Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Пичугов, Точные константы в неравенствах Джексона для периодических дифференцируемых функций в пространстве L_∞ , *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 277–284

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10482>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 05:56:21

Точные константы в неравенствах Джексона для периодических дифференцируемых функций в пространстве L_∞

С. А. Пичугов

Доказано, что в пространстве $L_\infty[0, 2\pi]$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots, n \in \mathbb{N}$, $r = 1, 3, 5, \dots$, $\mu \geq r$ выполняются равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_\infty^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\omega(f^{(r)}, \pi/(n(2k+1)))} = \sup_{\substack{f \in L_\infty^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n,\mu}(f)}{\omega(f^{(r)}, \pi/(n(2k+1)))} = \frac{\|\psi_{r,2k+1}\|}{2n^r},$$

где $E_{n-1}(f)$ и $E_{n,\mu}(f)$ – наилучшие приближения f соответственно тригонометрическими полиномами степени $n-1$ и 2π -периодическими сплайнами минимального дефекта порядка μ с $2n$ равноотстоящими узлами, $\omega(f^{(r)}, h)$ – модуль непрерывности $f^{(r)}$, $\psi_{r,2k+1}$ – r -й периодический интеграл специальной функции $\psi_{0,2k+1}$, которая является нечетной кусочно-постоянной по разбиению $j\pi/(2k+1)$, $j \in \mathbb{Z}$. При $k=0$ ранее этот результат был получен Лигуном.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm10482

1. Обозначения. Постановка задачи. Пусть $L_\infty = L_\infty[0, 2\pi]$ – пространство действительных 2π -периодических существенно ограниченных функций с нормой $\|f\| = \{\text{vrai sup } |f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$; L_∞^r ($r \in \mathbb{N}$) – множество r -х 2π -периодических интегралов от функций $f \in L_\infty$ таких, что $f \perp 1$; $\Delta_t f(x) = f(x+t) - f(x)$,

$$\omega(f, h) = \sup \{\|\Delta_t f\|; |t| \leq h\}$$

– модуль непрерывности f в L_∞ ;

$$E(f; M) = \inf \{\|f - g\|; g \in M\}$$

– наилучшее приближение элемента f множеством M ;

$$E(\mathcal{W}^r; M) = \sup \{E(f; M); f \in \mathcal{W}^r\}$$

– наилучшее приближение множества $\mathcal{W}^r$ множеством M , где

$$\mathcal{W}^r = \{f : f \in L_\infty^r, \|f^{(r)}\| \leq 1\}, \quad r \in \mathbb{N};$$

T_{2n-1} – множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$; $\mathcal{S}_{2n,r}$ – множество всех 2π -периодических сплайн-функций минимального дефекта порядка r с $2n$ равноотстоящими узлами (см., например, [1], [2]);

$$E_{n-1}(f) = E_{n-1}(f; T_{2n-1}), \quad E_{n,r}(f) = E_{n-1}(f; \mathcal{S}_{2n,r});$$

$\varphi_r(x)$, $r = 1, 2, \dots$, – r -й периодический интеграл, в среднем равный нулю на периоде, от функции $\varphi_0(x) = \text{sign} \sin x$;

$$\varphi_{n,r}(x) = \frac{\varphi_r(nx)}{n^r}, \quad \mathcal{K}_r = \|\varphi_r\| = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}}$$

– константы Фавара.

В работах [3], [4] Лигун исследовал точные константы в неравенствах Джексона для приближения дифференцируемых функций. В частности, были доказаны следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1 (Лигун [3], [4]). Пусть $r = 1, 2, \dots$, $f \in L_{\infty}^r$, M – произвольное подпространство, содержащее константы,

$$A_r = \left(\frac{E(\mathcal{W}^r; M)}{\mathcal{K}_r} \right)^{1/r}.$$

Тогда для $\delta \geq \pi A_{r+1}$ при $r = 1, 3, 5, \dots$ и для $\delta \geq 2\pi A_{r+1}$ при $r = 2, 4, 6, \dots$

$$E(f; M) \leq \frac{1}{2} A_{r+1}^r \mathcal{K}_r \omega(f^{(r)}, \delta). \quad (1.1)$$

С помощью этой оценки сверху наилучших приближений вычисляются точные константы в теоремах Джексона.

