Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Баев, О локальной разрешимости обратных задач рассеяния для уравнения Клейна–Гордона и системы Дирака, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 306–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:40:44

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О локальной разрешимости обратных задач рассеяния для уравнения Клейна–Гордона и системы Дирака

А. В. Баев

Рассмотрим одномерные *обратные задачи рассеяния* (ОЗР), связанные с уравнением колебаний неоднородной среды

$$\sigma(x)W_{tt} = (\sigma(x)W_x)_x, \quad x > 0, \quad (1)$$

где $\sigma(x)$ – акустический импеданс, $\sigma(x) > 0$, и пусть $\sigma(0) = 1$. Сведем (1) к двум объектам, подлежащим непосредственному исследованию. Первый – уравнение Клейна–Гордона для струны –

$$w_{tt} = w_{xx} - q(x)w, \quad x > 0, \quad (2)$$

где потенциал $q(x) = z' + z^2$ определяется коэффициентом рассеяния $z(x) = \sigma'/(2\sigma)$, и пусть $z(0) = h$. Очевидно, что уравнение (2) можно рассматривать и в случае произвольного непрерывного потенциала $q(x)$, т.е. не представимого в указанном виде.

Другим объектом исследования является одномерная нестационарная система Дирака

$$v_t + v_x + z(x)u = 0, \quad u_t - u_x - z(x)v = 0, \quad x > 0. \quad (3)$$

Римановы инварианты v , u имеют смысл падающих и рассеянных волн. Заметим, что как (2), так и (3) описывают также известные квантовомеханические процессы.

Предметом обсуждения в работе являются условия локальной разрешимости ОЗР для (2) и (3). Эти задачи состоят в восстановлении непрерывных $q(x)$ и $z(x)$ по данным рассеяния. Дадим точные постановки.

В ОЗР для (2) требуется найти $q(x) \in C[0, T]$ по данным рассеяния $f(t)$, $t \in (0, 2T]$, где $f(t) = w_t(0, t)$ – след решения начально-краевой задачи в области $D = \{x, t \mid x, t > 0\}$, если

$$w(x, 0) = w_t(x, 0) = 0, \quad w_x(0, t) - hw(0, t) = -\delta(t - 0).$$

Для (3) ОЗР состоит в определении $z(x) \in C[0, T]$ по $f(t)$, $t \in (0, 2T]$, где

$$f(t) = v(0, t) - u(0, t)$$

– след решения начально-краевой задачи в D , если

$$v(x, 0) = u(x, 0) = 0, \quad v(0, t) + u(0, t) = \delta(t - 0).$$

Если $f(t)$ – корректно определенный след решения, то данные рассеяния называются *точными*. Из свойств решений задач (2), (3) следует, что в этом случае $f \in C^1(0, 2T]$ для любого $T > 0$ и $f(+0) = -h$.

Сформулированные обратные задачи хорошо изучены [1]–[4]. Между ними имеется тесная связь в силу задачи Коши для уравнения Риккати:

$$z' + z^2 = q(x), \quad x > 0, \quad z(0) = h. \quad (4)$$

Однако остается открытым вопрос о разрешимости ОЗР относительно $q(x)$, если задача (4) не имеет решения. Отметим, что наряду с задачами в нестационарной постановке близкие вопросы затрагиваются в работах [5], [6] по спектральной теории операторов Штурма–Лиувилля для потенциалов, имеющих особенность.

В работах [1]–[4] получены необходимые и достаточные условия разрешимости ОЗР для (2), (3), которые в той или иной форме сводятся к однозначной разрешимости интегрального уравнения Гельфанда–Левитана вида

$$g(x, t) + \int_{-x}^x f(|t - \tau|) g(x, \tau) d\tau = f(x + t) + f(|x - t|), \quad |t| \leq x \leq T. \quad (5)$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости (5) позволяет сформулировать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Обратная задача для (2) разрешима только в классе таких потенциалов $q(x)$, что на $[0, T]$ разрешима задача (4).*

Дадим описание класса потенциалов $q(x)$, которые не восстанавливаются по точным данным рассеяния на произвольном отрезке. Совершим в уравнении Риккати линейаризующую замену $z = \psi'/\psi$. Тогда (4) приводит к следующей задаче Коши для уравнения Шрёдингера:

$$\psi'' - q(x)\psi = 0, \quad \psi(0) = 1, \quad \psi'(0) = h.$$

При этом потенциал $q(x)$ не восстанавливается на отрезке, если $\psi(x)$ обращается в нуль на этом отрезке. В силу известных свойств уравнения Риккати (см. [7]) справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть $q(x) < 0$ и $h \leq 0$ или $q(x) \leq 0$ и $h < 0$. Тогда найдется $T > 0$ такое, что в обратной задаче для (2) потенциал $q(x)$ не восстанавливается по точным данным рассеяния на $[0, T]$.*

В качестве простейшего примера для $q(x) = 0$, $h < 0$, приведем решение $z(x) = h/(hx + 1)$, неограниченно убывающее при $x \rightarrow x_0 - 0$, $x_0 = -1/h$. Отказ от выполнения хотя бы одного из указанных условий приводит к различным ситуациям при решении (4), достаточно полно описанным в [7].

