Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Брайчев, Точные оценки типов целых функций с нулями на лучах, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 4, 503–515

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10486>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:56:46

Точные оценки типов целых функций с нулями на лучах

Г. Г. Брайчев

В работе найдены наименьшие значения типов целых функций с нулями заданных верхних и нижних плотностей, расположенными на лучах в комплексной плоскости.

Библиография: 19 названий.

DOI: 10.4213/mzm10486

1. Введение. Пусть $f(z)$ – целая функция. Обозначим ее тип при порядке $\rho > 0$, называемый в дальнейшем коротко ρ -*типом*, через

$$\sigma_\rho(f) := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln M_f(r), \quad (1.1)$$

где $M_f(r) := \max_{|z|=r} |f(z)|$. Всюду в работе предполагаем, не оговаривая особо, что $f(z)$ имеет бесконечно много нулей $\Lambda = \Lambda_f := \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, поскольку именно эта ситуация с точки зрения решаемых задач является содержательной. Выпишем последовательность Λ в порядке возрастания модулей с учетом кратности и рассмотрим считающую функцию $n_\Lambda(t) := \sum_{|\lambda_n| \leq t} 1$. Верхняя и нижняя ρ -плотности этой последовательности определяются формулами

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}, \quad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(t)}{t^\rho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{|\lambda_n|^\rho}. \quad (1.2)$$

Математиков давно интересует вопрос о влиянии роста $n_\Lambda(r)$ и геометрии расположения нулей в комплексной плоскости на асимптотическое поведение целой функции. Случай правильного расположения нулей подробно изучен в классической теории целых функций вполне регулярного роста, основные положения которой разработаны в трудах Левина и Пфлюгера (см. [1]–[3]). При отсутствии “правильности” в распределении нулей зависимость между ростом максимума модуля целой функции и поведением ее нулей становится более сложной и еще недостаточно изучена. В общем случае, когда $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) > \underline{\Delta}_\rho(\Lambda)$, не существует явных формул, выражающих тип функции через плотности ее нулей. Здесь актуальной является задача нахождения точных оценок, связывающих характеристики (1.1) и (1.2) и учитывающих геометрию расположения нулей на плоскости. Такая задача потребовала специальных методов исследования (см., например, цикл статей Гольдберга [4]–[7]). Новый

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00281).

импульс развитию этой тематики придали работы Попова [8]–[10]. Так, в статье [8] для целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями Λ , расположенными на одном луче, доказана точная оценка

$$\sigma_\rho(f) \geq \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) C(\rho), \quad \text{где} \quad C(\rho) = \max_{a>0} a^{-\rho} \ln(1+a). \quad (1.3)$$

Оценка (1.3) с учетом установленного в [8] неравенства

$$C(\rho) > \frac{1}{e\rho}, \quad \rho \in (0, 1),$$

говорит о влиянии расположения нулей $\Lambda \subset \mathbb{R}_+$ на наименьший возможный рост целой функции, который в общем случае $\Lambda \subset \mathbb{C}$ описывается точным результатом Валирона–Левина (см. [11], [1]):

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{1}{e\rho} \overline{\Delta}_\rho(\Lambda). \quad (1.4)$$

Степень указанного влияния при малых ρ видна из неравенств (см. [8])

$$\frac{1}{e\rho} + e^{-1-1/\rho} < C(\rho) < \frac{1}{e\rho} + e^{-1-1/\rho} + \frac{1}{\rho} e^{-1-2/\rho}, \quad \rho \in (0, e^{-1}). \quad (1.5)$$

Возникает естественный вопрос о наименьшем возможном ρ -типе целых функций, когда их нули расположены не на одном, а на нескольких лучах. В этой ситуации в работе доказываются точные оценки снизу величины ρ -типа (1.1) в терминах ρ -плотностей (1.2). Кроме того, в этих же терминах получены результаты в случае расположения нулей на двух прямых.

2. Изучим сначала ситуацию, когда нули целой функции лежат на m лучах, исходящих из начала координат и разбивающих комплексную плоскость на равные углы. Будем использовать прием “симметризации” (см., например, [12], [13]). Предварительно для $m \in \mathbb{N}$ обозначим

$$l_k = \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i(2k+1)\pi/m}, r > 0\}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad V_m = \bigcup_{k=0}^{m-1} l_k.$$

Не ограничивая общности, в дальнейшем считаем, что $f(0) = 1$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, и $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_f = \Lambda \subset V_m$. Тогда справедливо неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{m} C\left(\frac{\rho}{m}\right) = \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda)}{m} \max_{a>0} \frac{\ln(1+a)}{a^{\rho/m}}. \quad (2.1)$$