ТЕОРЕМА 2 (Лигун [3], [4]). Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\mu \geq r$. Тогда

$$\sup_{\substack{f \in L_{\infty}^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\omega(f^{(r)}, \delta)} = \sup_{\substack{f \in L_{\infty}^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n,\mu}(f)}{\omega(f^{(r)}, \delta)} = \frac{\mathcal{K}_r}{2n^r}, \quad (1.2)$$

где $\delta \geq \pi/n$ при r нечетных и $\delta \geq 2\pi/n$ при r четных.

Так как (см., например, [1], [2])

$$E_{n-1}(\mathcal{W}^r) = E_{n,\mu}(\mathcal{W}^r) = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}, \quad \mu \geq r-1, \quad (1.3)$$

то оценка сверху констант Джексона в (1.2) следует из (1.1), а экстремальной функцией в (1.2) является $\varphi_{n,r}$.

Отметим, что соотношение (1.2) в случае приближения полиномами первоначально было доказано Жуком для $r = 1, 3$ в [5]. Кроме того, в [3], [4] доказано, что соотношения (1.1), (1.2) справедливы в пространстве L_1 , а также получено равенство (1.2) для приближения сплайнами при четных r и $\delta \geq \pi/n$.

2. Формулировка результата. В настоящей работе мы докажем аналог теоремы 2 для нечетных r в случаях, когда $\delta = \pi/(n(2k+1))$, $k \in \mathbb{N}$.

Сначала введем семейство функций $\psi_{n,r,2k+1}(x)$, которые будут экстремальными в наших соотношениях.

Для $k \in \mathbb{N}$ определим 2π -периодическую функцию $\psi_{0,2k+1}(x)$ на основном периоде $[-\pi, \pi]$ как нечетную кусочно-постоянную функцию по разбиению $j\pi/(2k+1)$, $j \in \mathbb{Z}$, причем

$$\begin{aligned}\psi_{0,2k+1}(0) &= 0, & \psi_{0,2k+1}(x) &= 2j+1, & x &\in \left(\frac{j\pi}{2k+1}; \frac{(j+1)\pi}{2k+1}\right], & j &= 0, \dots, k-1, \\ \psi_{0,2k+1}(x) &= 2k+1, & x &\in \left(\frac{k\pi}{2k+1}; \frac{\pi}{2}\right]; \\ \psi_{0,2k+1}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \psi_{0,2k+1}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), & x &\in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].\end{aligned}$$

Отметим, что $\psi_{0,2k+1}(x) \perp 1$ и при $k=0$ выполнено $\psi_{0,1}(x) = \varphi_0(x)$.

Для $r \in \mathbb{N}$ $\psi_{r,2k+1}(x)$ — r -й 2π -периодический интеграл функции $\psi_{0,2k+1}(x)$, в среднем равный нулю,

$$\psi_{n,r,2k+1}(x) = \frac{\psi_{r,2k+1}(nx)}{n^r}.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $r = 1, 3, 5, \dots$, $\mu \geq r$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ выполняются равенства

$$\sup_{\substack{f \in L_\infty^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n-1}(f)}{\omega(f^{(r)}, \pi/(n(2k+1)))} = \sup_{\substack{f \in L_\infty^r \\ f \neq \text{const}}} \frac{E_{n,\mu}(f)}{\omega(f^{(r)}, \pi/(n(2k+1)))} = \frac{\|\psi_{r,2k+1}\|}{2n^r}. \quad (2.1)$$

Прежде чем доказывать теорему, исследуем свойства функций $\psi_{r,2k+1}(x)$.

3. Свойства функций $\psi_{r,2k+1}(x)$.