Очевидно, однако, что условия $q \geq 0$ или $h \geq 0$ не являются необходимыми для восстановления потенциала по точным данным рассеяния при любом $T > 0$. Чтобы определить требования к физической модели, для которой такая ОЗР разрешима, сформулируем необходимое и достаточное условие разрешимости в другой форме.

Домножим (2) на w_t и проинтегрируем на плоскости (x, t) по характеристическому треугольнику с вершинами $(0, 0)$, (T, T) , $(0, 2T)$. В результате получим, что для любого решения $w(x, t)$ с краевым условием

$$w_x(0, t) - hw(0, t) = -\varphi(t), \quad \varphi \in C^1[0, 2T],$$

справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T ((w_t(x, t) - w_x(x, t))^2 + q(x)w^2(x, t))|_{x+t=2T} dx + \frac{h}{2} w^2(0, 2T) \\ &= - \int_0^{2T} w_t(0, t)(w_x(0, t) - hw(0, t)) dt \equiv \Pi. \end{aligned} \quad (6)$$

Величина Π является по определению потоком энергии от источника колебаний $\varphi(t)$ на границе $x = 0$ за время $2T$. Для функционала $\Pi(\varphi)$ полагаем

$$\Pi_T = \inf_{\varphi} \{ \Pi(\varphi) \mid \|\varphi\|_{L_2[0, 2T]} = 1 \}. \quad (7)$$

Аналогично, для системы (3) с краевым условием $v(0, t) + u(0, t) = \varphi(t)$, $\varphi \in C^1[0, 2T]$, имеем

$$2 \int_0^T v^2(x, 2T - x) dx = \int_0^{2T} (v^2(0, t) - u^2(0, t)) dt = \Pi. \quad (8)$$

Из последнего равенства следует, что с необходимостью $\Pi > 0$ при $\varphi \neq 0$, т.е. поток рассеянных волн на границе меньше потока энергии волн падающих. Последовательно преобразуя (8), для произвольной функции $y(t) \in L_2[-T, T]$ получаем

$$\int_{-T}^T y^2(t) dt + \int_{-T}^T y(t) \int_{-T}^T f(|t - \tau|) y(\tau) d\tau dt > 0.$$

Справедливость этого неравенства является следствием интеграла энергии (6), а его выполнение по определению означает положительную определенность оператора в левой части (5). Поскольку интегральный оператор в (5) является самосопряженным, то $\inf_{\varphi} \Pi(\varphi)$ в (7) достигается.

Теперь сформулируем необходимое и достаточное условие разрешимости ОЗР в форме, имеющей наглядный физический смысл.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Обратные задачи рассеяния для (2), (3) разрешимы тогда и только тогда, когда $\Pi_T > 0$.

Вернемся к интегралу энергии (6). Поскольку ОЗР для (2) по точным данным разрешима тогда и только тогда, когда $\Pi_T > 0$, то из (6) следует, что потенциал $q(x)$, величина h и $T > 0$ не произвольны. Естественно говорить, что случай $\Pi_T > 0$ соответствует физически реализуемой системе. В то же время существуют механические и релятивистские квантовые модели, реализующие случай $q(x) < 0$. Может оказаться, что ОЗР для них разрешимы не на любом отрезке, в то время как соответствующие прямые задачи, состоящие в нахождении решения (2) по начально-краевым условиям и заданному потенциалу $q(x)$, оказываются разрешимыми.

Рис. 1. Пример физически не реализуемого при $x \geq x_0$ потенциала $q(x)$.

Важный вывод из сказанного состоит в том, что на основе точных данных рассеяния разрешимы лишь обратные задачи для физически реализуемых потенциалов $q(x)$, что, в свою очередь, равносильно разрешимости задачи Коши для уравнения Риккати (4). Заметим, что для исходного уравнения колебаний $\psi(x) = \sqrt{\sigma(x)} > 0$, что соответствует физически реализуемой системе.

В заключение приведем вычислительный пример (см. рис. 1), иллюстрирующий описанный в работе случай невозможности восстановить по точным данным рассеяния физически не реализуемый потенциал $q(x)$ при $h = 0.55$. Графики $q(x)$ и $z(x)$ нормированы на единицу. Точка $x_0 = 200$ определяется равенством $\psi(x_0) = 0$. При $x \rightarrow x_0$ функция $z(x) \rightarrow -\infty$, в то время как потенциал $q(x)$ ведет себя регулярным образом. Это соответствует тому, что при $x \geq x_0$ потенциал $q(x)$ физически не реализуем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. С. Благовещенский, *Математические вопросы теории дифракции и распространения волн*. 1, Тр. МИАН СССР, **115**, 1971, 28–38. [2] В. Г. Романов, *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984. [3] А. В. Баев, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **28:1** (1988), 25–33. [4] М. И. Белишев, А. С. Благовещенский, *Динамические обратные задачи теории волн*, Изд-во С.-Петербургск. ун-та, СПб., 1999. [5] А. В. Баев, *Матем. заметки*, **47:2** (1990), 149–151. [6] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Матем. заметки*, **66:6** (1999), 897–912. [7] А. И. Егоров, *Уравнения Риккати*, Физматлит, М., 2001.

А. В. Баев

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: drbaev@mail.ru, baev@cs.msu.ru

Поступило

31.12.2013