Для каждой пары $m \in \mathbb{N}$ и $\rho \in (0, m)$ существуют целые функции $f^*(z)$ порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_{f^*} \subset V_m$, доставляющие равенство в (2.1), причем все такие функции имеют нулевую нижнюю ρ -плотность нулей и нулевой нижний ρ -тип, т.е.

$$\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_{f^*}) = 0, \quad \sigma_\rho(f^*) := \lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln M_{f^*}(r) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = 0$ или $+\infty$, то заявленное неравенство (2.1) очевидным образом выполняется. Пусть теперь $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) \in (0, +\infty)$. При нецелых ρ величина $\sigma_\rho(f) \in (0, +\infty)$. При целых ρ не исключено, что $\sigma_\rho(f) = +\infty$, однако нас интересует наименьшее возможное значение ρ -типа. Согласно хорошо известной теореме Адамара ([1], гл. I, § 10) целую функцию $f(z)$ можно представить в виде произведения

$$f(z) = e^{q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{p_n(z)}, \quad (2.2)$$

в котором

$$p_n(z) = \frac{z}{\lambda_n} + \frac{z^2}{2\lambda_n^2} + \cdots + \frac{z^p}{p\lambda_n^p},$$

а число p и степень многочлена $q(z)$ не превосходят ρ . Кроме того, $q(0) = 0$ в силу нашего соглашения $f(0) = 1$.

Обозначим через

$$\varepsilon_j = e^{i2\pi j/m}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

корни степени m из единицы и рассмотрим функцию

$$F(z) = \prod_{j=0}^{m-1} f(\varepsilon_j z). \quad (2.3)$$

Поскольку для любого многочлена $Q(z) = \sum_{s=1}^{m-1} Q_s z^s$ без свободного члена выполняется равенство

$$\sum_{j=0}^{m-1} Q(\varepsilon_j z) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{m-1} Q_s z^s \varepsilon_j^s = \sum_{s=1}^{m-1} Q_s z^s \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_j^s \equiv 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.4)$$

то выражение (2.3) для функции $F(z)$ можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} F(z) &= \prod_{j=0}^{m-1} e^{q(\varepsilon_j z)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon_j z}{\lambda_n}\right) e^{p_n(\varepsilon_j z)} \\ &= e^{\sum_{j=0}^{m-1} q(\varepsilon_j z)} \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 - \frac{\varepsilon_j z}{\lambda_n}\right) e^{\sum_{j=0}^{m-1} p_n(\varepsilon_j z)} = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 - \frac{\varepsilon_j z}{\lambda_n}\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Положим

$$\lambda_n = r_n e^{i\pi(2k_n+1)/m}, \quad \text{где } r_n \nearrow +\infty,$$

а $k_n \in \{0, 1, \dots, m-1\}$, $n \in \mathbb{N}$. Изменяя при необходимости порядок сомножителей, перепишем последнее внутреннее произведение из формулы (2.5) в виде

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 - \frac{z}{r_n} e^{-i\pi(1+2(k_n-j))/m}\right) &= \prod_{s=0}^{m-1} \left(1 - \frac{z}{r_n} e^{-i\pi(1+2s)/m}\right) \\ &= \prod_{s=0}^{m-1} (-1) e^{-i\pi(1+2s)/m} \left(\frac{z}{r_n} - e^{i\pi(1+2s)/m}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i\pi m} e^{-i\pi/m \sum_{s=0}^{m-1} (1+2s)} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{z}{r_n} - e^{i\pi(1+2s)/m} \right) \\
&= e^{i\pi[m-(m+(m-1)m)/m]} \prod_{s=0}^{m-1} \left(\frac{z}{r_n} - e^{i\pi(1+2s)/m} \right) = \left(\frac{z}{r_n} \right)^m + 1.
\end{aligned}$$

На последнем этапе вычислений мы учли, что числа $e^{i(2s+1)\pi/m}$, $s = 0, 1, \dots, m-1$, дают все значения корня степени m из -1 . В итоге из (2.5) получаем следующее представление функции $F(z)$:

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{z}{r_n} \right)^m \right). \quad (2.6)$$

Установим теперь связь между ρ -типами исходной функции $f(z)$ и функции $F(z)$, заданной формулой (2.3). Поскольку

$$M_F(r) = \max_{|z|=r} |F(z)| \leq \prod_{j=0}^{m-1} \max_{|z|=r} |f(\varepsilon_j z)| = [M_f(r)]^m,$$

то

$$\sigma_\rho(F) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln M_F(r) \leq m \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln M_f(r) = m\sigma_\rho(f).$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{1}{m} \sigma_\rho(F). \quad (2.7)$$