СВОЙСТВО 1. Функция $\psi_{2r+1,2k+1}(x)$ четная,

$$\psi_{2r+1,2k+1}(0) = (-1)^r \|\psi_{2r+1,2k+1}\|;$$

функция $\psi_{2r,2k+1}(x)$ нечетная,

$$\psi_{2r,2k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^r \|\psi_{2r,2k+1}\|.$$

СВОЙСТВО 2. Выполнено равенство

$$\Delta_{\pi/(2k+1)}\psi_{r,2k+1}(x) = -2\varphi_r\left(x - \pi\frac{k}{2k+1}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки этого равенства достаточно ограничиться случаем $r=0$.

Свойство 3. Выполнено равенство

$$\psi_{r,2k+1}(x) = \sum_{\nu=0}^{2k} \varphi_r \left(x - \pi \frac{k-\nu}{2k+1} \right).$$

Доказательство. Действительно, при $r = 0$

$$\begin{aligned} \psi_{0,2k+1}(x) &= \left(\psi_{0,2k+1}(x) - \psi_{0,2k+1} \left(x + \frac{\pi}{2k+1} \right) \right) \\ &\quad + \left(\psi_{0,2k+1} \left(x + \frac{\pi}{2k+1} \right) - \psi_{0,2k+1} \left(x + \frac{2\pi}{2k+1} \right) \right) + \dots \\ &\quad + \left(\psi_{0,2k+1} \left(x + \frac{2k\pi}{2k+1} \right) - \psi_{0,2k+1}(x + \pi) \right) + \psi_{0,2k+1}(\pi), \end{aligned}$$

и так как $\psi_{0,2k+1}(x + \pi) = -\psi_{0,2k+1}(x)$, то

$$2\psi_{0,2k+1}(x) = - \sum_{\nu=0}^{2k} \Delta_{\pi/(2k+1)} \psi_{0,2k+1} \left(x + \nu \frac{\pi}{2k+1} \right).$$

Осталось применить свойство 2.

Свойство 4. При $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \|\psi_{2r,2k+1}\| &= \mathcal{K}_{2r} + 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} \left| \varphi_{2r} \left(\frac{\pi}{2} \frac{2\nu+1}{2k+1} \right) \right|, \\ \|\psi_{2r+1,2k+1}\| &= \mathcal{K}_{2r+1} + 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} \left| \varphi_{2r+1} \left(\pi \frac{\nu}{2k+1} \right) \right|. \end{aligned}$$

Доказательство. Так как $\|\varphi_{2r}\| = |\varphi_{2r}(\pi/2)| = \mathcal{K}_{2r}$, для $x \in [0, \pi/2)$

$$|\varphi_{2r}(x)| \neq 0 \quad \text{и} \quad \left| \varphi_{2r} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right| = \left| \varphi_{2r} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right|,$$

то из свойств 1, 3 следует, что

$$\begin{aligned} \|\psi_{2r,2k+1}\| &= \left| \psi_{2r,2k+1} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| = \sum_{\nu=0}^{2k} \left| \varphi_{2r} \left(\frac{\pi}{2} - \pi \frac{k-\nu}{2k+1} \right) \right| \\ &= \left| \varphi_{2r} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right| + 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} \left| \varphi_{2r} \left(\frac{\pi}{2} - \pi \frac{k-\nu}{2k+1} \right) \right| = \mathcal{K}_{2r} + 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} \left| \varphi_{2r} \left(\frac{\pi}{2} \frac{2\nu+1}{2k+1} \right) \right|. \end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично.

В частности, при $r = 1$ и всех $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\|\psi_{1,2k+1}\| = \frac{\pi}{4} \left(2k+1 + \frac{1}{2k+1} \right);$$

при $k = 1$ и всех $r = 1, 2, \dots$

$$\|\psi_{r,3}\| = \mathcal{K}_r \left(2 - \frac{1}{3^r} \right)$$

(так как $\psi_{0,3} = 2\varphi_0(x) - \varphi_0(3x)$).

