad \bar{r}(r) = r(1 + \bar{\alpha}(r)),$$

где $\alpha_*(\rho, r) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ и $\bar{r}(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$. Из определения функции $\rho'(r)$ следует, что

$$\rho'(r)(1 + o(1)) \geq r(1 + \bar{\alpha}(r)), \quad r \rightarrow 0,$$

и справедливо неравенство

$$\rho'(r) \geq r(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Положим

$$\beta(\rho, r) := \sup_{u \leq \rho} \max(|\alpha_*(u, r)|, |\bar{\alpha}(u)|).$$

Из условия $\rho(1 - \beta(\rho, r)) \geq r(1 + \beta(r, r))$ следует $\rho(1 + \alpha_*(\rho, r)) \geq r(1 + \bar{\alpha}(r))$. Поэтому

$$\rho'(r) \leq \inf\{\rho : \rho(1 - \beta(\rho, r)) \geq r(1 + \beta(r, r))\} \leq r(1 + 3\beta(2r, r)), \quad (2.9)$$

так как

$$\begin{aligned} & r(1 + 3\beta(2r, r))[1 - \beta(r(1 + 3\beta(2r, r)), r)] \\ &= r + 3r\beta(2r, r) - r\beta(r(1 + 3\beta(2r, r)), r)[1 + 3\beta(2r, r)] \geq r(1 + \beta(r, r)). \end{aligned}$$

Неравенства (2.8) и (2.9) дают $\rho'(r) \sim r$ при $r \rightarrow 0$. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1. Покажем сначала, что формулу (1.1) достаточно установить в случае, когда область B ограничена конечным числом окружностей без общих точек. Пусть функция F конформно и однолистно отображает область B на область $F(B)$ указанного вида [17; гл. V, § 6]. Тогда континуум $E_k(r)$ перейдет в континуум $F(E_k(r))$, для которого

$$\begin{aligned} \operatorname{cap} F(E_k(r)) &= \mu_k |F'(z_k)| r^{\nu_k} (1 + o(1)), \quad r \rightarrow 0, \\ \operatorname{dist}(F(z_k), F(E_k(r))) &\rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Действительно, второе соотношение вытекает из непрерывности функции F . Что касается первого соотношения, то заметим, что в окрестности точки z_k производная функции F представима в виде

$$F'(z) = F'(z_k) + o(1), \quad F'(z_k) \neq 0, \quad z \rightarrow z_k.$$

Так как диаметр множества $E_k(r)$ не превосходит $4 \operatorname{cap} E_k(r)$, то при малых значениях r множество $E_k(r)$ попадает в любую окрестность точки z_k . Поэтому

$$\begin{aligned} \operatorname{cap} F(E_k(r)) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \max_{\zeta_l, \zeta_m \in E_k(r)} \left\{ \prod_{1 \leq l < m \leq j} |F(\zeta_l) - F(\zeta_m)| \right\}^{2/[j(j-1)]} \\ &= (|F'(z_k)| + o(1)) \lim_{j \rightarrow \infty} \max_{\zeta_l, \zeta_m \in E_k(r)} \left\{ \prod_{1 \leq l < m \leq j} |\zeta_l - \zeta_m| \right\}^{2/[j(j-1)]} \\ &= (|F'(z_k)| + o(1)) \operatorname{cap} E_k(r) = \mu_k |F'(z_k)| r^{\nu_k} (1 + o(1)), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Если теперь формула (1.1) доказана для конденсатора

$$(F(B), \{\partial F(B), F(E_1(r)), \dots, F(E_n(r))\}, \Delta),$$

то, учитывая конформную инвариантность емкости, инвариантность функции Грина и поведение внутреннего радиуса при конформном отображении, имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}(B, \{\partial B, E_1(r), \dots, E_n(r)\}, \Delta) &= \operatorname{cap}(F(B), \{\partial F(B), F(E_1(r)), \dots, F(E_n(r))\}, \Delta) \\ &= -2\pi \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} \\ &\quad - 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(F(B), F(z_k))}{\mu_k |F'(z_k)|} + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_{F(B)}(F(z_k), F(z_l)) \right\} \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \\ &\quad + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right) \\ &= -2\pi \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} - 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, z_k)}{\mu_k} + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l) \right\} \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \\ &\quad + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

и

$$B_r = F_r \left(B \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k(r) \right) \cup \bigcup_{k=1}^n \tilde{E}_k(r).$$

Из свойств (а)–(с) следует, что при любом k , $1 \leq k \leq n$, семейство континуумов $\{\tilde{E}_k(r)\}_{r>0}$ является асимптотически круговым, точнее выполняются включения

$$\overline{U(z_k(r), s_k(r))} \subset \tilde{E}_k(r) \subset \overline{U(z_k(r), t_k(r))} \quad (3.1)$$

