Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Бекларян, О существовании решений первой краевой задачи для эллиптических систем высокого порядка в неограниченных областях, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 310–313

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10485>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:30:05

О существовании решений первой краевой задачи для эллиптических систем высокого порядка в неограниченных областях

А. Л. Бекларян

1. Введение. Пусть Ω – неограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Обозначим через B_ρ^x – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\rho > 0$ с центром в точке x . Если $x = 0$, пишем B_ρ вместо B_ρ^x . Как это принято, под $W_{2,\text{loc}}^m(\Omega)$ будем подразумевать множество функций из $\mathcal{D}'(\Omega)$, принадлежащих пространствам $W_2^m(\Omega \cap B_\rho)$ для всех вещественных чисел $\rho > 0$ [1]. При этом через $\dot{W}_{2,\text{loc}}^m(\Omega)$ будем обозначать подмножество пространства $W_{2,\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n)$, которое получается замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ в системе полунорм $\|u\|_{W_2^m(\Omega \cap B_\rho)}$, $\rho > 0$. Далее, следуя [2; § 1.1], под $L_2^m(\Omega)$ будем подразумевать пространство обобщенных функций, все производные порядка m которых принадлежат $L_2(\Omega)$; другими словами,

$$L_2^m(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{D}'(\Omega) : \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha f|^2 dx < \infty \right\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $\mathcal{K} \subset \omega$ – компакт, $\mathfrak{P}_{m-1}$ – пространство многочленов вида

$$p(x) = \sum c_\alpha x^\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{R}, \quad |\alpha| \leq m-1.$$

Обозначим через $\Phi_\varphi(\mathcal{K}, \omega)$, $\varphi \in W_{2,\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n)$, множество функций $\psi \in C_0^\infty(\omega)$, удовлетворяющих условию $\psi = \varphi$ в окрестности $\mathcal{K}$, или, другими словами, $\psi - \varphi \in \dot{W}_{2,\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K})$. Положим

$$\Psi(\mathcal{K}, \omega) = \{\psi \in C_0^\infty(\omega) : \psi = 1 \text{ в окрестности } \mathcal{K}\}.$$

Емкостью компакта $\mathcal{K}$ относительно открытого множества ω назовем величину

$$\text{cap}_\varphi(\mathcal{K}, \omega) = \inf_{\psi \in \Phi_\varphi(\mathcal{K}, \omega)} \int_{\omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha \psi|^2 dx.$$

Емкость произвольного замкнутого в $\mathbb{R}^n$ множества $E \subset \omega$ определяется формулой

$$\text{cap}_\varphi(E, \omega) = \sup_{\mathcal{K}} \text{cap}_\varphi(\mathcal{K}, \omega),$$

где точная верхняя грань в правой части берется по всем компактам $\mathcal{K} \subset E$. Если $\omega = \mathbb{R}^n$, то вместо $\text{cap}_\varphi(E, \mathbb{R}^n)$ будем писать $\text{cap}_\varphi(E)$.

Нам также потребуется следующая емкость [2; § 9.1]:

$$\text{Cap}(\mathcal{K}, W_2^m(\omega)) = \inf_{\psi \in \Psi(\mathcal{K}, \omega)} \left(\int_{\omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha \psi|^2 dx + \int_{\omega} |\psi|^2 dx \right).$$

Как и выше, емкость произвольного замкнутого в $\mathbb{R}^n$ множества $E \subset \omega$ определяется формулой

$$\text{Cap}(E, W_2^m(\omega)) = \sup_{\mathcal{K}} \text{Cap}(\mathcal{K}, W_2^m(\omega)),$$

где точную верхнюю грань в правой части следует брать по всем компактам $\mathcal{K} \subset E$.

Вопросы, рассматриваемые в настоящей заметке, ранее исследовались в работах [3]–[5].

2. Постановка задачи. Здесь и далее L — дивергентный оператор вида

$$L = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \partial^\alpha (a_{\alpha\beta}(x) \partial^\beta)$$

где $a_{\alpha\beta}(x)$ — измеримые и ограниченные функции аргумента $x \in \mathbb{R}^n$ со значениями в пространстве $(N \times N)$ -матриц. Потребуем, чтобы для всякой бесконечно гладкой функции $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ с компактным носителем имело место неравенство

$$\int \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \partial^\beta u \partial^\alpha u \, dx \geq \gamma \int \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha u|^2 \, dx, \quad \gamma > 0.$$

Здесь и везде ниже мы для краткости обозначаем

$$a_{\alpha\beta} \partial^\beta u \partial^\alpha v = (a_{\alpha\beta} \partial^\beta u, \partial^\alpha v), \quad |\partial^\alpha u|^2 = \sum_{i=1}^N |\partial^\alpha u_i|^2,$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$.