Нули функции $F(z)$, как это видно из (2.3) или (2.6), образуют множество

$$\Lambda_F = \bigcup_{k=0}^{m-1} \{r_n e^{i(2k+1)\pi/m}\} \subset V_m, \quad \text{где } r_n = |\lambda_n|.$$

На каждом луче l_k , $k = 0, \dots, m-1$, они имеют верхнюю ρ -плотность

$$\beta := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r_n^\rho} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_{\Lambda_f}(r)}{r^\rho} = \overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f).$$

Следовательно, $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_F) = m\beta$. Обозначим $\mu_n = r_n^m$ и рассмотрим функцию

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\mu_n} \right). \quad (2.8)$$

Нули этой функции лежат на отрицательной полуоси, образуя последовательность $\Lambda_L = \{-\mu_n\}$. При этом

$$\overline{\Delta}_{\rho/m}(\Lambda_L) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n^{\rho/m}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r_n^\rho} = \beta.$$

Сравнивая (2.6) и (2.8), имеем $F(z) = L(z^m)$, откуда $M_F(r) = M_L(r^m)$, и потому $\sigma_\rho(F) = \sigma_{\rho/m}(L)$. Оценим снизу тип функции $L(z)$ при порядке ρ/m согласно (1.3):

$$\sigma_{\rho/m}(L) \geq \beta C \left(\frac{\rho}{m} \right),$$

и с учетом (2.7) придем к неравенству (2.1):

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{1}{m} \sigma_\rho(F) = \frac{1}{m} \sigma_{\rho/m}(L) \geq \frac{\beta}{m} C\left(\frac{\rho}{m}\right).$$

Докажем достижимость равенства в (2.1) при каждом m и любом $\rho \in (0, m)$. С этой целью рассмотрим экстремальную функцию

$$L^*(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{\mu_n^*}\right), \quad \Lambda_{L^*} = \{-\mu_n^*\} \subset \mathbb{R}_-,$$

удовлетворяющую равенству (см. [8])

$$\sigma_{\rho_1}(L^*) = \beta_1 C(\rho_1)$$

с параметрами $\rho_1 = \rho/m < 1$, $\beta_1 = \overline{\Delta}_{\rho_1}(\Lambda_{L^*})$. Построим по ней функцию

$$f^*(z) = L^*(z^m) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^m}{\mu_n^*}\right),$$

нули которой

$$\Lambda_{f^*} = \bigcup_{k=0}^{m-1} \{\sqrt[m]{\mu_n^*} e^{i(2k+1)\pi/m}\} \subset V_m$$

распределены одинаково на каждом луче l_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$. Ясно, что верхняя ρ -плотность нулей на любом таком луче в m раз меньше верхней ρ -плотности всей последовательности Λ_{f^*} , т.е.

$$\frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_{f^*})}{m} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\sqrt[m]{\mu_n^*})^\rho} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(\mu_n^*)^{\rho_1}} = \overline{\Delta}_{\rho_1}(\Lambda_{L^*}) = \beta_1.$$

Кроме того,

$$\sigma_\rho(f^*) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln f^*(r)}{r^\rho} = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln L^*(r^m)}{(r^m)^{\rho_1}} = \sigma_{\rho_1}(L^*) = \beta_1 C(\rho_1) = \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_{f^*})}{m} C\left(\frac{\rho}{m}\right).$$

Таким образом,

$$\sigma_\rho(f^*) = \frac{\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_{f^*})}{m} C\left(\frac{\rho}{m}\right),$$

и функция $f^*(z)$ реализует равенство в (2.1).

Наконец, тот факт, что у любой экстремальной функции f^* нижняя ρ -плотность корней равна нулю, вытекает из [14; §2, следствие 1], а равенство нулю нижнего ρ -типа – из [15; с. 205]. Теорема доказана.

В работе [10], посвященной экстремальным задачам для целых функций $f(z)$ без нулей в угле заданного раствора, Попов высказал следующую гипотезу: *точная нижняя грань $C_\theta(\beta, \rho)$ типов целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями заданной верхней ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) = \beta$, не лежащими в угле фиксированного раствора $\theta \in (0, \pi)$, удовлетворяет строгому неравенству*

$$C_\theta(\beta, \rho) > \frac{1}{\rho e} \beta. \quad (2.9)$$

Теорема 1 в сочетании с неравенством (1.5) проливает дополнительный свет на эту проблему, поскольку дает при $\theta = 2\pi/m$ оценку сверху неизвестной пока для $\theta \in (0, \pi)$ величины $C_\theta(\beta, \rho)$:

$$C_{2\pi/m}(\beta, \rho) < \beta \left[\frac{1}{\rho e} + \frac{1}{m} e^{-1-m/\rho} + \frac{1}{\rho} e^{-1-2m/\rho} \right], \quad m > 2.$$

Обратим внимание на вытекающий отсюда экспоненциальный характер близости друг к другу обеих частей предполагаемого неравенства (2.9) при малых ρ или больших m .

