Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Синьшан Ю, Хианглин Вей, Замечание о верхней границе для выпуклых дизъюнктивных разбиений, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 285–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 18:02:53

УДК 514.174.5

Замечание о верхней границе для выпуклых дизъюнктивных разбиений

Синьшан Ю, Хянглин Вей

Пусть $n(k, l, m)$, $k \leq l \leq m$, – наименьшее целое число, для которого любое конечное множество точек на плоскости, содержащее по крайней мере $n(k, l, m)$ точек в общем положении, имеет пустую выпуклую k -дыру, пустую выпуклую l -дыру и пустую выпуклую m -дыру, причем эти дыры попарно не пересекаются. Доказано, что $n(4, 4, 5) \leq 16$.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10483

1. Введение. В 1935 г. Эрде́ш и Секереш [1] поставили знаменитую комбинаторно-геометрическую проблему: верно ли, что для любого натурального $m \geq 3$ существует наименьшее целое $ES(m)$ с тем свойством, что любое множество n точек ($n \geq ES(m)$) на плоскости, никакие три из которых не коллинеарны, содержит подмножество, состоящее из m вершин выпуклого многоугольника? Вычисление точного значения $ES(m)$ – старая нерешенная проблема. Эрде́ш и Секереш показали в [2], что $ES(m) \geq 2^{m-2} + 1$, и высказали гипотезу, что эта оценка точна. Известно, что $ES(4) = 5$ и $ES(5) = 9$ [3]. С помощью компьютерных вычислений Секереш и Петерс [4] доказали, что $ES(6) = 17$. Значение $ES(m)$ для $m > 6$ неизвестно.

В 1978 г. Эрде́ш поставил также другую известную проблему: верно ли, что для любого натурального k существует наименьшее целое $H(k)$ с тем свойством, что любое множество $\geq H(k)$ точек на плоскости, никакие три из которых не коллинеарны, содержит k вершин выпуклого многоугольника, во внутренности которого нет точек из данного множества? Такое подмножество называется *пустым выпуклым k -угольником* или *k -дырой*. Очевидно, $H(3) = 3$. Эстер Кляйн показала, что $H(4) = 5$. Харборт [5] получил равенство $H(5) = 10$ и нашел конфигурацию девяти точек, для которых не существует пустых выпуклых пятиугольников. Хортон [6] доказал, что можно построить сколь угодно большое множество точек, не имеющее 7-дыр; это означает, что число $H(k)$ не существует для $k \geq 7$. Существование числа $H(6)$ независимо доказали Геркен [7] и Николас [8].

В статье [9] Урабе начал изучение проблемы дизъюнктивных дыр в связи с разбиениями множеств точек на плоскости. Обозначим *выпуклую оболочку* множества P

Работа выполнена при поддержке Естественного-научного фонда Хэбэя и Научного фонда Хэ-бэйского научно-технического университета (грант № QD200955).

через $\text{Conv}(P)$. Скажем, что семейство дыр $\{H_i\}_{i \in I}$ попарно дизъюнктно, если $\text{Conv}(H_i) \cap \text{Conv}(H_j) = \emptyset$ для любых $i \neq j$, где $i, j \in I$; мы будем называть попарно дизъюнктные дыры просто дизъюнктными. Обозначим через $n(k_1, \dots, k_l)$, где $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_l$, наименьшее целое число с тем свойством, что любое множество на плоскости, содержащее не менее $n(k_1, \dots, k_l)$ точек, никакие три из которых не коллинеарны, имеет k_i -дыру для каждого i , $1 \leq i \leq l$, причем все эти дыры дизъюнкты. В [10] было доказано, что $n(2, 4) = 6$ и $n(3, 3) = 6$. В [9] Урабе показал, что $n(3, 4) = 7$, а в [11] Хосоно и Урабе доказали, что $n(4, 4) = 9$. В [12] те же авторы показали также, что $n(3, 5) = 10$, $12 \leq n(4, 5) \leq 14$ и $16 \leq n(5, 5) \leq 20$. Равенство $n(3, 4) = 7$ и неравенство $n(4, 5) \leq 14$ были позже подтверждены в статье [13] Ву и Динга. Хосоно и Урабе доказали в [10], что $n(4, 5) \leq 13$; Бхаттачария и Дас [14] уточнили этот результат, доказав, что $n(4, 5) = 12$. Хосоно и Урабе [10] улучшили нижнюю оценку для $n(5, 5)$, увеличив ее до 17, а Бхаттачария и Дас [15] улучшили верхнюю оценку для $n(5, 5)$, снизив ее до 19. Хосоно и Урабе [10] доказали, что $n(2, 3, 4) = 9$, $n(2, 3, 5) = 11$, $n(3, 3, 3) = 12$ и $n(4, 4, 4) = 16$. Кроме того, они показали, что $15 \leq n(4, 4, 5) \leq 17$.