С помощью формулы суммирования Эйлера–Маклорена в терминах констант Фавара получим еще одно аналитическое представление $\|\psi_{r,2k+1}\|$.

Для любого $h > 0$ зададим на $[-0.5\pi h; 0.5\pi h]$ функции $d_{h,r}(x)$, $r = 0, 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$\begin{aligned} d_{h,0}(x) &= -\frac{1}{\pi h}, & |x| \leq 0.5\pi h; \\ d_{h,1}(x) &= 0.5 - \frac{x}{\pi h}, & x \in (0; 0.5\pi h), & d_{h,1}(-x) = -d_{h,1}(x); \\ d_{h,r}(x) &= \int_{\gamma_r}^1 d_{h,r-1}(u) du, & r = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

где $\gamma_r \in [-0.5\pi h; 0)$ выбрано так, чтобы обеспечить равенство

$$\int_{-0.5\pi h}^{0.5\pi h} d_{h,r}(x) dx = 0.$$

Положим для $\nu = 0, 1, 2, \dots$

$$d_{h,2\nu} = d_{h,2\nu}(0.5\pi h), \quad \mathcal{D}_{h,2\nu}(x) = d_{h,2\nu}(x) - d_{h,2\nu}, \quad \mathcal{D}_{h,2\nu+1}(x) = d_{h,2\nu+1}(x).$$

Тогда [3] для $r = 1, 2, 3, \dots$ и любой функции $f \in L_1^r$, в среднем равной нулю, выполняется равенство

$$f(x) = - \int_{-0.5\pi h}^{0.5\pi h} f^{(r)}(x-u) \mathcal{D}_{h,r}(u) du - \sum_{\nu=0}^{[0.5(r-1)]} d_{h,2\nu} \Delta_{\pi h} f^{(2\nu-1)}(x-0.5\pi h), \quad (3.1)$$

где при $\nu = 0$ $f^{(-1)}$ – первообразная f .

С помощью формулы суммирования (3.1) в [3] доказано равенство

$$h^r \|\varphi_r\| = \int_{-0.5\pi h}^{0.5\pi h} |\mathcal{D}_{h,r}(u)| du + 2 \sum_{\nu=0}^{[0.5(r-1)]} |d_{h,2\nu}| h^{r+1-2\nu} \mathcal{K}_{r+1-2\nu}, \quad (3.2)$$

справедливое при всех $h > 0$.

Мы докажем аналог (3.2) для $\|\psi_{r,2k+1}\|$.

ЛЕММА 1. Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^r} \|\psi_{r,2k+1}\| &= \int_{-\pi/(2n(2k+1))}^{\pi/(2n(2k+1))} |\mathcal{D}_{1/((2k+1)n),r}(u)| du \\ &+ 2 \sum_{\nu=0}^{[0.5(r-1)]} |d_{1/((2k+1)n),2\nu}| n^{2\nu-1-r} \mathcal{K}_{r+1-2\nu}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (3.1)

$$h = \frac{1}{n(2k+1)}, \quad f(x) = \psi_{n,2r+1,2k+1}(x), \quad x = 0.$$

Тогда

$$f(0) = \psi_{n,2r+1,2k+1}(0) = (-1)^r \|\psi_{n,2r+1,2k+1}\| = (-1)^r n^{-2r-1} \|\psi_{2r+1,2k+1}\|. \quad (3.4)$$

