Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Назайкинский, Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 261–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10481>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 16:59:57

УДК 517.9

Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению

В. Е. Назайкинский

Строится канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, отвечающем волновому уравнению в области, на границе которой скорость распространения волн $c(x)$ вырождается как корень квадратный из расстояния до границы области.

Библиография: 26 названий.

DOI: 10.4213/mzm10481

Введение

Эта работа продолжает серию статей [1]–[6], посвященных построению асимптотических (быстроосциллирующих и локализованных) решений волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c^2(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = 0, \quad u = u(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, на гладкой границе $\partial\Omega$ которой скорость $c(x)$ распространения волн имеет вырождение порядка квадратного корня из расстояния до границы:

$$\begin{aligned} c^2(x) &\in C^\infty(\bar{\Omega}), \\ c(x) &> 0, \quad x \in \Omega, \\ c(x) &= 0, \quad \nabla(c^2(x)) \neq 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Такие уравнения возникают, например, при моделировании в линейном приближении наката на берег длинных волн, в частности, волн цунами (см. [7], [8] и цитированную там литературу). “Пространственная часть”

$$L = - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} c^2(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00521-а) и проекта RITMARE (CINFAI, Италия).

© В. Е. Назайкинский, 2014

волнового оператора в (1) в терминологии из [9] представляет собой оператор второго порядка с неотрицательной характеристической формой в Ω , причем определенная на границе $\partial\Omega$ функция Фикеры [9; с. 9] тождественно равна нулю, так что постановка корректной задачи для оператора L в подходящих пространствах не требует классических граничных условий [10]. Соответственно, и задачу Коши для уравнения (1) нужно рассматривать без граничных условий на $\partial\Omega$, а выбор конкретной самосопряженной реализации оператора L в $L^2(\Omega)$ приходится описывать другим способом; физически естественным является условие конечности энергии, которое математически описывается как расширение по Фридрихсу [11; § 10.3] оператора L с первоначальной области определения $C_0^\infty(\Omega)$.

Отправной точкой для проведенных в [1]–[6] исследований послужило важное наблюдение из [12] (где для одномерного уравнения (1) в $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ были построены быстроосциллирующие асимптотические решения), что так как для таких уравнений решения соответствующей гамильтоновой системы уходят на бесконечность по импульсам за конечное время, одновременно выходя по переменным x на границу области, то граница эта может в определенном смысле рассматриваться как каустика и асимптотические решения в ее окрестности можно строить в соответствии с основной идеей канонического оператора Маслова [13], [14] в виде обратного преобразования Фурье от ВКБ-функции в импульсном представлении. Разумеется, в силу некомпактности возникающих здесь лагранжевых многообразий “стандартный” канонический оператор Маслова непосредственно применить нельзя, и его конструкцию приходится модифицировать (причем соответствующие условия регуляризации на бесконечности интегралов по импульсам тесно связаны с выбором самосопряженной реализации оператора L). На основе этой идеи в [1], [2] были получены локализованные асимптотические решения одномерного уравнения (1) в $\Omega = \mathbb{R}_+$ со скоростью $c(x) = \sqrt{x}$ и удовлетворяющей условию (2) скоростью $c(x)$ общего вида соответственно, а в [3] она была реализована в двумерном случае для уравнения (1) в полуплоскости $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ со скоростью $c(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$. Во всех этих статьях рассматривались решения конечной энергии. В работе [4] асимптотические решения в одномерном случае были построены для нефридрихсовых самосопряженных расширений оператора L . Наконец, в заметке [5] были даны адекватные геометрические структуры для рассматриваемого круга задач. Именно, предъявлено фазовое пространство Φ , отвечающее уравнению (1) с вырождением типа (2) в области Ω произвольной размерности n с гладкой границей $\partial\Omega$. Это фазовое пространство не совпадает с кокасательным расслоением $T^*\Omega$, а содержит его как плотное открытое подмножество, и траектории гамильтоновой системы в Φ на бесконечность не уходят. Для завершения теории оставалось построить канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях Λ в Φ . Частично это было сделано в [6] для случая, когда $n = 2$, а Λ инвариантно относительно отвечающего уравнению (1) гамильтонова векторного поля, и на основе этих результатов были получены асимптотические решения с конечной энергией задачи Коши для двумерного уравнения (1) с локализованными начальными данными.

В данной статье построен канонический оператор Маслова на лагранжевом многообразии Λ в Φ в общем случае (n произвольно, инвариантность многообразия Λ относительно гамильтонова векторного поля не требуется). Отметим, что наши формулы являются новыми и для ситуаций, рассмотренных в [2], [3], [6]. Имен-

но, в указанных работах канонический оператор в картах, отвечающих окрестности границы $\partial\Omega$, задается несобственными интегралами, которые при $x \in \partial\Omega$ сходятся лишь в смысле главного значения по Коши. В настоящей статье определение канонического оператора усовершенствовано: в каждой из карт оно включает лишь интегрирование гладкой функции с компактным носителем, что как с практической, так и с теоретической точки зрения является несомненным преимуществом.

Изложенные здесь результаты позволяют строить быстроосциллирующие асимптотические решения конечной энергии для уравнения (1). Переход в задаче Коши от быстроосциллирующих решений к решениям с локализованными начальными данными осуществляется стандартным образом на основе результатов из [15], [16] и здесь не рассматривается. Также за рамками работы остается конструкция канонического оператора для “нестандартных” самосопряженных расширений, аналогичных рассмотренным в одномерном случае в [4]. Подчеркнем также, что речь здесь идет о каноническом операторе лишь как об *инструменте построения асимптотических решений*. Исследовать близость асимптотических решений к точным можно методом интегралов энергии (см., например, [17; с. 480] и в абстрактной формулировке [11; § 8.2, теорема 5]), на чем мы не останавливаемся более подробно, ограничившись замечанием, что быстроосциллирующие функции, доставляемые каноническим оператором, бесконечно дифференцируемы в $\bar{\Omega}$, а следовательно¹, удовлетворяют условию конечности энергии и лежат в области определения волнового оператора.

1. Фазовое пространство Φ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}_x^n$ – конечная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Фазовое пространство Φ , ассоциированное с уравнениями, вырождающимися на границе, было введено в заметке [5]. Напомним кратко соответствующие конструкции (иногда – вместе с доказательствами) в удобной для нас форме.