3. Продолжим изучение целых функций с нулями на m лучах, учитывая теперь не только верхнюю, но и нижнюю ρ -плотность последовательности нулей. Базовая ситуация $m = 1$ обстоятельно изучена в работе [14]. Как показано в этой работе, ρ -тип произвольной целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями $\Lambda_f \subset \mathbb{R}_+$, имеющими ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) = \beta$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) \geq \alpha$, удовлетворяет оценке

$$\sigma_\rho(f) \geq \beta C(k, \rho), \quad k = \frac{\alpha}{\beta} \in [0, 1], \quad (3.1)$$

где

$$C(k, \rho) = \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} + \max_{a>0} \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}}{\tau + 1} d\tau. \quad (3.2)$$

Применяя метод, разработанный в предыдущем пункте, сведем случай $m \geq 2$ к рассмотренному в [14]. Итак, пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$. Пусть далее $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, m)$ с последовательностью (всех) нулей $\Lambda_f = \Lambda \subset V_m$, имеющей ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) = \beta$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) \geq \alpha$. Действуя по схеме доказательства теоремы 1, вводим по правилу (2.3) функцию $F(z)$, допускающую представление (2.6), и определяем $L(z)$ формулой (2.8). Однако теперь при работе с (ρ/m) -типом функции $L(z)$ используем вместо (1.3) неравенство (3.1). Привлекая соотношение (2.7) и учитывая связь $\sigma_\rho(f) = \sigma_{\rho/m}(L)$, приходим в итоге к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$, и $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, m)$ с нулями $\Lambda_f \subset V_m$, имеющими ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) \geq \alpha$. Тогда выполняется неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta}{m} C\left(k, \frac{\rho}{m}\right) = \frac{\beta}{m} \left[\frac{\pi k}{\sin(\pi \rho/m)} + \max_{a>0} \int_{ak^{1/\rho}}^a \frac{a^{-\rho/m} - k\tau^{-\rho/m}}{\tau + 1} d\tau \right], \quad (3.3)$$

где $k = \alpha/\beta$. Для каждого фиксированного набора параметров m , ρ , β , α существует целая функция из указанного в условии класса, доставляющая равенство в (3.3).

Нетрудно заметить, что при $\alpha = 0$ утверждение теоремы 2 совпадает с утверждением теоремы 1. Любопытен и другой крайний случай $\alpha = \beta$. Если существует обычный предел в (1.2), то говорят, что последовательность Λ измерима, а общее

значение $\Delta_\rho(\Lambda) := \overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\rho(\Lambda)$ называют ее ρ -плотностью. При $\alpha = \beta$ из неравенства (3.3) для типа целой функции $f(z)$ с измеримой последовательностью нулей $\Lambda_f \subset V_m$ получаем оценку

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta}{m} \frac{\pi}{\sin(\pi\rho/m)}, \quad \rho \in (0, m). \quad (3.4)$$

Равенство заведомо достигается для канонических произведений

$$f(z) = \Pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{z}{r_n} \right)^m \right)$$

вида (2.6), нули Λ_Π которых распределены симметрично на всех лучах из V_m с ρ -плотностью

$$\Delta_\rho(\Lambda_\Pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r_n^\rho} = \frac{\beta}{m}$$

на каждом из них.

Возникает естественный вопрос: только ли для таких функций $f(z)$ в (3.4) имеет место знак равенства? Автору не известен полный ответ на этот вопрос. Можно лишь утверждать, что неравенство в (3.4) будет строгим, даже если на каждом луче из V_m последовательность нулей измерима с общей ρ -плотностью $\Delta_\rho(\Lambda_\Pi) = \beta$ (функция $\Pi(z)$ имеет вполне регулярный рост), но значение ρ -плотности хотя бы на одном из лучей отлично от β/m . Последний факт для $m = 2$ подмечен в [16].

4. В вопросах интерполяции, полноты систем экспонент, негармонических рядов Фурье особый интерес представляют целые функции с вещественными нулями. Выделим поэтому важный частный случай $m = 2$ теоремы 2, когда нули целой функции порядка $\rho \in (0, 2)$ лежат на одной прямой, которую удобно сейчас считать вещественной осью.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, 2)$ с вещественными нулями $\Lambda_f = \Lambda$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$, то выполняется точная оценка

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta}{2} C\left(\frac{\rho}{2}\right),$$

где величина $C(\rho)$ определена в (1.3). Всякая функция, доставляющая равенство в эту оценку, обладает тем свойством, что равны нулю как нижняя ρ -плотность ее корней, так и ее нижний ρ -тип.