В этой заметке мы покажем, что верхнюю оценку для $n(4, 4, 5)$ можно уменьшить до 16.

2. Определения. В этой статье мы рассматриваем конечные множества P , состоящие из точек плоскости в общем положении, т.е. множества точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Мы выделяем *вершины*, т.е. точки, лежащие на границе выпуклой оболочки множества, и называем остальные точки *внутренними*. Мы обозначаем множество вершин множества P через $V(P)$, а множество внутренних точек P – через $I(P)$. Через $|P|$ мы обозначаем общее число точек в множестве P . Пусть $p_1, p_2, \dots, p_k$ – k точек в P . Через $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ мы обозначаем замкнутую область с вершинами $p_1, p_2, \dots, p_k$, которые последовательно занумерованы по или против часовой стрелки; через $(p_1, p_2, \dots, p_k)_k$ обозначается пустая выпуклая k -дыра при условии, что замкнутая область $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ выпукла, а ее внутренность не содержит точек множества P . Как и в [10], для прямой, проходящей через точки a и b , используется обозначение $l(a, b)$. Замкнутая полуплоскость с границей $l(a, b)$, которая содержит точку c , обозначается через $H(c; ab)$, а замкнутая полуплоскость, не содержащая c , обозначается через $H(\bar{c}; ab)$.

Пусть R – область на плоскости. Под внутренними точками R мы подразумеваем точки множества P , принадлежащие внутренности R ; мы говорим, что область R пуста, если R не содержит внутренних точек. Мы обозначаем выпуклый конус с вершиной a , определенный точками a, b и c , через $\gamma(a; b, c)$. Если конус $\gamma(a; b, c)$ непуст, мы определяем *точку атаки* $\alpha(a; b, c)$ из луча ab на ac как внутреннюю точку конуса $\gamma(a; b, c)$, для которой конус $\gamma(a; b, \alpha(a; b, c))$ пуст. Если $\beta = b$ или $\beta = c$, то мы обозначаем через β' точку, для которой a лежит на отрезке $\overline{\beta\beta'}$. Запись $\gamma(a; b', c)$ подразумевает, что a лежит на отрезке $\overline{bb'}$. Для точек a, b и c множества P мы пишем $\triangle abc = \text{Conv}(\{a, b, c\})$.

3. Основной результат и доказательство.

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место неравенство $n(4, 4, 5) \leq 16$, т.е. для любого множества точек на плоскости, содержащего не менее 16 точек в общем положении, найдутся две 4-дыры и одна 5-дыра, причем все три дыры дизъюнкты.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже знаем [10], что $n(4, 4, 5) \leq 17$. Ниже мы покажем, что для любого множества 16 точек на плоскости можно найти три дизъюнктные дыры: две 4-дыры и одну 5-дыру. Пусть P – множество, состоящее из 16 точек. Если нам удастся найти 4-дыру и не пересекающуюся с ней выпуклую область, содержащую остальные 12 точек, то, поскольку $n(4, 5) = 12$ [14], останется построить прямую, отделяющую эту 4-дыру от остальных 12 точек. Мы называем такую прямую *разрезающей*; для разрезающей прямой, которая проходит через точки u и v множества P , мы используем обозначение $L_4(u, v)$. Если мы найдем 5-дыру и не пересекающуюся с ней выпуклую область, содержащую хотя бы девять из оставшихся точек, то, поскольку $n(4, 4) = 9$ [11], останется построить прямую, отделяющую эту 5-дыру от этих девяти точек. Мы называем такую прямую *разрезающей*; для разрезающей прямой, которая проходит через точки u и v множества P , мы используем обозначение $L_5(u, v)$. Таким образом, для того чтобы доказать теорему, достаточно построить разрезающую прямую $L_4(u, v)$ или $L_5(u, v)$.