Решением задачи Дирихле

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{в } \Omega, \\ \partial^\alpha u|_{\partial\Omega} = \partial^\alpha \varphi, & |\alpha| \leq m-1, \end{cases} \quad (1)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in W_{2,\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n)$, называется функция $u \in W_{2,\text{loc}}^m(\Omega)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $u - \varphi \in \dot{W}_{2,\text{loc}}^m(\Omega)$, т.е. $(u - \varphi)\eta \in \dot{W}_2^m(\Omega)$ для любой функции $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;
- 2) функция u имеет ограниченный интеграл Дирихле

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha u|^2 \, dx < \infty;$$

- 3) справедливо интегральное тождество

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \partial^\beta u \partial^\alpha \psi \, dx = 0$$

для любой вектор-функции $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$\text{cap}_{\varphi_i - p_i}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) < \infty \quad \text{для некоторых многочленов } p_i \in \mathfrak{P}_{m-1}, \quad i = 1, \dots, N.$$

Тогда задача (1) имеет решение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть задача (1) имеет решение и верно, что

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha \varphi|^2 \, dx < \infty.$$

Тогда существуют многочлены $p_i \in \mathfrak{P}_{m-1}$ такие, что

$$\text{cap}_{\varphi_i - p_i}(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) < \infty, \quad i = 1, \dots, N.$$

ТЕОРЕМА 3. Для всякой функции $\psi \in W_{2,\text{loc}}^m(\mathbb{R}^n)$ условие

$$\text{cap}_\psi(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) < \infty$$

эквивалентно неравенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{cap}_\psi((\bar{B}_{r_{k+1}} \setminus B_{r_{k-1}}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega), B_{r_{k+2}} \setminus \bar{B}_{r_{k-2}}) < \infty,$$

где

$$r_k = \begin{cases} 2^{2^k}, & \text{если } n \leq 2m \text{ и } n \text{ четно,} \\ 2^k & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область, удовлетворяющая условию конуса [2; § 1.1.9] и μ – мера в ω такая, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, \rho > 0} \rho^{-s} \mu(B_\rho^x \cap \omega) < \infty,$$

где $s > 0$. Тогда согласно [2; § 1.4.5] для любой функции $v \in W_2^m(\omega)$ существует многочлен $p \in \mathfrak{P}_{m-1}$ такой, что

$$\sigma_\beta(\omega, \mu) \|\partial^\beta(v - p)\|_{L_2(\omega, \mu)} \leq \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_{L_2(\omega)} \quad (2)$$

при

$$m - \frac{n}{2} \leq |\beta| < m - \frac{n-s}{2}, \quad s \leq n. \quad (3)$$

Если же выполнено условие

$$|\beta| < m - \frac{n}{2}, \quad (4)$$

то справедливо неравенство

$$\sigma_\beta(\omega, \mu) \|\partial^\beta(v - p)\|_{C(\omega)} \leq \sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|_{L_2(\omega)}, \quad (5)$$

где постоянная $\sigma_\beta(\omega, \mu) > 0$ в обоих случаях не зависит от v .

ТЕОРЕМА 4. Пусть задача (1) имеет решение, и пусть μ_i – семейство мер в ω_i , где ω_i , $i = 1, 2, \dots$, – попарно не пересекающиеся ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию конуса и такие, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, \rho > 0} \rho^s \mu_i(B_\rho^x \cap \omega_i) < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\omega_i \setminus \Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha \varphi|^2 dx < \infty.$$

Пусть также для некоторого мультииндекса β выполнено условие (3). Положим

$$m_i(\varphi) = \inf_p \|\partial^\beta(\varphi - p)\|_{L_2(\omega_i \setminus \Omega, \mu_i)},$$

где точная нижняя грань берется по всем

$$p \in \underbrace{\mathfrak{P}_{m-1} \times \dots \times \mathfrak{P}_{m-1}}_N.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_\beta^2(\omega_i, \mu_i) m_i^2(\varphi) < \infty, \quad (6)$$

где $\sigma(\omega_i, \mu_i)$ – коэффициент в неравенстве (2).

ТЕОРЕМА 5. Пусть в предположениях теоремы 4 вместо условия (3) выполнено условие (4). Тогда будет справедливо соотношение (6), где

$$m_i(\varphi) = \inf_p \|\partial^\beta(\varphi - p)\|_{C(\omega_i \setminus \Omega)},$$

где точная нижняя грань берется по всем $p \in \underbrace{\mathfrak{P}_{m-1} \times \cdots \times \mathfrak{P}_{m-1}}_N$.

Автор выражает благодарность профессору А. А. Конькову за постановку задачи и внимание, проявленное к автору в процессе ее решения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1973. [2] В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева*, Изд-во Ленинградск. ун-та, Л., 1985. [3] В. А. Кондратьев, Тр. ММО, **16**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1967, 293–318. [4] А. А. Коньков, *Матем. сб.*, **184**:12 (1993), 23–52. [5] В. Г. Мазья, С. В. Поборчий, *Проблемы матем. анализа*, **53** (2011), 95–112.

А. Л. Бекларян

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: beklaryan@hotmail.com

Поступило

14.02.2014