Далее, для $|x| \leq 0.5\pi/(n(2k+1))$ (см. [3])

$$\operatorname{sign} \mathcal{D}_{1/((2k+1)n), 2r+1}(x) = (-1)^r \operatorname{sign} \sin x = (-1)^r \psi_{n, 2r+1, 2k+1}^{(2r+1)}(x),$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/(2n(2k+1))}^{\pi/(2n(2k+1))} f^{(2r+1)}(-u) \mathcal{D}_{1/((2k+1)n), 2r+1}(u) du \\ &= (-1)^r \int_{-\pi/(2n(2k+1))}^{\pi/(2n(2k+1))} |\mathcal{D}_{1/((2k+1)n), 2r+1}(u)| du. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как $\operatorname{sign} d_{h, 2\nu} = (-1)^{\nu+1}$, $\nu = 1, \dots, [0.5(r-1)]$,

$$\varphi_{2r+2-2\nu}(-x) = -\varphi_{2r+2-2\nu}(x), \quad \varphi_{2r+2-2\nu}(0.5\pi) = (-1)^{r+1-\nu} \mathcal{K}_{2r+2-2\nu},$$

то, используя свойство 2, получим

$$\begin{aligned} \Delta_{\pi/(n(2k+1))} f^{(2\nu-1)}\left(-\frac{0.5\pi}{n(2k+1)}\right) &= \Delta_{\pi/(n(2k+1))} \psi_{n, 2r+2-2\nu, 2k+1}\left(-\frac{0.5\pi}{n(2k+1)}\right) \\ &= n^{2\nu-2-2r} \Delta_{\pi/(n(2k+1))} \psi_{2r+2-2\nu, 2k+1}\left(-\frac{0.5\pi}{n(2k+1)}\right) \\ &= n^{2\nu-2-2r} \left(-2\varphi_{2r+2-2\nu}\left(-\frac{0.5\pi}{(2k+1)} - \frac{\pi k}{2k+1}\right)\right) = 2n^{2\nu-2-2r} \varphi_{2r+2-2\nu}(0.5\pi) \\ &= 2n^{2\nu-2-2r} (-1)^{r-\nu+1} \mathcal{K}_{2r+2-2\nu}, \\ &\quad - \sum_{\nu=0}^{[0.5(r-1)]} d_{1/(n(2k+1)), 2\nu} \Delta_{\pi/(n(2k+1))} f^{(2\nu-1)}\left(-\frac{0.5\pi}{n(2k+1)}\right) \\ &= (-1)^r 2 \sum_{\nu=0}^{[0.5(r-1)]} |d_{1/(n(2k+1)), 2\nu}| n^{2\nu-2-2r} \mathcal{K}_{2r+2-2\nu}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.1), (3.4)–(3.6) следует (3.3) для нечетных r .

Для четных r доказательство аналогичное: достаточно положить в (3.1)

$$f(x) = \psi_{n, 2r, 2k+1}\left(x - 0.5\frac{\pi}{n}\right), \quad x = 0.$$

Лемма 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 3. Сначала получим оценку сверху для $E(f; M)$, аналогичную (1.1), в случае $\delta = \pi/(n(2k+1))$:

$$\begin{aligned} E(f; M) &\leq \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n(2k+1)}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{\|\psi_{n, 2k+1}\|}{2n^r} + \sum_{\nu=0}^{[0.5(r-1)]} |d_{1/(n(2k+1)), 2\nu}| \mathcal{K}_{r+1-2\nu}\left(A_{r+1-2\nu}^{r+1-2\nu} - \frac{1}{n^{r+1-2\nu}}\right)\right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Используем формулу (3.1) для произвольного $h > 0$:

$$E(f; M) \leq \left\| \int_{-0.5\pi h}^{0.5\pi h} f^{(r)}(x-u) \mathcal{D}_{h,r}(u) du \right\| + \sum_{\nu=0}^{[0.5(r-1)]} |d_{h,2\nu}| E(\Delta_{\pi h} f^{(2\nu-1)}(\cdot - 0.5\pi h); M).$$

Так как для нечетного r функция $\mathcal{D}_{h,r}$ нечетная, то

$$\left\| \int_{-0.5\pi h}^{0.5\pi h} f^{(r)}(x-u) \mathcal{D}_{h,r}(u) du \right\| = \left\| \frac{1}{2} \int_{-0.5\pi h}^{0.5\pi h} (f^{(r)}(x-u) - f^{(r)}(x+u)) \mathcal{D}_{h,r}(u) du \right\| \leq \omega(f^{(r)}, \pi h) \frac{1}{2} \int_{-0.5\pi h}^{0.5\pi h} |\mathcal{D}_{h,r}(u)| du.$$