Пусть $V(P) = \{v_1, v_2, \dots, v_l\}$, где $v_1, v_2, \dots, v_l$ последовательно занумерованы по или против часовой стрелки. Рассмотрим любую сторону $\overline{v_i v_{i+1}}$ многоугольника $\text{Conv}(P)$.

Допустим, что треугольник $\triangle v_{i-1} v_i v_{i+1}$ пуст. Положим $q = \alpha(v_{i+1}; v_{i-1}, v_{i+2})$. Тогда $L_4(v_{i+1}, q)$ – разрезающая прямая, которая отделяет $(qv_{i-1} v_i v_{i+1})_4$ от остальных 12 точек.

Рис. 1

Предположим, что треугольник $\triangle v_{i-1} v_i v_{i+1}$ непуст; если конус $\gamma(p; v_{i+1}, v'_i)$ также непуст, то (см. рис. 1) имеется разрезающая прямая $L_4(p, r)$, которая отделяет $(rp v_i v_{i+1})_4$ от остальных 12 точек; здесь $p = \alpha(v_{i+1}; v_i, v_{i-1})$ и $r = \alpha(p; v_{i+1}, v'_i)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что для каждой стороны $\overline{v_i v_{i+1}}$ многоугольника P найдется точка p_i , для которой конус $\gamma(v_i; v_{i+1}, p_i) \cup \gamma(v_{i+1}; v_i, p_i)$ непуст. Мы будем называть такую точку p_i *другом* стороны $\overline{v_i v_{i+1}}$. Заметим, что $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$, т.е. $|P| \geq 2|V(P)|$. Рассмотрим любые идущие друг за другом стороны, скажем, $\overline{v_1 v_2}$ и $\overline{v_2 v_3}$, вместе с их друзьями p_1 и p_2 . Пусть T – подмножество, для которого $V(T) = \{v_2, p_1, p_2\}$. Возможны следующие случаи, соответствующие разным значениям $|I(T)|$.

Случай 1: $|I(T)| = 0$. Если треугольник $\triangle p_1 p_2 v_3$ непуст, то $L_4(p_1, q)$, где $q = \alpha(p_1; p_2, v_3)$, – разрезающая прямая, которая отделяет $(qp_1 v_2 p_2)_4$ от остальных 12 точек.

Предположим, что треугольник $\Delta p_1 p_2 v_3$ непуст. Если $\Delta v_1 p_1 v_3$ также непуст, то $L_4(v_3, q)$, где $q = \alpha(v_3; p_1, v_1)$, – разрезающая прямая, которая отделяет $(qp_1 v_2 p_2)_4$ от остальных 12 точек. Если $\Delta v_1 p_1 v_3$ пуст, то имеем разрезающую прямую $L_5(v_3, r)$, где $r = \alpha(v_3; v_1, v_4)$ (см. рис. 2), которая отделяет $(rv_1 p_1 p_2 v_3)_5$ от остальных десяти точек. (Очевидно, по определению друга заштрихованная область на рис. 2 не содержит точек множества P .)

Рис. 2

Случай 2: $|I(T)| = 1$. Возьмем $q \in I(T)$.

Если треугольник $\Delta qp_2 v_3$ непуст, то имеем разрезающую прямую $L_4(q, r)$, где $r = \alpha(q; p_2, v_3)$, которая отделяет $(rqv_2 p_2)_4$ от остальных 12 точек.