1.1. Определение пространства Φ и его инвариантность. Пусть $T_0^*\Omega \simeq \Omega \times \mathbb{R}_p^n \setminus \{0\}$ – кокасательное расслоение области Ω с выброшенным нулевым сечением, снабженное каноническими формами

$$\begin{aligned}\omega^1 &= p \, dx \equiv p_1 \, dx_1 + \cdots + p_n \, dx_n, \\ \omega^2 &= d\omega^1 = dp \, dx \equiv dp_1 \wedge dx_1 + \cdots + dp_n \wedge dx_n.\end{aligned}$$

Раздутое фазовое пространство Φ строится следующим образом. Пусть $\psi(x)$ – определяющая функция границы $\partial\Omega$, т.е.

$$\begin{aligned}\psi(x) &\in C^\infty(\bar{\Omega}), \\ \psi(x) &> 0, \quad x \in \Omega, \\ \psi(x) &= 0, \quad \nabla\psi(x) \neq 0, \quad x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

Далее, пусть $\bar{U} \subset \bar{\Omega}$ – достаточно малая воротниковая окрестность границы $\partial\Omega$ в $\bar{\Omega}$, и пусть $a(x)$ – векторное поле в $\bar{U}$ такое, что $d\psi(a) \equiv \langle a, \nabla\psi \rangle = 1$ в $\bar{U}$. Рассмотрим

¹См., например, [3; предложения 1, 2 и теорема 1]; рассуждения в общем случае аналогичны.

прямое произведение $T^*\bar{U} \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$ с координатами (y, η, q, E) , $(y, \eta) \in T^*\bar{U}$, $q \in \mathbb{R}$, $E \in (0, \infty)$, и оснастим его симплектической формой

$$\varpi^2 = d\eta \wedge dy + dE \wedge dq.$$

ЛЕММА 1 [5; лемма 1]. *Подмножество $V \subset T^*\bar{U} \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$, задаваемое уравнениями*

$$\langle a(y), \eta \rangle = 0, \quad \psi(y) = q^2 E,$$

представляет собой гладкое $2n$ -мерное симплектическое многообразие (относительно сужения формы ϖ^2), а его подмножество $V_\infty \subset V$, выделяемое дополнительным уравнением $q = 0$, представляет собой гладкое подмногообразие коразмерности 1 в V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $f_1 = \langle a(y), \eta \rangle$, $f_2 = \psi(y) - q^2 E$ и вычислим скобку Пуассона этих функций: $\{f_1, f_2\} = 1$. Значит, их дифференциалы линейно независимы, так что уравнения $f_1 = f_2 = 0$ определяют гладкое подмногообразие V . Кроме того, отсюда же следует, что ограничение симплектической формы ϖ^2 на V невырождено (см. п. Г доказательства теоремы Дарбу в [18; § 43, с. 202]). Наконец, при $q = 0$ множитель при dq в разложениях дифференциалов df_1 и df_2 по дифференциалам координат нулевой, так что ограничение дифференциала dq на V невырождено, откуда следует последнее утверждение леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть $U \stackrel{\text{def}}{=} \bar{U} \cap \Omega$ и $W_0 = \{(x, p) \in T_0^*U : \langle a(x), p \rangle = 0\}$. *Отображение*

$$f: V \setminus V_\infty \rightarrow T_0^*U, \quad (y, \eta, q, E) \mapsto (x, p): \quad x = y, \quad p = \eta + q^{-1} \nabla \psi(y) \quad (3)$$

есть корректно определенный симплектоморфизм на свой образ $T_0^*U \setminus W_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $y \in \bar{U}$, а так как $q \neq 0$ вне V_∞ , то $\psi(y) = q^2 E > 0$ и соответственно $x \notin \partial\Omega$, так что $x = y \in U \subset \Omega$, и мы доказали, что отображение (3) корректно определено². Далее,

$$\langle a(x), p \rangle = \langle a(y), \eta \rangle + \langle a(y), q^{-1} \nabla \psi(y) \rangle = q^{-1} \neq 0,$$

так что образ отображения f лежит в $T_0^*U \setminus W_0$. Образ отображения $g: T_0^*U \setminus W_0 \rightarrow T^*\bar{U} \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$, $(x, p) \mapsto (y, \eta, q, E)$, задаваемого формулой

$$y = x, \quad \eta = p - \langle a(x), p \rangle \nabla \psi(x), \quad q = \langle a(x), p \rangle^{-1}, \quad E = \psi(x) \langle a(x), p \rangle^2$$

лежит в $V \setminus V_\infty$. Действительно,

$$\langle a(y), \eta \rangle = \langle a(y), p \rangle - \langle a(y), p \rangle \langle a(y), \nabla \psi(x) \rangle = 0, \quad q^2 E = \psi(y), \quad q = \langle a(y), p \rangle^{-1} \neq 0.$$

Непосредственное вычисление показывает, что оно является двусторонним обратным к f и что f переводит ограничение формы ϖ^2 на V в стандартную симплектическую форму ω^2 на $T_0^*U \setminus W_0$.

²Здесь исправлена ошибка в формуле (7) и формулировке леммы 2 в [5], где T_0^*U следует заменить на $T_0^*(U \setminus \partial\Omega)$. (Заметим, что в данной статье мы обозначили через $\bar{U}$ то, что в [5] обозначалось через U .) Эта ошибка не влияет на результаты в [5].