Кроме того,

$$E(\Delta_{\pi h} f^{(2\nu-1)}(\cdot - 0.5\pi h)) \leq E(\mathcal{W}^{r+1-2\nu}; M) \omega(f^{(r)}, \pi h) = \mathcal{K}_{r+1-2\nu} A_{r+1-2\nu}^{r+1-2\nu} \omega(f^{(r)}, \pi h).$$

Поэтому

$$E(f; M) \leq \omega(f^{(r)}, \pi h) \left(\frac{1}{2} \int_{-0.5\pi h}^{0.5\pi h} |\mathcal{D}_{h,r}(u)| du + \sum_{\nu=0}^{[0.5(r-1)]} |d_{h,2\nu}| \mathcal{K}_{r+1-2\nu} A_{r+1-2\nu}^{r+1-2\nu} \right). \quad (4.2)$$

Это соотношение для произвольного $h > 0$ было получено в процессе доказательства теоремы 1 в [4], и его вывод приведен нами только для полноты изложения.

Положим в (4.2) $h = 1/(n(2k+1))$, воспользуемся леммой 1, и получим (4.1).

Если подпространство M конечномерное и $\dim M \leq 2n$, то последняя сумма в правой части (4.1) неотрицательна. Это следует из того, что

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{r+1-2\nu} A_{r+1-2\nu}^{r+1-2\nu} &= E(\mathcal{W}^{r+1-2\nu}; M) \geq d_{2n}(\mathcal{W}^{r+1-2\nu}) \\ &= d_{2n-1}(\mathcal{W}^{r+1-2\nu}) = n^{2\nu-1-r} \mathcal{K}_{r+1-2\nu}, \end{aligned}$$

где $d_j(\mathcal{W}^{r+1-2\nu})$ – поперечник по Колмогорову порядка j класса $\mathcal{W}^{r+1-2\nu}$ (см., например, [1]).

Если же $M = T_{2n-1}$ или $M = \mathcal{S}_{2n,r}$, то эта сумма равна нулю (см. (1.3)), и мы получаем оценки сверху для констант Джексона (2.1).

Оценки снизу следуют из того, что

$$\begin{aligned} \omega\left(\psi_{n,r,2k+1}^{(r)}, \frac{\pi}{n(2k+1)}\right) &= 2, \\ E_{n-1}\left(\psi_{n,r,2k+1}\right) &= \|\psi_{n,r,2k+1}\| = \frac{1}{n^r} \|\psi_{r,2k+1}\|, \\ E_{n,\mu}(\psi_{n,r,2k+1}) &= \frac{1}{n^r} \|\psi_{r,2k+1}\|, \quad \mu \geq r \end{aligned}$$

(последнее равенство аналогично равенству $E_{n,\mu}(\varphi_{n,r}) = \|\varphi_r\|/n^r$ и следует из соотношения двойственности (см., например, [2]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения*, Наука, М., 1987.
- [2] Н. П. Корнейчук, *Сплайны в теории приближения*, Наука, М., 1984.
- [3] А. А. Лигун, “О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций”, *Матем. заметки*, **14**:1 (1973), 21–30.
- [4] А. А. Лигун, “Точные константы в неравенствах типа Джексона”, *Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами*, Вища школа, Киев, 1990, 3–74.
- [5] В. В. Жук, “О некоторых точных неравенствах между наилучшими приближениями и модулями непрерывности”, *Сиб. матем. журн.*, **12**:6 (1971), 1283–1291.

С. А. Пичугов

Днепропетровский национальный технический
университет железнодорожного транспорта,
Украина
E-mail: s.a.pichugov@mail.ru

Поступило

30.09.2013