Предположим, что треугольник $\Delta qp_2 v_3$ пуст. Если и $\Delta qp_1 v_3$ пуст, то имеем разрезающую прямую $L_5(p_1, s)$, где $s = \alpha(p_1; v_3, v'_2)$, которая отделяет $(sp_1 qp_2 v_3)_5$ от остальных десяти точек. Если $\Delta qp_1 v_3$ непуст, рассмотрим $r = \alpha(v_3; q, p_1)$. Если $r \in \gamma(v_2; p_2, q)$, то $L_4(v_3, r)$ – разрезающая прямая, которая отделяет $(rqv_2 p_2)_4$ от остальных 12 точек. Предположим, что $r \in \gamma(v_2; p_1, q)$ (см. рис. 3). Если конус $\gamma(r; v_3, q')$ пуст, то $L_4(q, r)$ – разрезающая прямая, которая отделяет $(rqp_2 v_3)_4$ от остальных 12 точек, а если этот конус непуст, то $L_5(r, \alpha(r; v_3, q'))$ – разрезающая прямая, которая отделяет $(rqp_2 v_3 \alpha(r; v_3, q'))_5$ от остальных десяти точек.

Рис. 3

Случай 3: $|I(T)| = 2$. Положим $T' = T \setminus \{v_2\}$. Тогда $|V(T')| = 3$ или 4.

Рис. 4

Подслучай 3.1: $|V(T')| = 3$. Возьмем $q \in V(T')$ и $r \in I(T')$.

Если $r \in \gamma(v_2; p_2, q)$ (см. рис. 4), то $L_4(p_2, r)$ – разрезающая прямая, которая отделяет $(rqv_2p_2)_4$ остальных 12 точек, а если $r \in \gamma(v_2; p_1, q)$, то $L_4(p_1, r)$ отделяет $(rp_1v_2q)_4$ от остальных 12 точек.

Подслучай 3.2: $|V(T')| = 4$. Возьмем $q_1, q_2 \in I(T')$. Тогда четырехугольник $(p_1q_1q_2p_2)_4$ является 4-дырой, и имеем разрезающую прямую $L_5(p_1, \alpha(p_1; p_2, v'_2))$, которая отделяет $(p_1q_1q_2p_2\alpha(p_1; p_2, v'_2))_5$ от остальных десяти точек.

Случай 4: $|I(T)| \geq 3$. Положим $T' = T \setminus \{v_2\}$.

Рис. 5

Для каждого i обозначим через T_i треугольник с множеством вершин $V(T_i) = \{v_i, p_i, p_{i-1}\}$. Поскольку $|P| = 16$ и $|I(T_i)| \geq 3$ для каждого i , на основании уже рассмотренных случаев мы можем считать, что $|V(P)| = 3$, как показано на рис. 5; на этом рисунке $V(T_1) = \{v_1, p_1, p_3\}$, $V(T_2) = V(T) = \{v_2, p_2, p_1\}$ и $V(T_3) = \{v_3, p_3, p_2\}$. Следовательно, для $i = 1, 2, 3$ имеем либо $|I(T_i)| = 3$, либо $|I(T_i)| = 4$, и треугольник $\triangle p_1p_2p_3$ пуст. Без потери общности можно считать, что $|I(T)| = |I(T_2)| = 4$ и $|I(T_1)| = |I(T_3)| = 3$.

Подслучай 4.1: $|V(T')| = 6$. В этом случае $|I(T')| = 0$.

Имеется 6-дыра; обозначим ее через $(p_1q_1q_2q_3q_4p_2)_6$. Очевидно, $L_5(p_1, q_4)$ – разрезающая прямая, которая отделяет $(p_1q_1q_2q_3q_4)_5$ от остальных десяти точек.

Подслучай 4.2: $|V(T')| = 5$. В этом случае $|I(T')| = 1$. Возьмем $q_1, q_2, q_3 \in V(T')$ и $r \in I(T')$.

(1) Пусть $r \in \triangle p_2 p_3 q_3$ (для $r \in \triangle p_3 p_1 q_1$ рассуждения симметричны, и заключение остается верным). Из рис. 6 видно, что имеются три дизъюнктные дыры: 5-дыра $(rp_3 q_1 q_2 q_3)_5$, 4-дыра $T_3 \setminus \{p_3\}$ и 4-дыра $T_1 \setminus \{p_3\}$ (поскольку $H(4) = 5$).