ТЕОРЕМА 1 [5; предложения 1–3]. Множество $\Phi = V \cup_f T_0^* \Omega$ наделено естественной структурой гладкого симплектического многообразия, при которой вложения $V \subset \Phi$ и $T_0^* \Omega \subset \Phi$ суть симплектоморфизмы на свои образы. Более того, $\Phi = T_0^* \Omega \sqcup \Phi_\infty$, причем $T_0^* \Omega$ – открытое всюду плотное подмногообразие, а $\Phi_\infty = V_\infty - (2n - 1)$ -мерное подмногообразие. Конструкция пространства Φ естественна: если Φ_1 и Φ_2 – два разных пространства Φ , полученных из $T_0^* \Omega$ такой конструкцией, то тождественное отображение $\Phi_1 \supset T_0^* \Omega \xrightarrow{\text{id}} T_0^* \Omega \subset \Phi_2$ продолжается по непрерывности до симплектоморфизма многообразия Φ_1 на Φ_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Каноническая 1-форма $\omega^1 = p dq$ на $T_0^* \Omega$ гладким образом продолжается на Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в окрестности точек из Φ_∞ ее можно задать формулой

$$\omega^1 = \eta dy + E dq + d(qE).$$

1.2. Канонические локальные координаты на Φ вблизи Φ_∞ . Конструкция предыдущего пункта, будучи применена локально, дает удобные локальные координаты на Φ в окрестности произвольной точки “подмногообразия на бесконечности” Φ_∞ . Именно, возьмем произвольную точку границы $\partial\Omega$. В окрестности этой точки определяющую функцию границы (при необходимости перенумеровывая координаты и меняя знак координаты x_1) можно взять в виде $\psi(x) = x_1 - g(x')$, где $g(x')$ – гладкая функция переменных $x' = (x_2, \dots, x_n)$, а векторное поле a взять равным $a(x) = (1, 0, \dots, 0)$. Тогда множество V над такой окрестностью задается уравнениями

$$y_1 = g(y') + q^2 E, \quad \eta_1 = 0,$$

и в качестве локальных координат на V (и, следовательно, на Φ) в окрестности соответствующих точек из Φ_∞ можно взять (q, x', E, η') .

2. Функциональные пространства $\mathfrak{H}^s(\Omega)$

Введем основные функциональные пространства, в которых будут изучаться вырожденные уравнения и в которые будет действовать канонический оператор. Поскольку речь идет о быстроосциллирующих (или локализованных) решениях, естественно, что нормы в этих пространствах будут зависеть от малого параметра $h \in (0, 1]$, неформально говоря, определяющего “скорость” осцилляций или убывания.

2.1. Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathfrak{H}^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$ – обычное пространство Соболева с параметром h , в котором норма задается формулой (Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$)

$$\|u\|_s = \|(1 - h^2 \Delta)^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (4)$$

2.2. Пусть $\Omega = \mathbb{R}_+^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > 0\}$. Стандартным образом [19; § IV.9] введем гильбертову шкалу $\{\mathfrak{H}^s(\mathbb{R}_+^n)\}$, ассоциированную с оператором $1 - h^2 \Delta_1$, где

$$\Delta_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

– самосопряженный оператор в $L^2(\mathbb{R}_+^n)$, полученный замыканием с множества гладких финитных функций на $\overline{\mathbb{R}_+^n} \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$. Норма в $\mathfrak{H}^s(\mathbb{R}_+^n)$ имеет вид

$$\|u\|_s = \|(1 - h^2 \Delta_1)^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}_+^n)}. \quad (5)$$

2.3. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – конечная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а $1 = \sum_{k=0}^N e_k^2(x)$, $e_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – разбиение единицы на замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω , подчиненное конечному покрытию $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{k=0}^N \Omega_k$ открытыми множествами $\Omega_k \subset \mathbb{R}^n$ такими, что $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ и для каждого $k = 1, \dots, N$ существуют локальные координаты $y = (y_1, \dots, y_n)$ в Ω_k , в которых пересечение $\Omega \cap \Omega_k$ задается неравенством $y_1 > 0$. Распределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ принадлежит пространству $\mathfrak{H}^s(\Omega)$, если $e_0 u \in \mathfrak{H}^s(\mathbb{R}^n)$ и $e_k u \in \mathfrak{H}^s(\mathbb{R}_+^n)$ (в соответствующих координатах $(y_1, \dots, y_n)$) для каждого $k = 1, \dots, N$. Положим

$$\|u\|_s = \left\{ \sum_{k=0}^N \|e_k u\|_s^2 \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

где каждая из норм в правой части определяется в соответствующих локальных координатах формулой (4) (при $k = 0$) или (5) (при $k > 0$).

Стандартными средствами доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пространство $\mathfrak{H}^s(\Omega)$ гильбертово и (с точностью до эквивалентности норм с константами, не зависящими от параметра h) не зависит от выбора покрытия $\{\Omega_k\}$ и разбиения единицы $\{e_k\}$. Множество $C^\infty(\overline{\Omega})$ плотно в каждом из пространств $\mathfrak{H}^s(\Omega)$. Кроме того, $\mathfrak{H}^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ и для любого компакта $K \subset \Omega$ норма (6) при $\text{supp } u \subset K$ эквивалентна стандартной соболевской норме пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $f(x) = f(x, h) \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Будем писать $f = O(h^N)$, если $\|f\|_s = O(h^N)$ для любого $s \in \mathbb{R}$.

3. Вырождающиеся дифференциальные операторы второго порядка

3.1. Класс операторов $\text{DEG } \overline{\Omega}$. Будем рассматривать в Ω дифференциальные операторы вида

$$D = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \widehat{p}_j \widehat{p}_k - ih \sum_{k=1}^n b_k(x) \widehat{p}_k, \quad \widehat{p}_j = -ih \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

где $a_{jk}(x) = a_{kj}(x)$ и $b_k(x)$ – гладкие функции в $\overline{\Omega}$. Такой оператор можно записать как

$$D = H(\overset{2}{x}, \overset{1}{p}), \quad H(x, p) = H_0(x, p) - ih H_1(x, p),$$

$$H_0(x, p) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) p_j p_k, \quad H_1(x, p) = \sum_{k=1}^n b_k(x) p_k$$

(номера над операторами согласно [20] обозначают порядок их действия).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см., например, [21; с. 116–117]). Функции

$$\sigma(D)(x, p) = H_0(x, p) \equiv \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) p_j p_k, \quad (8)$$

$$\sigma_{\text{sub}}(D)(x, p) = H_1(x, p) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 H_0(x, p)}{\partial x_k \partial p_k} \equiv \sum_{k=1}^n \left(b_k(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{jk}(x)}{\partial x_j} \right) p_k \quad (9)$$

называются соответственно *главным* и *субглавным символом* оператора D .