2. Если $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta > 0$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha \in [0, \beta]$, то справедлива точная оценка

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta}{2} C\left(k, \frac{\rho}{2}\right),$$

где $k = \alpha/\beta$, а величина $C(k, \rho)$ определена формулой (3.2).

Отметим, что нижние границы типов из теоремы 3 являются точными и в аналогичных задачах для целых функций с нулями в полуплоскости. Соответствующие результаты получены Поповым [10] и Шерстюковым [16], но только при $\rho \in (0, 1)$.

В ряде случаев важно знать поведение целой функции на мнимой оси, характеризующееся величинами $\overline{\lim}_{x \rightarrow \pm\infty} (\ln |f(ix)|/|x|^\rho)$, т.е. значениями индикатора

$$h_\rho(f, \varphi) := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r^\rho} \quad \text{в точках} \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Известен следующий факт (см. [17; теорема 7.3.1], где рассмотрена более общая ситуация уточненного порядка).

Пусть $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, 1)$, все нули которой $\Lambda_f = \Lambda$ являются вещественными. Тогда эквивалентны утверждения

$$\exists \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho} = \beta \quad \text{и} \quad \exists \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln |f(ix)|}{|x|^\rho} = \frac{\pi\beta}{2 \sin(\pi\rho/2)}.$$

Результат верен также и для канонических произведений порядка $\rho = 1$ (см. [18; теорема 8.2.1]).

Случай же целых функций с неизмеримыми вещественными нулями менее изучен. В этой связи теорема 3 может предоставить точную информацию. Чтобы ее получить, воспользуемся следующим простым соображением. Если $c \in \mathbb{R}$ и

$$f(z) = e^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{z/\lambda_n}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad F(z) = f(z)f(-z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{\lambda_n}\right)^2\right),$$

то при вещественных x имеем

$$|f(ix)| = \prod_{n=1}^{\infty} \left|1 - \frac{ix}{\lambda_n}\right| = \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\lambda_n}\right)^2}, \quad |F(ix)| = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda_n}\right)^2\right) = |f(ix)|^2.$$

Очевидно, эти же соотношения справедливы и для более простого произведения

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right), \quad \lambda_n \in \mathbb{R}.$$

В любом случае имеем $\ln |f(ix)| = (1/2) \ln |F(ix)|$, и это дает равенство

$$h_\rho\left(f, \pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} h_\rho\left(F, \pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sigma_\rho(F).$$

Кроме того, очевидно, что $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_F) = 2\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)$ и $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_F) = 2\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_f)$.

Таким образом, на основании теоремы 3 получаем результат, показывающий, в частности, что индикатор в точках $\varphi = \pm\pi/2$ любой целой функции нецелого порядка $\rho \in (0, 2)$ с вещественными нулями заданных ρ -плотностей не меньше, чем минимальный возможный ρ -тип на классе таких функций. Дадим точную формулировку.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\rho \in (0, 2)$, $\rho \neq 1$, $\beta > 0$, $\alpha \in [0, \beta]$ и $f(z)$ – целая функция порядка ρ с вещественными нулями ρ -плотностей $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) \geq \alpha$. Тогда*

$$h_\rho\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) = h_\rho\left(f, \frac{\pi}{2}\right) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(ix)|}{x^\rho} \geq \frac{\beta}{2} C\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\rho}{2}\right).$$

При $\rho = 1$ результат верен для функций вида

$$f(z) = e^{cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{z/\lambda_n}, \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R},$$

именно, справедливо неравенство

$$h\left(f, \pm \frac{\pi}{2}\right) \geq \frac{\beta}{2} C\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi\alpha}{2} + \max_{a>0} \Phi_{\alpha,\beta}(a),$$

где величина

$$\Phi_{\alpha,\beta}(a) = \frac{\beta}{2\sqrt{a}} \ln \frac{1+a}{1+ak^2} - \alpha \operatorname{arctg} \frac{(1-k)\sqrt{a}}{1+ak}, \quad k = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (4.1)$$

получена прямым подсчетом интеграла в (3.2) при $\rho = 1/2$.

Здесь и далее индекс в обозначениях характеристик h_ρ , σ_ρ , $\underline{\Delta}_\rho$, $\overline{\Delta}_\rho$ при $\rho = 1$ для удобства опускается.