при некоторых $z_k(r) \rightarrow z_k$ и $s_k(r) \sim t_k(r) \sim \psi_k(r)$, $r > 0$, $r \rightarrow 0$, $\psi_k(r) = \mu_k r^{\nu_k}$, $k = 1, \dots, n$. Область B легко представить как предел последовательности “расширяющихся” областей, а также как предел последовательности “сужающихся” областей. Функции Грина этих областей сходятся к функции Грина области B равномерно внутри B [17; гл. I, § 3; гл. VII, § 3]. Учитывая разложения (2.1) и общие свойства гармонических функций, заключаем, что $g_{B_r}(z, \zeta) \rightrightarrows g_B(z, \zeta)$, $r \rightarrow 0$, равномерно по z и ζ на $K \times K$, где K – произвольный компакт в B . При $Z = Z(r) := \{z_k(r)\}_{k=1}^n$ и достаточно малых $r > 0$, $\rho > 0$ определены функция (2.5) и множества $E_k(Z(r), \rho, r)$, $k = 1, \dots, n$, из леммы 2. В обозначениях (3.1) и леммы 3 имеем

$$\begin{aligned} t_k(r) &\leq \psi_k(\bar{r}(r)) \leq \psi_k(r_*(\tilde{\rho}'(r), r)) \leq s_k^*(\tilde{\rho}'(r), r), \\ s_k(r) &\geq \psi_k(\underline{r}(r)) \geq \psi_k(r^*(\tilde{\rho}''(r), r)) \geq t_k^*(\tilde{\rho}''(r), r), \end{aligned}$$

при некоторых $\tilde{\rho}'(r) \sim \rho'(r)$, $\tilde{\rho}''(r) \sim \rho''(r)$, $r \rightarrow 0$ (в дальнейшем отождествляем $\tilde{\rho}'(r)$ с $\rho'(r)$ и $\tilde{\rho}''(r)$ с $\rho''(r)$). Отсюда

$$E_k(Z(r), \rho''(r), r) \subset \tilde{E}_k(r) \subset E_k(Z(r), \rho'(r), r), \quad k = 1, \dots, n.$$

Из конформной инвариантности и монотонности емкости получаем

$$\text{cap}(B, \{\partial B, E_1(r), \dots, E_n(r)\}, \Delta) = \text{cap}(B_r, \{\partial B_r, \tilde{E}_1(r), \dots, \tilde{E}_n(r)\}, \Delta),$$

и

$$\begin{aligned} \text{cap}(B_r, \{\partial B_r, E_1(Z(r), \rho''(r), r), \dots, E_n(Z(r), \rho''(r), r)\}, \Delta) \\ \leq \text{cap}(B_r, \{\partial B_r, \tilde{E}_1(r), \dots, \tilde{E}_n(r)\}, \Delta) \\ \leq \text{cap}(B_r, \{\partial B_r, E_1(Z(r), \rho'(r), r), \dots, E_n(Z(r), \rho'(r), r)\}, \Delta). \end{aligned}$$

Осталось показать, что асимптотики емкостей конденсаторов в левой и правой частях последнего неравенства совпадают с правой частью (1.1). Достаточно рассмотреть один из этих случаев. Функция $g(z)$ (см. (2.5), где $\rho = \rho'(r)$, $\zeta_k = z_k(r)$, $k = 1, \dots, n$), гармоническая в $B_r \setminus \bigcup_{k=1}^n \{z_k(r)\}$, непрерывна в $\bar{B}_r \setminus \bigcup_{k=1}^n \{z_k(r)\}$, равна нулю на ∂B_r и δ_k на границе множества $E_k(Z(r), \rho'(r), r)$, $k = 1, \dots, n$. По принципу Дирихле

$$\begin{aligned} \text{cap}(B_r, \{\partial B_r, E_1(Z(r), \rho'(r), r), \dots, E_n(Z(r), \rho'(r), r)\}, \Delta) \\ = I \left(g, B_r \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k(Z(r), \rho'(r), r) \right). \end{aligned}$$

Возьмем число $\rho > 0$ настолько малым, чтобы множества $\bar{U}(z_k(r), 2\rho)$ принадлежали пластинам $E_k(Z(r), \rho'(r), r)$, $k = 1, \dots, n$. Применяя формулу Грина и теорему