Нас будут интересовать операторы (7), вырождающиеся на $\partial\Omega$ вполне определенным образом. Именно, пусть

- $\text{Vect } \bar{\Omega}$ – алгебра Ли гладких векторных полей в замыкании $\bar{\Omega}$ области Ω ;
- $\text{Vect}_{\partial} \bar{\Omega} \subset \text{Vect } \bar{\Omega}$ – подалгебра Ли векторных полей, всюду касательных к $\partial\Omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что оператор (7) в области Ω *принадлежит классу* $\text{DEG } \bar{\Omega}$, если его можно представить для некоторых M, N в виде

$$D = h^2 \sum_{j=1}^M V_j \psi V_{j+M} + h^2 \sum_{j=1}^N W_j W_{j+N} + h^2 W_{2N+1},$$

где $V_j \in \text{Vect } \bar{\Omega}$, $j = 1, \dots, 2M$, и $W_j \in \text{Vect}_{\partial} \bar{\Omega}$, $j = 1, \dots, 2N + 1$.

Доказательство следующего утверждения достаточно стандартно, и мы его опускаем ввиду громоздкости.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если $D \in \text{DEG } \bar{\Omega}$, то при каждом s верна оценка*

$$\|Du\|_s \leq C_s \|Du\|_{s+2}, \quad u \in C_{\infty}(\Omega),$$

с постоянной C_s , не зависящей от h . Таким образом, оператор D продолжается по непрерывности до ограниченного оператора из $\mathfrak{H}^{s+2}(\Omega)$ в $\mathfrak{H}^s(\Omega)$ для всех s .

(ii) *Оператор D вида (7) принадлежит классу $\text{DEG } \bar{\Omega}$ тогда и только тогда, когда его главный и субглавный символы продолжают по непрерывности до гладких функций на фазовом пространстве Φ .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что в рассматриваемой ситуации сужение субглавного символа на границу совпадает с функцией Фикеры [9; с. 9].

3.2. Вырождающиеся уравнения волнового типа. Важные примеры операторов из $\text{DEG } \bar{\Omega}$ возникают из уравнений волнового типа с вырождением на границе. В области рассмотрим более общее, чем (1), вырождающееся уравнение

$$-h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \sum_{j,k=1}^n \hat{p}_j(\psi(x) a_{jk}(x) \hat{p}_k u) = 0, \quad (10)$$

где $\psi(x)$ – как и выше, определяющая функция границы $\partial\Omega$, а $a_{jk}(x)$ – гладкие функции в $\bar{\Omega}$, причем матрица $A(x) = (a_{jk}(x))$ – симметрическая, вещественная и

строго положительно определена при всех $x \in \overline{\Omega}$. Уравнение (1) получается, если в уравнении (10) положить $a_{jk}(x) = \delta_{jk}$ и $\psi(x) = c^2(x)$. Обозначим

$$\ell u = \sum_{j,k=1}^n \widehat{p}_j(\psi(x)a_{jk}(x)\widehat{p}_k u).$$

Тогда $\ell \in \text{DEG } \overline{\Omega}$. Действительно,

$$\ell u = -h^2 \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \psi(x) \frac{\partial}{\partial x_k} - h^2 \psi(x) \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial a_{jk}(x)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Как уже указывалось во введении, граничные условия на Ω в классическом смысле для уравнения (10) не нужны, однако необходимо описать область определения оператора в левой части уравнения (10). Пусть $D(x) = A^{1/2}(x)$ – положительный квадратный корень из положительной матрицы $A(x)$, $d_{jk}(x)$ – элементы матрицы $D(x)$. Через

$$T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega, \mathbb{C}^n)$$

обозначим оператор, полученный как замыкание оператора, заданного на области определения $C_0^\infty(\Omega)$ выражением

$$Tu = -ih\sqrt{\psi(x)} \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n d_{1k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \\ \sum_{k=1}^n d_{2k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n d_{nk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \end{pmatrix} \equiv \sqrt{\psi} \mathfrak{D}u.$$

Положим $L = T^*T$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Оператор L является расширением по Фридрихсу оператора, задаваемого на $C_0^\infty(\Omega)$ дифференциальным выражением ℓ . Его область определения $\mathcal{D}(L)$ содержит пространство $C^\infty(\overline{\Omega})$ гладких функций в замыкании области Ω . Кроме того,

$$\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(L^{1/2}), \quad \|Tu\| = \|L^{1/2}u\|, \quad u \in \mathcal{D}(L^{1/2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое и последнее утверждения очевидны, так как $(u, \ell v) = (Tu, Tv)$ для $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ и, следовательно, область определения замыкания формы $(u, \ell v)$ совпадает с $\mathcal{D}(T)$. Докажем, что $C^\infty(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{D}(L)$. Введем функцию [3; с. 75]

$$\varphi_\varepsilon(\tau) = \int_0^\tau \frac{\chi_\varepsilon(\theta) d\theta}{\theta |\ln \theta|} \left(\int_0^\infty \frac{\chi_\varepsilon(\theta) d\theta}{\theta |\ln \theta|} \right)^{-1},$$

где $\chi_\varepsilon(\theta) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \chi_\varepsilon(\theta) \leq 1$,

$$\chi_\varepsilon(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta \notin (\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}), \\ 1 & \text{при } \theta \in \left(2\varepsilon, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right). \end{cases}$$

Пусть $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Положим $u_\varepsilon(x) = \varphi_\varepsilon(\psi(x))u(x)$. Тогда $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, и аналогично [3; с. 75–76] показывается, что $u_\varepsilon \rightarrow u$ и $\mathfrak{t}u_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{t}u$ в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, так что $u \in \mathcal{D}(T)$ и $Tu = \mathfrak{t}u = \sqrt{\psi} \mathfrak{d}u$, где $\mathfrak{d}u \in C^\infty(\overline{\Omega}; \mathbb{C}^n)$. Если теперь $w \in C_0^\infty(\Omega)$, то интегрирование по частям показывает, что

$$(Tu, Tw) \equiv (\sqrt{\psi} \mathfrak{d}u, \sqrt{\psi} \mathfrak{d}w) = (\psi \mathfrak{d}u, \mathfrak{d}w) = (\mathfrak{d}^* \psi \mathfrak{d}u, w) = (\mathfrak{t}^* \mathfrak{t}u, w) = (\ell u, w)$$