Рис. 6

(2) Пусть имеем $r \in \triangle p_3 q_2 q_3$. Если точка r оказалась в заштрихованной области 1 на рис. 7, то имеем разрезающую прямую $L_5(p_1, p_2)$, которая отделяет 5-дыру $(rq_1 q_2 q_3 p_2)_5$ или 5-дыру $(rp_1 q_1 q_2 q_3)_5$ от остальных девяти точек. Если точка r находится в заштрихованной области 2 на рис. 7, то имеем разрезающую прямую $L_4(p_2, r)$, которая отделяет $(v_2 q_3 r q_2)_4$ от остальных 12 точек (в случае, когда $r \in \gamma(v_2; q_2, q_3)$) или $L_4(p_1, r)$ отделяет $(v_2 q_2 r q_1)_4$ от остальных 12 точек (в случае, когда $r \in \gamma(v_2; q_2, q_1)$).

Рис. 7

Подслучай 4.3: $|V(T')| = 4$. В этом случае $|I(T')| = 2$. Возьмем $q_1, q_2 \in V(T')$ и $r_1, r_2 \in I(T')$.

(1) Предположим, что треугольник $\triangle p_1 q_1 q_2$ непуст (в случае непустоты треугольника $\triangle p_2 q_1 q_2$ рассуждения симметричны и приводят к тому же заключению). Положим $r_1 = \alpha(p_1; q_1, q_2)$.

Если точка r_1 находится в области 1 на рис. 8, т.е. в треугольной области с вершинами s , q_1 и p_1 , то имеем разрезающую прямую $L_4(p_1, r_1)$, которая отделяет $(r_1 p_1 v_2 q_1)_4$ от остальных 12 точек.

Предположим, что точка r_1 попала в область 2 на рис. 8, т.е. в треугольную область с вершинами s , q_1 и q_2 . Тогда либо разрезающая прямая $L_4(q_2, r_1)$ отделяет $(q_1 v_2 q_2 r_1)_4$, где $r_2 \in \gamma(r_1; q_2, p_1)$, от остальных 12 точек, либо разрезающая прямая $L_5(p_1, p_2)$ отделяет $(p_2 p_1 r_1 r_2 q_2)_5$, где $r_2 \in \gamma(r_1; p'_1, q_2)$, от остальных девяти точек.

Рис. 8

(2) Предположим, что оба треугольника $\triangle p_1 q_1 q_2$ и $\triangle p_2 q_1 q_2$ пусты. Положим $r_1 = \alpha(p_1; q_2, p_2)$.

Если $r_1 \in \gamma(v_2; q_1, q_2)$, то имеем разрезающую прямую $L_4(p_1, r_1)$, которая отделяет $(r_1 q_1 v_2 q_2)_4$ от остальных 12 точек.

Допустим, что $r_1 \in \gamma(v_2; q_2, p_2)$ (см. рис. 9). Если найдется точка $r_2 \in \gamma(r_1; q'_2, p_1)$, то $L_5(p_1, p_2)$ – разрезающая прямая, которая отделяет $(p_1 q_1 q_2 r_1 r_2)_5$ от остальных девяти точек. Если найдется $r_2 \in \gamma(r_1; q'_2, p'_1)$, то имеем либо разрезающую прямую $L_5(p_1, p_2)$, которая отделяет $(r_2 r_1 q_2 v_2 p_2)_5$ от остальных девяти точек (в случае, когда $r_2 \in \gamma(r_1; p_2, q'_2)$), либо разрезающую прямую $L_5(r_1, \alpha(r_1; p_1, p_2))$, которая отделяет $(p_1 q_1 q_2 r_1 \alpha(r_1; p_1, p_2))_5$ от остальных десяти точек (в случае, когда $r_2 \in \gamma(r_1; p_2, p'_1)$).

Рис. 9

Для $r_1 \in \gamma(v_2; q_1, p_1)$ рассуждения симметричны, и заключение остается верным.

Подслучай 4.4: $|V(T')| = 3$. В этом случае $|I(T')| = 3$. Возьмем $q \in V(T')$.

Если точка $r = \alpha(p_2; q, p_1)$ принадлежит конусу $\gamma(v_2; p_2, q)$, то $L_4(p_2, r)$ – разрезающая прямая, которая отделяет $(rqv_2p_2)_4$ от остальных 12 точек.