Гаусса, имеем последовательно

$$\begin{aligned}
 I\left(g, B_r \setminus \bigcup_{k=1}^n E_k(Z(r), \rho'(r), r)\right) &= - \sum_{k=1}^n \int_{\partial E_k(Z(r), \rho'(r), r)} \delta_k \frac{\partial g}{\partial n} ds = - \sum_{k=1}^n \delta_k \int_{\partial U(z_k(r), \rho)} \frac{\partial g}{\partial n} ds \\
 &= - \sum_{k=1}^n \delta_k \sum_{j=1}^n \delta_j \sum_{l=1}^n \beta_{lj}(Z(r), \rho'(r)) \int_{\partial U(z_k(r), \rho)} \frac{\partial}{\partial n} g_r(z, z_l(r)) ds \\
 &= 2\pi \sum_{k=1}^n \delta_k \sum_{l=1}^n \delta_l \beta_{lk}(Z(r), \rho'(r)) \\
 &= 2\pi \sum_{k=1}^n \left\{ -\delta_k^2 (\log \psi_k(\rho'(r)))^{-1} [1 + (\log \psi_k(\rho'(r)))^{-1} \log R(z_k(r))] \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \delta_k \delta_l (\log \psi_k(\rho'(r)))^{-1} (\log \psi_l(\rho'(r)))^{-1} g(z_l(r), z_k(r)) \right\} \\
 &= -2\pi \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} + \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, z_k)}{\mu_k} \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l) \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь $\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внешней нормали. Мы воспользовались леммой 3 и непрерывностью функции Грина и внутреннего радиуса. Теорема доказана.

4. Частично свободная граница. Рассмотрим асимптотическое поведение емкости конденсатора в случае, когда часть границы множества B не принадлежит фиксированной пластине (свободная). Нам понадобится понятие функции Робена (см., например, [21]). Пусть область B ограничена конечным числом аналитических жордановых кривых, и пусть Γ – непустое замкнутое подмножество ∂B , каждая компонента которого есть кривая или дуга. *Функцией Робена* области B с полюсом в конечной точке $z_0 \in B$ называют вещественнозначную функцию $g_B(z, z_0, \Gamma)$, непрерывную на $\overline{B} \setminus \{z_0\}$, гармоническую в $\overline{B} \setminus (\Gamma \cup \{z_0\})$ и удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned}
 g_B(z, z_0, \Gamma) &= 0 \quad \text{при } z \in \Gamma; \\
 \frac{\partial}{\partial n} g_B(z, z_0, \Gamma) &= 0 \quad \text{при } z \in (\partial B) \setminus \Gamma;
 \end{aligned}$$

$g_B(z, z_0, \Gamma) + \log |z - z_0|$ является гармонической функцией в окрестности точки z_0 ($\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к ∂B). Если B – произвольная конечносвязная область сферы $\mathbb{C}$ без изолированных граничных точек, а Γ – непустое замкнутое подмножество границы ∂B , состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент, то функция Робена определяется равенством

$$g_B(z, z_0, \Gamma) = g_{f(B)}(f(z), f(z_0), f(\Gamma)),$$

где z_0 – конечная точка области B , а f – конформное и однолистное отображение этой области на область $f(B)$, ограниченную конечным числом аналитических жордановых кривых, $f(z_0) \neq \infty$, и $f(\Gamma)$ понимается в смысле граничного соответствия. Легко видеть, что функция Робена не зависит от выбора отображения f . Радиусом Робена назовем величину

$$r(B, \Gamma, z_0) = \exp \left\{ \lim_{z \rightarrow z_0} [g_B(z, z_0, \Gamma) + \log |z - z_0|] \right\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть произвольная область B и множество Γ определены выше, причем множество $(\partial B) \setminus \Gamma$ расположено на одной граничной компоненте области B . Пусть $\{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность различных конечных точек области B , $\Delta = \{\delta_k\}_{k=0}^n$ – совокупность вещественных чисел таких, что $\delta_0 = 0$, $\delta_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, и пусть μ_k, ν_k , $k = 1, \dots, n$, – произвольные положительные числа. Предположим, что континуумы $E_k(r)$, $r > 0$, $k = 1, \dots, n$, имеют логарифмическую емкость

$$\text{cap } E_k(r) = \mu_k r^{\nu_k} (1 + o(1)) \quad \text{при } r \rightarrow 0$$