(где $\mathfrak{d}^*$ и $\mathfrak{t}^*$ – формально сопряженные к $\mathfrak{d}$ и $\mathfrak{t}$ соответственно), откуда немедленно следует, что $Tu \in \mathcal{D}(T^*)$, $u \in D(L)$ и $Lu = \ell u$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливо включение $\mathfrak{H}^2(\Omega) \subset \mathcal{D}(L)$.*

Отвечающий уравнению (10) гамильтониан имеет вид [5; формула (2)]

$$H_0(x, p) = \sqrt{\psi(x)} \langle p, A(x)p \rangle^{1/2}, \quad (11)$$

где $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{j=1}^n \xi_j \eta_j$, а соответствующая система Гамильтона записывается в форме

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_{0p} \equiv \sqrt{\psi(x)} \langle p, A(x)p \rangle^{-1/2} A(x)p, \\ \dot{p} &= -H_{0x} \equiv -\frac{1}{2} \langle p, \psi(x) A(x)p \rangle^{-1/2} \left\langle p, \frac{\partial(\psi(x) A(x))}{\partial x} p \right\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 2 [5; предложение 4]. *Функция Гамильтона (11) продолжается до гладкой функции на Φ , и все траектории соответствующей системы Гамильтона на Φ (которые содержат траектории исходной системы (12) в качестве подынтервалов) неограниченно продолжаются вперед и назад по времени.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Первая часть теоремы 2 является частным случаем более общего предложения 3, (ii).

4. Преобразования Фурье и Ганкеля

В конструкции канонического оператора используются преобразование Фурье и преобразование Ганкеля нулевого порядка с малым параметром h . Выпишем их в одномерном случае. Прямое и обратное преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(p) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/h} f(x) dx, \quad f(x) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi h}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx/h} \tilde{f}(p) dp.$$

Прямое и обратное преобразование Ганкеля (ср. [22; с. 11]):

$$\hat{f}(E) = -\frac{i}{h} \int_0^\infty \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{Ex}\right) f(x) dx, \quad f(x) = \frac{i}{h} \int_0^\infty \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{Ex}\right) \hat{f}(E) dE,$$

где [23; с. 29, формула (5)]

$$\mathbf{J}_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \cos \theta} d\theta \quad (13)$$

– функция Бесселя нулевого порядка. Напомним свойства преобразования Ганкеля:

$$\int_0^\infty \overline{\hat{f}(E)} \hat{g}(E) dE = \int_0^\infty \overline{f(x)} g(x) dx \quad (14)$$

(равенство Парсеваля) и

$$\left\{ -h^2 \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} f(x) \right\}^{\wedge} (E) = E \widehat{f}(E), \quad \widehat{xf(x)}(E) = -h^2 \frac{\partial}{\partial E} E \frac{\partial}{\partial E} \widehat{f}(E). \quad (15)$$

Кроме того, ядро $\mathcal{K}(x, E) = h^{-1} \mathbf{J}_0(2\sqrt{Ex}/h)$ удовлетворяет оценкам

$$\left| h^{m+l} \frac{\partial^{m+l} \mathcal{K}(x, E)}{\partial x^m \partial E^l} \right| \leq C_{m+l} \frac{h^{-1/2} E^m x^l}{(h + \sqrt{x E})^{m+l+1/2}}. \quad (16)$$

5. Лагранжевы многообразия в Φ

5.1. Лагранжево многообразие. Под *лагранжевым многообразием* в фазовом пространстве Φ мы будем понимать гладкое отображение $j: \Lambda \rightarrow \Phi$ гладкого n -мерного многообразия Λ в Φ , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) отображение j – локальный диффеоморфизм на образ (т.е. производное отображение j_* инъективно);
- 2) справедливо соотношение $j^*(dp \wedge dq) = 0$ (лагранжевость).

Таким образом, мы не налагаем условие, что Λ является вложенным подмногообразием в Φ ; впрочем, это условие и не является необходимым для построения канонического оператора. Тем не менее, локально мы при необходимости будем отождествлять Λ с его образом в Φ .

Через α будем обозначать точки на Λ , а также локальные координаты $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ на Λ . Это не приведет к недоразумениям. Отображение j будем задавать функциями $x = X(\alpha)$, $p = P(\alpha)$ при $\alpha \notin \Lambda_\infty = j^{-1}\Phi_\infty$ или функциями $q = Q(\alpha)$, $E = \mathcal{E}(\alpha)$, $y = X(\alpha)$, $\eta = \Theta(\alpha)$ при α близких к Λ_∞ .

5.2. Мера, канонические карты и якобианы.

5.2.1. Мера. Многообразие Λ будем считать ориентированным. Пусть на Λ задана *мера* – гладкая форма объема $d\mu$. Для упрощения формул будем использовать только системы координат $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ на Λ , согласованные с ориентацией и такие, что $d\mu = d\alpha_1 \wedge \dots \wedge d\alpha_n$.

Введем теперь на Λ *канонические карты* и соответствующие координаты.

5.2.2. Стандартные канонические карты. Пусть $\alpha_0 \in \Lambda \setminus \Lambda_\infty$. Тогда точка $j(\alpha_0)$ лежит в $T_0^* \Omega$, в качестве канонических координат на Φ в ее окрестности можно взять (x, p) и в окрестности точки α_0 на Λ можно пользоваться стандартной теорией канонического оператора [13], [14], [24]. Напомним конструкцию соответствующих канонических карт и якобианов. По лемме о локальных координатах [25; лемма 3.3.1] существует такое (возможно, пустое) подмножество $I = \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{1, \dots, n\}$, что набор функций

$$(X_I(\alpha), P_{\bar{I}}(\alpha)) = (X_{j_1}(\alpha), \dots, X_{j_k}(\alpha), P_{j_{k+1}}(\alpha), \dots, P_{j_n}(\alpha)),$$

где $\bar{I} = \{j_{k+1}, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\} \setminus I$, можно взять в качестве локальных координат на Λ в некоторой окрестности U точки α_0 . Иными словами, якобиан

$$\mathcal{J}_I(\alpha) = \frac{D(X_I, P_{\bar{I}})}{D\alpha} = \det \frac{\partial(X_I, P_{\bar{I}})}{\partial\alpha}$$