Рис. 10

Предположим, что точка $r = \alpha(p_2; q, p_1)$ попала в конус $\gamma(v_2; p_1, q)$. Если заштрихованная на рис. 10 область треугольника $\triangle p_1qp_2$ пуста, то имеем разрезающую прямую $L_4(p_1, r)$, которая отделяет $(rp_1v_2q)_4$ от остальных 12 точек. Если эта область непуста, то $(p_1v_2q\alpha(p_1; q, r))_4$ отделяется от остальных 12 точек разрезающей прямой $L_4(p_1, \alpha(p_1; q, r))$.

4. Нерешенные проблемы. В этой статье мы получили новую верхнюю оценку 16 для числа $n(4, 4, 5)$. Тем самым мы улучшили результаты Хосоно и Урабе [10], которые показали, что $15 \leq n(4, 4, 5) \leq 17$. Однако точное значение $n(4, 4, 5)$ остается неизвестным.

Другая проблема состоит в вычислении точного значения $n(5, 5)$, для которого известны лишь оценки $17 \leq n(5, 5) \leq 19$ [15]. Уменьшение зазора между верхней и нижней оценками числа $n(5, 5)$ может потребовать более сложных и глубоких рассуждений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, G. Szekeres, “A combinatorial problem in geometry”, *Compositio Math.*, **2** (1935), 463–470.
- [2] P. Erdős, G. Szekeres, “On some extremum problem in elementary geometry”, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.*, **3-4** (1960), 53–62.
- [3] J. D. Kalbfleisch, J. G. Kalbfleisch, R. G. Stanton, “A combinatorial problem on convex regions”, *Proc. Louisiana Conf. on Combinatorics Graph Theory and Computing*. Vol. 1. *Congressus Numerantium*, Louisiana State Univ., Baton Rouge, LA., Congr. Number., 1970, 180–188.
- [4] G. Szekeres, L. Peters, “Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem”, *ANZIAM J.*, **48:2** (2006), 151–164.
- [5] H. Harborth, “Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen”, *Elem. Math.*, **33:5** (1978), 116–118.
- [6] J. D. Horton, “Sets with no empty convex 7-gons”, *Canad. Math. Bull.*, **26:4** (1983), 482–484.

- [7] T. Gerken, “Empty convex hexagons in planar point sets”, *Discrete Comput. Geom.*, **39**:1-3 (2008), 239–272.
- [8] C.M. Nicolás, “The empty hexagon theorem”, *Discrete Comput. Geom.*, **38**:2 (2007), 389–397.
- [9] M. Urabe, “On a partition into convex polygons”, *Discrete Appl. Math.*, **64**:2 (1996), 179–191.
- [10] K. Hosono, M. Urabe, “A minimal planar point set with specified disjoint empty convex subsets”, *Computational Geometry and Graph Theory*, Lecture Notes in Comput. Sci., **4535**, Springer-Verlag, Berlin, 2008, 90–100.
- [11] K. Hosono, M. Urabe, “On the number of disjoint convex quadrilaterals for a planar point set”, *Comput. Geom.*, **20**:3 (2001), 97–104.
- [12] K. Hosono, M. Urabe, “On the minimum size of a point set containing two non-intersecting empty convex polygons”, *Discrete and Computational Geometry*, Lecture Notes in Comput. Sci., **3742**, Springer-Verlag, Berlin, 2005, 117–122.
- [13] L. Wu, R. Ding, “Reconfirmation of two results on disjoint empty convex polygons”, *Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory*, Lecture Notes in Comput. Sci., **4381**, Springer-Verlag, Berlin, 2007, 216–220.
- [14] B.B. Bhattacharya, S. Das, “On the minimum size of a point set containing a 5-hole and a disjoint 4-hole”, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **48**:4 (2011), 445–457.
- [15] B.B. Bhattacharya, S. Das, “Disjoint empty convex pentagons in planar point sets”, *Period. Math. Hungar.*, **66**:1 (2013), 73–86.

Синьшан Ю

Hebei University of Science and Technology, Китай

Поступило

20.03.2013

Хианглин Вей

Hebei University of Science and Technology, Китай

E-mail: wxlhebtu@126.com