Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Коршунов, В. И. Питербарг, Е. Хашорва, Об асимптотическом методе Лапласа и его применении к случайному хаосу, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 6, 868–883

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 14:20:55

Об асимптотическом методе Лапласа и его применении к случайному хаосу

Д. А. Коршунов, В. И. Питербарг, Е. Хашорва

Изучается асимптотика многомерного интеграла Лапласа в случае, когда фаза достигает своего минимума на произвольном гладком многообразии. Приводятся приложения к исследованию асимптотики распределения гауссовского и вейбулловского случайного хаоса.

Библиография: 19 названий.

DOI: 10.4213/mzm10487

1. Введение. Многие задачи теории вероятностей и других областей математики и приложений сводятся к асимптотическому анализу интеграла Лапласа

$$I_\lambda = \int_U a(\mathbf{u}) e^{-\lambda f(\mathbf{u})} d\mathbf{u} \quad (1.1)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, где U – компакт в $\mathbb{R}^d$. Функция a называется *амплитудой*, f – *фазой*. Как правило, предполагается, что обе функции достаточно гладкие. Без ограничения общности считаем, что $\min_{\mathbf{u} \in U} f(\mathbf{u}) = 0$. В настоящей заметке предполагается, что множество

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{u} \in U : f(\mathbf{u}) = 0\}$$

является гладким m -мерным многообразием, $0 \leq m \leq d - 1$.

Многочисленные учебники и монографии, рассматривающие асимптотический метод Лапласа, ограничиваются случаем $m = 0$, т.е. случаем, когда $f(\mathbf{u})$ имеет изолированные точки минимума, иногда рассматривается случай $m = d - 1$, в то время как многие приложения требуют рассмотрения промежуточных значений размерности множества точек минимума. Об этом говорят, в частности, приведенные ниже примеры об асимптотическом поведении хвоста распределения случайного хаоса – однородной функции от значений гауссовского или вейбулловского вектора.

Есть несколько способов получения асимптотик интеграла Лапласа в случае произвольного m . Например, интересным прямым подходом является интегрирование

Работа первого и третьего авторов выполнена при поддержке Швейцарского национального научного фонда (проекты 200021-1401633/1 и 200021-134785).

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00050-а, 14-01-00075).

Работа всех авторов была также поддержана проектом RARE-318984 (7-я Программа европейского сообщества обмена кадрами имени Марии Кюри).

сначала по линиям уровня $f(\mathbf{u}) = c$, а затем по $c \geq 0$. Тогда интеграл становится стандартным интегралом Лапласа с единственной точкой минимума фазы, но по дифференциальной форме

$$df(\mathbf{u}) \wedge \omega_f(\mathbf{u}) = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d,$$

где $(d-1)$ -форма $\omega_f(\mathbf{u})$ называется *дифференциальной формой Гельфанда—Лере*. Эта форма существует в окрестностях точек $\mathbf{u}_0$, в которых градиент $\nabla f(\mathbf{u}_0)$ не обращается в нуль, ее сужение на многообразие уровня $\{\mathbf{u} : f(\mathbf{u}) = c\}$ определяется единственным образом, а именно,

$$\omega_f(\mathbf{u}) = \frac{1}{|\nabla f(\mathbf{u})|^2} \sum_{j=1}^d (-1)^{j-1} \frac{\partial f(\mathbf{u})}{\partial u_j} du_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{du_j} \wedge \cdots \wedge du_d, \quad (1.2)$$

где знак $\widehat{du_j}$ означает отсутствие элемента, см., например, [1; гл. 7]. Таким образом,

$$\int_U a(\mathbf{u}) e^{-\lambda f(\mathbf{u})} d\mathbf{u} = \int_0^\infty e^{-\lambda c} \left(\int_{f(\mathbf{u})=c} a(\mathbf{u}) \omega_f(\mathbf{u}) \right) dc. \quad (1.3)$$

Таким образом, задача сводится к получению асимптотического разложения в нуле новой амплитуды

$$A(c) = \int_{f(\mathbf{u})=c} a(\mathbf{u}) \omega_f(\mathbf{u}).$$

Основная трудность этого подхода, как видно, заключается в получении разложения в нуле функции $A(c)$ вида

$$A(c) = A_0 c^{\rho_0} + A_1 c^{\rho_1} + \cdots \quad \text{при } c \downarrow 0, \quad (1.4)$$

где $-1 < \rho_0 < \rho_1 < \cdots$ и коэффициенты A_j отличны от нуля, особенно в случае произвольной размерности m многообразия $\mathcal{M}$. Далее, имея (1.4), интегрирование по c приводит к требуемому асимптотическому разложению

$$I_\lambda = A_0 \Gamma(\rho_0 + 1) \lambda^{-\rho_0 - 1} + A_1 \Gamma(\rho_1 + 1) \lambda^{-\rho_1 - 1} + \cdots$$

Этот подход обсуждается в [2; гл. 2] в простейшем случае $m = 0$.

Мы применим другой, не менее прямой подход, интегрируя сначала вдоль $\mathcal{M}$, используя теорему Фубини, а затем точно так же получая интеграл Лапласа для случая единственной точки минимума фазы. При этом нам понадобится вспомогательный результат об интегрировании по параметру разложения интеграла Лапласа в простейшем случае. В связи с этим приведем основные результаты для случая $m = 0$ с доказательствами, адаптированными к развитию этого подхода.