При $\alpha = \beta$, в частности, получаем оценки

$$\begin{aligned} h_\rho\left(f, \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(ix)|}{x^\rho} \geq \frac{\pi\beta}{2 \sin(\pi\rho/2)}, \quad \rho \in (0, 2), \quad \rho \neq 1, \\ h\left(f, \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(ix)|}{x} \geq \frac{\pi\beta}{2}, \quad \rho = 1, \end{aligned}$$

справедливые для соответствующих классов функций из теоремы 4. Точность оценок для $\rho \in (0, 1]$ подтверждается цитированными выше результатами из [17] и [18].

Пожалуй, наиболее употребительными в приложениях являются целые функции порядка $\rho = 1$ с вещественными нулями. Применительно к таким функциям предыдущие результаты приводят к следующим утверждениям (ср. [19; теорема X], где рассмотрен случай четных функций).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $f(z)$ – целая функция, порядок которой равен единице, а все нули вещественные и образуют последовательность Λ с плотностями $\overline{\Delta}(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}(\Lambda) \geq \alpha$, $\alpha \in [0, \beta]$. Тогда

1) для типа функции $f(z)$ справедливо точное неравенство

$$\sigma \geq \frac{\pi\alpha}{2} + \max_{a>0} \Phi_{\alpha,\beta}(a);$$

2) ширина d_f индикаторной диаграммы $f(z)$ в направлении мнимой оси удовлетворяет оценке

$$d_f := h\left(f, \frac{\pi}{2}\right) + h\left(f, -\frac{\pi}{2}\right) \geq \pi\alpha + 2 \max_{a>0} \Phi_{\alpha,\beta}(a).$$

Здесь $\Phi_{\alpha,\beta}(a)$ определена формулой (4.1).

Второе утверждение вытекает из теоремы 4 с учетом того, что домножение на экспоненту не меняет ширины индикаторной диаграммы. Простейшими примерами функций, иллюстрирующими теорему 5, являются

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{n}\right)^2\right) \quad \text{и} \quad g(z) = \frac{1}{z\Gamma(z)} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

где γ – константа Эйлера–Маскерони. Для первой из этих функций выполняются равенства

$$\overline{\Delta}(\Lambda_f) = \underline{\Delta}(\Lambda_f) = 2, \quad \sigma(f) = \pi = \frac{d_f}{2},$$

в то время как для второй имеем

$$\overline{\Delta}(\Lambda_g) = \underline{\Delta}(\Lambda_g) = 1, \quad \sigma(g) = \infty, \quad h\left(g, \pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

5. Помимо целых функций с вещественными нулями интерес представляют и функции с нулями на обеих координатных осях комплексной плоскости, что соответствует случаю $m = 4$ в теоремах 1 и 2. Здесь мы рассмотрим более общую ситуацию, когда нули целой функции расположены на двух произвольных прямых, пересекающихся в начале координат. Приведем один результат, полученный в [12; теорема 1] и перекликающийся с упомянутыми в начале п. 3 фактами из монографий [17] и [18].

Пусть $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (1, 2)$, $f(0) = 1$, с нулями $\Lambda_f = \Lambda$, лежащими на двух прямых

$$\{z = te^{i(\pi/2 + \pi/(2\rho))} : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{и} \quad \{z = te^{-i(\pi/2 + \pi/(2\rho))} : t \in \mathbb{R}\}.$$

Следующие два утверждения эквивалентны:

$$\begin{aligned} & \exists \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho} = \beta, \\ & \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(ix)f(-ix)|}{x^\rho} = \pi\beta \quad \text{и} \quad \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(x)f(-x)|}{x^\rho} = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Отметим существенные в свете рассматриваемых нами задач особенности этого результата:

- а) последовательность нулей измерима;
- б) положение прямых привязано к порядку $\rho \in (1, 2)$;
- в) пределы в (5.1) лишь косвенно связаны с величиной типа функции.

Укажем также, что доказательство приведенного результата основано на применении классической теории Левина–Пфлюгера целых функций вполне регулярно роста. Наш метод охватывает целые функции порядка $\rho \in (0, 2)$ с нулями на двух прямых, расположение которых не зависит от величины порядка, причем сама последовательность нулей не предполагается измеримой. Мы будем опираться на следующий результат (см. [16]), в котором через $\Gamma_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leq \theta\}$ обозначен угол, ограниченный лучами $\gamma_{\pm\theta} = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pm\theta\}$.