отличен от нуля в окрестности точки α , и уравнения $x_I = X_I(\alpha)$, $p_{\bar{I}} = P_{\bar{I}}(\alpha)$ однозначно разрешимы относительно α в окрестности точки $(\alpha_0, x_{I0}, p_{\bar{I}0})$, где $x_{I0} = X_I(\alpha_0)$, $p_{\bar{I}0} = P_{\bar{I}}(\alpha_0)$, так что $\alpha = \alpha(x_I, p_{\bar{I}})$. Окрестность U , снабженная такими координатами $(x_I, p_{\bar{I}})$, называется *канонической картой типа I* ; для краткости мы будем обозначать ее через U_I . Чтобы зафиксировать правильным образом знаки якобианов, внешних произведений и т.п., условимся, что в наборах типа $(x_I, p_{\bar{I}})$ координаты всегда упорядочиваются по возрастанию индексов. Иными словами

$$(x_I, p_{\bar{I}}) = (z_1, \dots, z_n), \quad \text{где} \quad z_j = \begin{cases} x_j, & \text{если } j \in I, \\ p_j & \text{иначе.} \end{cases}$$

Аналогично, $dx_I \wedge dp_{\bar{I}} = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$. В этих обозначениях для меры $d\mu$ в карте U_I имеем выражение

$$d\mu = \mathcal{J}_I^{-1}(\alpha(x_I, p_{\bar{I}})) dx_I \wedge dp_{\bar{I}} = \mathcal{J}_I^{-1}(x_I, p_{\bar{I}}) dx_I \wedge dp_{\bar{I}}.$$

(Такая вольность в обозначениях не приведет к недоразумениям.) Каноническая карта U_I , для которой $\bar{I} = \emptyset$, называется *неособой*, и соответствующий якобиан обозначается просто через $\mathcal{J}(x)$.

5.2.3. Нестандартные канонические карты. Пусть теперь $\alpha_0 \in \Lambda_\infty$. В окрестности такой точки стандартная теория канонического оператора неприменима. Определим канонические карты в окрестности точки α_0 для этого случая. Рассмотрим точку $x_0 = X(\alpha_0)$. Существует такой индекс $j \in \{1, \dots, n\}$, что в окрестности точки x_0 область Ω задается неравенством

$$x_j > f(x') \quad (\text{случай (а)}) \quad \text{или} \quad x_j < f(x') \quad (\text{случай (б)}),$$

где $f(x')$ – гладкая функция переменных $x' = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$. В качестве канонических координат на Φ в окрестности точки $j(\alpha_0)$ можно взять переменные (q, x', E, η') , связанные вне Φ_∞ со стандартными каноническими координатами (x, p) заменой переменных (ср. п. 1.2)

$$q = p_j^{-1}, \quad E = (x_j - f(x'))p_j^2, \quad \eta' = p' + p_j \frac{\partial f(x')}{\partial x'}$$

в случае (а) и

$$q = -p_j^{-1}, \quad E = (f(x') - x_j)p_j^2, \quad \eta' = p' - p_j \frac{\partial f(x')}{\partial x'}$$

в случае (б). Поскольку симплектическая форма в координатах (q, x', E, η') имеет вид $\Omega^2 = dE \wedge dq + d\eta \wedge dx$, мы можем опять применить лемму о локальных координатах [25; лемма 3.3.1] и заключить, что существует такое подмножество $I = \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$, что набор функций

$$(x_I, \eta_{\bar{I}}, q) = (X_I(\alpha), \Theta_{\bar{I}}(\alpha), Q(\alpha)) \quad \text{или} \quad (x_I, \eta_{\bar{I}}, E) = (X_I(\alpha), \Theta_{\bar{I}}(\alpha), \mathcal{E}(\alpha)),$$

где на сей раз $\bar{I} = \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\} \setminus I$, образует систему локальных координат на Λ в окрестности U точки α_0 . Карту с координатами $(x_I, \eta_{\bar{I}}, q)$ будем обозначать через U_{Iq} и называть *нестандартной канонической картой типа (I, q)* , а карту с координатами $(x_I, \eta_{\bar{I}}, E)$ – через U_{IE} и называть *нестандартной канонической*

картой типа (I, E) . Соответствующие якобианы обозначим через

$$\mathcal{J}_{Iq}(\alpha) = \frac{D(X_I, \Theta_{\bar{I}}, Q)}{D\alpha}, \quad \mathcal{J}_{IE}(\alpha) = \frac{D(X_I, \Theta_{\bar{I}}, E)}{D\alpha}$$

соответственно.

5.2.4. Канонический атлас. Для дальнейшего зафиксируем какое-либо локально конечное покрытие многообразия Λ каноническими картами такое, что сами канонические карты и все их пересечения стягиваемы; это покрытие будем называть *каноническим атласом*.

5.3. Действие в канонических картах. Поскольку $d\omega^1 = \omega^2$, а $j^*\omega^2 = 0$, форма $j^*\omega^1$ локально точна на Λ ; решение $\tau(\alpha)$ уравнения Пфаффа

$$d\tau = j^*\omega^1$$

будем называть *эйконалом* на ω . Эйконал определен лишь локально и с точностью до аддитивной константы.

Предполагая, что в каждой карте канонического атласа эйконал $\tau(\alpha)$ зафиксирован каким-либо (вообще говоря, своим для каждой карты) образом, определим в этих картах действия, полагая

$$\begin{aligned} S_I(x_I, p_{\bar{I}}) &= [\tau(\alpha) - \langle p_{\bar{I}}, X_{\bar{I}}(\alpha) \rangle]_{\alpha=\alpha(x_I, p_{\bar{I}})} && \text{в карте } U_I, \\ S_{Iq}(x_I, \eta_{\bar{I}}, q) &= [\tau(\alpha) - \langle \eta_{\bar{I}}, x_{\bar{I}}(\alpha) \rangle - qE(\alpha)]_{\alpha=\alpha(x_I, \eta_{\bar{I}}, q)} && \text{в карте } U_{Iq}, \\ S_{IE}(x_I, \eta_{\bar{I}}, E) &= [\tau(\alpha) - \langle \eta_{\bar{I}}, x_{\bar{I}}(\alpha) \rangle - 2q(\alpha)E]_{\alpha=\alpha(x_I, \eta_{\bar{I}}, E)} && \text{в карте } U_{IE}, \end{aligned}$$

где использованы обозначения вида

$$\langle x_{\bar{I}}, p_{\bar{I}} \rangle = \sum_{j \in \bar{I}} x_j p_j.$$

6. Канонический оператор

6.1. Локальный канонический оператор. Зафиксируем каким-либо образом в канонических картах аргументы соответствующих якобианов и определим локальные канонические операторы следующими формулами.