и расстояние

$$\text{dist}(z_k, E_k(r)) \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} & \text{cap}(B, \{\Gamma, E_1(r), \dots, E_n(r)\}, \Delta) \\ &= -2\pi \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} - 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, \Gamma, z_k)}{\mu_k} + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l, \Gamma) \right\} \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \\ &+ o \left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что множество $(\partial B) \setminus \Gamma$ не пусто. С помощью конформного отображения подобно доказательству в начале п. 3 убеждаемся, что достаточно установить теорему 2 для случая, когда область B лежит в верхней полуплоскости, а множество $(\partial B) \setminus \Gamma$ расположено на вещественной оси. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} B^* &= B \cup \{z : \bar{z} \in B\} \cup [(\partial B) \setminus \Gamma], \quad \Gamma^* = \Gamma \cup \{z : \bar{z} \in \Gamma\}, \\ E_k^*(r) &= E_k(r) \cup \{z : \bar{z} \in E_k(r)\}, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

По принципу симметрии [15; теорема 1.20]

$$2 \text{cap}(B, \{\Gamma, E_1(r), \dots, E_n(r)\}, \Delta) = \text{cap}(B^*, \{\Gamma^*, E_1^*(r), \dots, E_n^*(r)\}, \Delta).$$

Асимптотика емкости конденсатора в правой части выписанного равенства находится по формуле (1.1). Осталось заметить, что

$$g_B(z, \zeta, \Gamma) = g_{B^*}(z, \zeta) + g_{B^*}(z, \bar{\zeta})$$

и, следовательно,

$$\log r(B, \Gamma, z) = \log r(B^*, z) + g_{B^*}(z, \bar{z}), \quad z, \zeta \in B.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Поля, Г. Сегё, *Изопериметрические неравенства в математической физике*, Физматлит, М., 1962.
- [2] В. Н. Дубинин, “Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного”, *УМН*, **49**:1 (1994), 3–76.
- [3] R. Kühnau, “Randeffekte beim elektostatischen Kondensator”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 15, Зап. научн. сем. ПОМИ, **254**, ПОМИ, СПб., 1998, 132–144.
- [4] V. N. Dubinin, D. Karp, “Capacities of certain plane condensers and sets under simple geometric transformations”, *Complex Var. Elliptic Equ.*, **53**:6 (2008), 607–622.
- [5] С. Р. Насыров, “Вариации емкостей Робена и их приложения”, *Сиб. матем. журн.*, **49**:5 (2008), 1128–1146.
- [6] V. N. Dubinin, M. Vuorinen, “On conformal moduli of polygonal quadrilaterals”, *Israel J. Math.*, **171**:1 (2009), 111–125.
- [7] В. В. Асеев, “Выпуклое раздутие пластин конденсатора”, *Изв. вузов. Матем.*, 2010, № 8, 3–15.
- [8] S. Pouliasis, “Condenser energy under holomorphic motions”, *Illinois J. Math.*, **55**:3 (2011), 1119–1134.
- [9] В. Н. Дубинин, “Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 14, Зап. научн. сем. ПОМИ, **237**, ПОМИ, СПб., 1997, 56–73.
- [10] В. Н. Дубинин, “Приведенные модули открытых множеств в теории аналитических функций”, *Докл. РАН*, **363**:6 (1998), 731–734.
- [11] В. Н. Дубинин, Л. В. Ковалев, “Приведенный модуль комплексной сферы”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 15, Зап. научн. сем. ПОМИ, **254**, ПОМИ, СПб., 1998, 76–94.
- [12] В. Н. Дубинин, “Обобщенные конденсаторы и асимптотика их ёмкостей при вырождении некоторых пластин”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 19, Зап. научн. сем. ПОМИ, **302**, ПОМИ, СПб., 2003, 38–51.
- [13] В. Н. Дубинин, Н. В. Эйрих, “Некоторые применения обобщенных конденсаторов в теории аналитических функций”, *Аналитическая теория чисел и теория функций*. 20, Зап. научн. сем. ПОМИ, **314**, ПОМИ, СПб., 2004, 52–75.
- [14] В. Н. Дубинин, “О квадратичных формах, порожденных функциями Грина и Робена”, *Матем. сб.*, **200**:10 (2009), 25–38.
- [15] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.
- [16] В. Н. Дубинин, “Симметризация Штейнера и начальные коэффициенты однолистных функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 75–82.
- [17] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.
- [18] О. А. Лазарева, *Емкостные свойства равномерно совершенных множеств и конденсаторов. Классические результаты и новые исследования*, LAP Lambert Academic Publ., 2012.
- [19] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ, М., 1962.
- [20] E. Netanyahu, “Extremal problems for schlicht functions in the exterior of the unit circle”, *Canad. J. Math.*, **17** (1965), 335–341.
- [21] P. Duren, “Robin capacity”, *Computational methods and Function Theory*, Ser. Approx. Decompos., **11**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1999, 177–190.

В. Н. Дубинин

Дальневосточный федеральный университет
Институт прикладной математики ДВО РАН,
г. Владивосток
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило

26.02.2014