Пусть $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, 1)$ с нулями $\Lambda_f = \Lambda \subset \Gamma_\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$, имеющими ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) = \beta$, $\underline{\Delta}_\rho(\Lambda) \geq \alpha$. Тогда ρ -тип такой функции удовлетворяет неравенству

$$\sigma_\rho(f) \geq \beta C_\theta(k, \rho), \quad k = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (5.2)$$

где

$$C_\theta(k, \rho) = \frac{\pi k}{\sin \pi \rho} \cos \rho \theta + \max_{a > 0} \int_{ak^{1/\rho}}^a (a^{-\rho} - k\tau^{-\rho}) \frac{\tau + \cos \theta}{\tau^2 + 2\tau \cos \theta + 1} d\tau. \quad (5.3)$$

Равенство в (5.2) достигается для некоторой функции $f_0(z)$ с нулями, расположенными на лучах $\gamma_\theta, \gamma_{-\theta}$ и имеющими ρ -плотности $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_{f_0}) = \beta, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda_{f_0}) = \alpha$.

Приведенный результат позволяет доказать теорему о росте максимума модуля целой функции с нулями на двух прямых.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $f(z)$ – целая функция порядка $\rho \in (0, 2)$ с нулями, имеющими верхнюю ρ -плотность β , нижнюю ρ -плотность $\geq \alpha$ и лежащими на двух прямых, пересекающихся в точке $z = 0$ под углом $2\theta \in [0, \pi/2]$. Тогда имеет место неравенство

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta}{2} C_{2\theta} \left(k, \frac{\rho}{2} \right), \quad k = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (5.4)$$

где $C_\theta(k, \rho)$ определена формулой (5.3). Для каждой пары рассматриваемых значений ρ и θ существует функция $f^*(z)$, реализующая равенство в (5.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что последовательность нулей $\Lambda_f = \{\lambda_n\}$ лежит на множестве

$$L_\theta := \gamma_\theta \cup \gamma_{-\theta} \cup (-\gamma_\theta) \cup (-\gamma_{-\theta})$$

с фиксированным $\theta \in [0, \pi/4]$. По условию $\overline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) = \beta, \underline{\Delta}_\rho(\Lambda_f) \geq \alpha$. Согласно представлению (2.2) имеем

$$f(z) = e^{az} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n} \right) e^{z/\lambda_n}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(z) = f(z) \overline{f(\bar{z})} f(-z) \overline{f(-\bar{z})},$$

где, как обычно, черта означает комплексное сопряжение. Если по-прежнему $\{r_n\}$ обозначает последовательность модулей нулей $f(z)$, выписанную в порядке возрастания, то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r_n^\rho} = \beta, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r_n^\rho} \geq \alpha,$$

а нули функции $F(z)$ образуют множество

$$\Lambda_F = \{r_n e^{i\theta}\} \cup \{r_n e^{-i\theta}\} \cup \{-r_n e^{i\theta}\} \cup \{-r_n e^{-i\theta}\}.$$

Поэтому

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n e^{i\theta}} \right) \left(1 - \frac{z}{r_n e^{-i\theta}} \right) \left(1 + \frac{z}{r_n e^{i\theta}} \right) \left(1 + \frac{z}{r_n e^{-i\theta}} \right) =: F_1(z^2),$$

где

$$F_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\mu_n e^{i\psi}} \right) \left(1 - \frac{z}{\mu_n e^{-i\psi}} \right), \quad \psi = 2\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right], \quad \mu_n = r_n^2.$$

Поскольку нули Λ_{F_1} лежат в множестве $\gamma_\psi \cup \gamma_{-\psi}$ и распределены одинаково на каждом луче γ_ψ и $\gamma_{-\psi}$, то

$$\overline{\Delta}_{\rho/2}(\Lambda_{F_1}) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\mu_n^{\rho/2}} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{r_n^\rho} = 2\beta$$

и, аналогично,

$$\underline{\Delta}_{\rho/2}(\Lambda_{F_1}) \geq 2\alpha,$$

причем $0 < \rho/2 < 1$. Теперь к функции $F_1(z)$ можно применить оценку (5.2):

$$\sigma_{\rho/2}(F_1) \geq 2\beta C_{2\theta} \left(k, \frac{\rho}{2} \right), \quad k = \frac{2\alpha}{2\beta} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Учитывая, что $F(z) = F_1(z^2)$, имеем $\sigma_{\rho/2}(F_1) = \sigma_{\rho}(F)$. Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}(F) &= \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln M_F(r) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z) \overline{f(\bar{z})} f(-z) \overline{f(-\bar{z})}| \\ &\leq 4 \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} r^{-\rho} \ln M_f(r) = 4\sigma_{\rho}(f). \end{aligned}$$

Таким образом, для любой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0, 2)$ с нулями плотностей $\Lambda_f \subset L_{\theta}$, $\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda_f) = \beta$, $\underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda_f) \geq \alpha$, справедлива оценка

$$\sigma_{\rho}(f) \geq \frac{1}{4} \sigma_{\rho}(F) = \frac{1}{4} \sigma_{\rho/2}(F_1) \geq \frac{\beta}{2} C_{2\theta} \left(k, \frac{\rho}{2} \right),$$

совпадающая с (5.4).