6.1.1. Канонический оператор в карте U_I . В стандартной канонической карте U_I локальный канонический оператор $K_I: C_0^\infty(U_I) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ определяется стандартной формулой [13], [14], [24]

$$[K_I \varphi](x, h) = \frac{e^{i\pi|\bar{I}|/4}}{(2\pi h)^{|\bar{I}|/2}} \int e^{(i/h)(S_I(x_I, p_{\bar{I}}) + \langle x_{\bar{I}}, p_{\bar{I}} \rangle)} \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}} \Big|_{\alpha=\alpha(x_I, p_{\bar{I}})} dp_{\bar{I}}. \quad (17)$$

(В неособой карте $(\bar{I} = \emptyset)$ интеграл по $p_{\bar{I}}$ отсутствует. Мы опускаем аналогичные замечания ниже.)

6.1.2. *Канонический оператор в карте U_{IE} .* В карте U_{IE} локальный канонический оператор $K_{IE}: C_0^\infty(U_{IE}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ определим формулой

$$[K_{IE}\varphi](x, h) = \frac{e^{i\pi(|\bar{I}|/4+1/2)}}{h(2\pi h)^{|\bar{I}|/2}} \int \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{E(x_j - f(x'))}\right) e^{(i/h)(S_{IE}(x_I, \eta_{\bar{T}}, E) + \langle x_{\bar{T}}, \eta_{\bar{T}} \rangle)} \times \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}} \Big|_{\alpha=\alpha(x_I, \eta_{\bar{T}}, E)} dp_{\bar{T}} dE \quad (18)$$

в случае (а) и

$$[K_{IE}\varphi](x, h) = \frac{e^{i\pi(|\bar{I}|/4+1/2)}}{h(2\pi h)^{|\bar{I}|/2}} \int \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{E(f(x') - x_j)}\right) e^{(i/h)(S_{IE}(x_I, \eta_{\bar{T}}, E) + \langle x_{\bar{T}}, \eta_{\bar{T}} \rangle)} \times \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}} \Big|_{\alpha=\alpha(x_I, \eta_{\bar{T}}, E)} dp_{\bar{T}} dE \quad (19)$$

в случае (б). Отметим, что поскольку $\text{supp } \varphi$ компактен и лежит в $\subset U_{IE}$, интегрирование по E в (18) и (19) в действительности происходит по некоторому конечному промежутку $[E_1, E_2]$, причем $E_1 > 0$.

6.1.3. *Канонический оператор в карте U_{Iq} .* В карте U_{Iq} локальный канонический оператор $K_{Iq}: C_0^\infty(U_{Iq}) \rightarrow C^\infty(\bar{\Omega})$ определим формулой

$$[K_{Iq}\varphi](x, h) = \frac{e^{i\pi(|\bar{I}|/4+1/4)}}{h(2\pi h)^{(|\bar{I}|+1)/2}} \int \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{E(x_j - f(x'))}\right) e^{(i/h)(S_{Iq}(x_I, \eta_{\bar{T}}, q) - qE + \langle x_{\bar{T}}, \eta_{\bar{T}} \rangle)} \times \chi(E) \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}} \Big|_{\alpha=\alpha(x_I, \eta_{\bar{T}}, q)} dp_{\bar{T}} dq dE \quad (20)$$

в случае (а) и

$$[K_{Iq}\varphi](x, h) = \frac{e^{i\pi(|\bar{I}|/4+1/4)}}{h(2\pi h)^{(|\bar{I}|+1)/2}} \int \mathbf{J}_0\left(\frac{2}{h}\sqrt{E(f(x') - x_j)}\right) e^{(i/h)(S_{Iq}(x_I, \eta_{\bar{T}}, q) - qE + \langle x_{\bar{T}}, \eta_{\bar{T}} \rangle)} \times \chi(E) \frac{\varphi(\alpha)}{\sqrt{\mathcal{J}_I(\alpha)}} \Big|_{\alpha=\alpha(x_I, \eta_{\bar{T}}, q)} dp_{\bar{T}} dq dE \quad (21)$$

в случае (б). Здесь $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ – срезающая функция такая, что $\chi(\mathcal{E}(\alpha)) = 1$ при $\alpha \in U_{Iq}$.

В пп. 6.1.2 и 6.1.3 j – индекс, использованный в п. 5.2.3 при определении канонических координат в картах U_{Iq} и U_{IE} , а $x' = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

Для дальнейшего каким-либо образом пронумеруем канонические карты индексом l и будем обозначать их через U_l , соответствующий канонический оператор через K_l , а эйконал в карте U_l – через τ_l .

6.1.4. *Действие канонического оператора в пространства $\mathfrak{H}^s$.*

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(U_l)$. Тогда $K_l\varphi \in \mathfrak{H}^s(\Omega)$ для любого $s \in \mathbb{R}$.

6.1.5. Локальная формула коммутации.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $D \in \text{DEG } \bar{\Omega}$. Тогда в карте U_l существует последовательность дифференциальных операторов P_{lk} порядка k , $k = 0, 1, 2, \dots$, таких, что

$$DK_l\varphi = K_l \left(\sum_{k=0}^N (-ih)^k P_{lk}\varphi \right) + O(h^{N+1})$$

для любого $N \geq 0$ и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(U_l)$. Кроме того,

$$P_{l0} = \sigma(D)|_\Lambda,$$

а если многообразие Λ инвариантно относительно гамильтонова векторного поля, соответствующего гамильтониану $H = \sigma(D)$, то

$$P_{l1} = \frac{d}{dt} + \sigma_{\text{sub}}(D)|_\Lambda,$$

где d/dt – производная вдоль гамильтонова векторного поля, отвечающего гамильтониану H .

6.2. Глобальное определение канонического оператора.