Для доказательства точности оценки (5.4) воспользуемся примером экстремальной целой функции $f_0(z)$, доставляющей равенство в (5.2). Как и выше, строим функцию $F_1^*(z)$ с нулями плотностей $\overline{\Delta}_{\rho/2}(\Lambda_{F_1^*}) = \beta$, $\underline{\Delta}_{\rho/2}(\Lambda_{F_1^*}) = \alpha$, расположенными на лучах $\gamma_{2\theta}$, $\gamma_{-2\theta}$ и такую, что

$$\sigma_{\rho/2}(F_1^*) = \frac{\beta}{2} C_{2\theta} \left(k, \frac{\rho}{2} \right).$$

Полагая теперь $f^*(z) = F_1^*(z^2)$, имеем

$$\overline{\Delta}_{\rho}(\Lambda_{f^*}) = \beta, \quad \underline{\Delta}_{\rho}(\Lambda_{f^*}) = \alpha, \quad \sigma_{\rho}(f^*) = \sigma_{\rho/2}(F^*) = \frac{\beta}{2} C_{2\theta} \left(k, \frac{\rho}{2} \right).$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. Я. Левин, *Распределение корней целых функций*, Гостехиздат, М., 1956.
- [2] A. Pfluger, “Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen. I”, *Comment. Math. Helv.*, **11**:1 (1938), 180–214.
- [3] A. Pfluger, “Die Wertverteilung und das Verhalten von Betrag und Argument einer speziellen Klasse analytischer Funktionen. II”, *Comment. Math. Helv.*, **12** (1939), 25–65.
- [4] А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. I”, *Матем. сб.*, **58**:3 (1962), 289–334.
- [5] А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. II”, *Матем. сб.*, **61**:3 (1963), 334–349.
- [6] А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. III”, *Матем. сб.*, **65**:3 (1964), 414–453.
- [7] А. А. Гольдберг, “Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций. IV”, *Матем. сб.*, **66**:3 (1965), 411–457.

- [8] А.Ю. Попов, “Наименьший возможный тип при порядке $\rho < 1$ канонических произведений с положительными нулями заданной верхней ρ -плотности”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 1, 31–36.
- [9] А.Ю. Попов, “О наименьшем типе целой функции порядка ρ с корнями заданной верхней ρ -плотности, лежащими на одном луче”, *Матем. заметки*, **85**:2 (2009), 246–260.
- [10] А.Ю. Попов, “Развитие теоремы Валирона–Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ -плотностью корней”, *Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума*, СМФН, **49**, РУДН, М., 2013, 132–164.
- [11] G. Valiron, “Sur les fonctions entières d’ordre nul et d’ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulière”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys.* (3), **5** (1913), 117–257.
- [12] А.Е. Аветисян, “О целых функциях порядка ρ ($1 < \rho < 2$)”, *Изв. АН Арм. ССР. Матем.*, **23**:6 (1988), 557–574.
- [13] Б.Н. Хабибуллин, “Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции”, *Матем. сб.*, **200**:2 (2009), 129–158.
- [14] Г.Г. Брайчев, В.Б. Шерстюков, “О наименьшем возможном типе целых функций порядка $\rho \in (0, 1)$ с положительными нулями”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:1 (2011), 3–28.
- [15] Г.Г. Брайчев, О.В. Шерстюкова, “Наибольший возможный нижний тип целой функции порядка $\rho \in (0; 1)$ с нулями фиксированных ρ -плотностей”, *Матем. заметки*, **90**:2 (2011), 199–215.
- [16] В.Б. Шерстюков, “Минимальное значение типа целой функции порядка меньше единицы с нулями заданных плотностей, лежащими в угле”, *Материалы 17 международной Саратовской зимней школы “Современные проблемы теории функций и их приложения”* (27 января – 3 февраля 2014 г.), Изд-во Саратовского ун-та, Саратов, 2014, 309–310.
- [17] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation*, Encyclopedia Math. Appl., **27**, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [18] R. Ph. Boas, jr., *Entire Functions*, Pure Appl. Math., **5**, Academic Press, New York, 1954.
- [19] R. M. Redheffer, “On even entire functions with zeros having a density”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **77** (1954), 32–61.

Г. Г. Брайчев

Московский педагогический государственный
университет

E-mail: braichev@mail.ru

Поступило

30.04.2014