6.2.1. Сравнение локальных канонических операторов.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $U_l \cap U_m \neq \emptyset$. Существует такая последовательность дифференциальных операторов $R_k \equiv R_{(lm)k}$, $k = 1, 2, \dots$, в $U_l \cap U_m$, что

$$K_l\varphi = e^{(i/h)\tau_{lm} + i\pi\sigma_{lm}} K_m \left(\varphi + \sum_{k=1}^N (-ih)^k R_k\varphi \right) + O(h^{N+1})$$

для любого $N \geq 0$ и любой функции $\varphi \in C_0^\infty(U_l)$, где

$$\tau_{lm} = \tau_l(\alpha) - \tau_m(\alpha) = \text{const} \quad \text{в } U_l \cap U_m,$$

а $\sigma_{lm} \in \mathbb{Z}$ зависит от выбора аргументов якобианов в определении локальных канонических операторов K_l и K_m .

6.2.2. Условие квантования и глобализация. Предположим, что выполнено условие квантования: класс когомологий многообразия Λ с коэффициентами в $\mathbb{R}/(2\mathbb{Z})$, определяемый коциклом Чеха

$$\varkappa_{lm} = \frac{1}{\pi h} \tau_{lm} + \sigma_{lm}$$

покрытия $\{U_l\}$, тривиален. Тогда, умножая каждый из операторов K_l на постоянный унимодулярный множитель, можно добиться того, чтобы

$$K_l\varphi = K_m\varphi + O(h), \quad \varphi \in C_0^\infty(U_l \cap U_m),$$

для любых l и m . Пусть $\{e_l(\alpha)\}$ – гладкое разбиение единицы на Λ , подчиненное каноническому покрытию $\{U_l\}$. Определим канонический оператор на Λ формулой

$$K_\Lambda^h\varphi = \sum K_l e_l\varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Lambda). \quad (22)$$

ТЕОРЕМА 6. Канонический оператор (22) с точностью до $O(h)$ не зависит от выбора разбиения единицы. Для $D \in \text{DEG } \bar{\Omega}$ справедлива формула коммутации

$$DK_{\Lambda}^h \varphi = K_{\Lambda}^h \left(\sum_{k=0}^N (-ih)^k P_k \varphi \right) + O(h^{N+1}), \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\Lambda), \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

где P_k – дифференциальные операторы порядка k , причем

$$P_{l0} = \sigma(D)|_{\Lambda},$$

а если многообразие Λ инвариантно относительно гамильтонова векторного поля, соответствующего гамильтониану $H = \sigma(D)$, то

$$P_{l1} = \frac{d}{dt} + \sigma_{\text{sub}}(D)|_{\Lambda},$$

где d/dt – производная вдоль гамильтонова векторного поля, отвечающего гамильтониану H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА теорем 3, 4, 5 и 6 основаны на применении метода стационарной фазы [26] с учетом интегрального представления (13), свойств (14), (15) и оценок (16) и сопряжены с громоздкими вычислениями, которые мы здесь опускаем.

Автор признателен С. Ю. Доброхотову за внимание и поддержку, а также О. Л. Толстой и Ю. А. Пупыреву за большую помощь при подготовке текста к печати.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, “Локализованные решения одномерной нелинейной системы уравнений мелкой воды со скоростью $c = \sqrt{x}$ ”, *УМН*, **65**:1 (2010), 185–186.
- [2] S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, B. Tirozzi, “Asymptotic solution of the one-dimensional wave equation with localized initial data and with degenerating velocity. I”, *Russ. J. Math. Phys.*, **17**:4 (2010), 434–447.
- [3] С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский, Б. Тироцци, “Асимптотические решения двумерного модельного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и локализованными начальными данными”, *Алгебра и анализ*, **22**:6 (2010), 67–90.
- [4] В. Е. Назайкинский, “Асимптотические решения вырождающегося волнового уравнения с локализованными начальными данными, отвечающие различным самосопряженным расширениям”, *Матем. заметки*, **89**:5 (2011), 797–800.
- [5] В. Е. Назайкинский, “Геометрия фазового пространства для волнового уравнения, вырождающегося на границе области”, *Матем. заметки*, **92**:1 (2012), 153–156.
- [6] S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, B. Tirozzi, “Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and asymptotic solutions with localized initial data”, *Russ. J. Math. Phys.*, **20**:4 (2013), 389–401.
- [7] J. J. Stoker, *Water Waves: The Mathematical Theory with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1992.
- [8] Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 1996.
- [9] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, “Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой”, *Итоги науки. Сер. Математика. Мат. анализ*. 1969, ВИНТИ, М., 1971, 7–252.
- [10] G. Fichera, “Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine”, *Atti Accad. Naz. Lincei. Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I. (8)*, **5** (1956), 3–30.

- [11] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, ЛГУ, Л., 1980.
- [12] T. Vukašinac, P. Zhevandrov, “Geometric asymptotics for a degenerate hyperbolic equation”, *Russ. J. Math. Phys.*, **9**:3 (2002), 371–381.
- [13] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, МГУ, М., 1965.
- [14] В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [15] С. Ю. Доброхотов, Б. Тироцци, А. И. Шафаревич, “Представления быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова”, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 792–796.
- [16] В. Е. Назайкинский, “О представлениях локализованных функций в $\mathbb{R}^2$ каноническим оператором Маслова”, *Матем. заметки*, **96**:1 (2014), 87–99.
- [17] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1981.
- [18] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
- [19] *Функциональный анализ*, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972.
- [20] В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
- [21] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1987.
- [22] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1970.
- [23] Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций. Ч. 1*, ИЛ, М., 1949.
- [24] А. С. Мищенко, Б. Ю. Стернин, В. Е. Шаталов, *Лагранжесвы многообразия и метод канонического оператора*, Наука, М., 1978.
- [25] В. И. Арнольд, “О характеристическом классе, входящем в условия квантования”, *Функц. анализ и его прил.*, **1**:1 (1967), 1–14.
- [26] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.

В. Е. Назайкинский

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского
РАН, г. Москва,
Московский физико-технический институт
(государственный университет),
г. Долгопрудный Московской обл.
E-mail: nazaikinskii@yandex.ru

Поступило

11.04.2014