2. Стандартный метод Лапласа в случае $m = 0$. Предполагаем, что $f \in C^2(U)$. Обозначим гессиан фазы f в точке $\mathbf{u}$ через

$$f''(\mathbf{u}) := [f''_{ij}, i, j = 1, \dots, d],$$

где f''_{ij} — частная производная f по u_i и u_j .

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(\mathbf{u}) \geq 0$ обращается в нуль в единственной внутренней точке $\mathbf{u}_0$ множества U , причем

$$f(\mathbf{u}_0) = 0, \quad \inf_{\mathbf{u} \in U: \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \geq \varepsilon} f(\mathbf{u}) > 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \quad (2.1)$$

Предположим также, что эта точка минимума функции f невырождена, т.е.

$$\det f''(\mathbf{u}_0) > 0. \quad (2.2)$$

Далее, если $a \in C^{2r}(U)$ и $f \in C^{2r+2}(U)$ для некоторого целого неотрицательного $r \in \mathbb{Z}^+$, то имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\int_U a(\mathbf{u}) e^{-\lambda f(\mathbf{u})} d\mathbf{u} = \lambda^{-d/2} \left[c_0 + \sum_{i=1}^r c_i \lambda^{-i} + o(\lambda^{-r}) \right] \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

где

$$c_0 = a(\mathbf{u}_0) \frac{(2\pi)^{d/2}}{\sqrt{\det f''(\mathbf{u}_0)}}. \quad (2.4)$$

Интуитивное понимание того, почему требуется существование столь большого числа производных для получения $r + 1$ члена разложения (2.3), можно извлечь, например, из статьи [3; § 6.4], где получено два члена разложения ($r = 1$) в одномерном случае $d = 1$. См. также [4; с. 69] и цитируемую там статью [5]. Необходимо также отметить полные асимптотические разложения, $r = \infty$, [2; гл. 1] и [6; гл. IX, § 5], а также [7; § 8.3] для случая граничной точки $\mathbf{u}_0$ и конечного r . Заметим также, что в [8] получены похожие асимптотические разложения в виде $\sum_{i=0}^r c_i \lambda^{-(d+i)/2}$ в предположении существования асимптотических разложений для a и f по каждому радиус-направлению вместо предположения дифференцируемости. Наши разложения в условиях дифференцируемости a и f не содержат члены с $\lambda^{-(d+i)/2}$ при нечетных i .

Различные способы вычисления коэффициентов c_j при $j \geq 1$ в одномерном случае обсуждаются в [9] и [10].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Будем считать для сокращения записей, что $\mathbf{0} \in U$ и $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. Поскольку эта точка минимума невырождена и f везде положительна, кроме точки $\mathbf{0}$ (условия (2.2) и (2.1)), то найдется $\delta > 0$ такое, что $f(\mathbf{u}) \geq \delta \|\mathbf{u}\|^2$ для всех $\mathbf{u} \in U$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{\|\mathbf{u}\| \geq \log \lambda / \sqrt{\lambda}} |a(\mathbf{u})| e^{-\lambda f(\mathbf{u})} d\mathbf{u} \\ & \leq \|a(\mathbf{u})\|_{C(U)} \int_{\|\mathbf{u}\| \geq \log \lambda / \sqrt{\lambda}} e^{-\lambda \delta \|\mathbf{u}\|^2} d\mathbf{u} = o(\lambda^{-r}) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Так как $a(\mathbf{u}) \in C^{2r}(U)$, то имеет место следующее многомерное разложение Тейлора:

$$a(\mathbf{u}) = a(\mathbf{0}) + \sum_{1 \leq |\gamma| \leq 2r} \frac{D^\gamma a(\mathbf{0})}{\gamma!} \mathbf{u}^\gamma + o(\|\mathbf{u}\|^{2r}) \quad \text{при } \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0},$$

где $\gamma \in (\mathbb{Z}^+)^d$ и $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ и используются мульти-индексные обозначения

$$|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_d, \quad \gamma! = \gamma_1! \dots \gamma_d!, \quad \mathbf{u}^\gamma = u_1^{\gamma_1} \dots u_d^{\gamma_d}, \quad D^\gamma a = \frac{\partial^{|\gamma|} a}{\partial u_1^{\gamma_1} \dots \partial u_d^{\gamma_d}}.$$

Тогда

$$a\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}}\right) = a(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^{2r} A_i(\mathbf{u}) \lambda^{-i/2} + o(\|\mathbf{u}\|^{2r} \lambda^{-r}) \quad (2.6)$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно в шаре $\|\mathbf{u}\| \leq \log \lambda$, где $A_i(\mathbf{u})$ – однородный полином степени i .

Аналогично, поскольку $f(\mathbf{u}) \in C^{2r+2}(U)$, $f(\mathbf{0}) = 0$ и $\partial f(\mathbf{0})/\partial u_i = 0$, то

$$f(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(f''(\mathbf{0})\mathbf{u}, \mathbf{u}) + R(\mathbf{u}),$$

где

$$R(\mathbf{u}) := \sum_{3 \leq |\gamma| \leq 2r+2} \frac{D^\gamma f(\mathbf{0})}{\gamma!} \mathbf{u}^\gamma + o(\|\mathbf{u}\|^{2r+2}) \quad \text{при } \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}.$$

В частности,

$$\sup_{\|\mathbf{u}\| \leq \log \lambda / \sqrt{\lambda}} |\lambda R(\mathbf{u})| \leq \text{const} \frac{\log^3 \lambda}{\sqrt{\lambda}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Итак, можно воспользоваться разложением Тейлора для экспоненты:

$$e^{-\lambda R(\mathbf{u})} = 1 + \sum_{i=1}^{2r} \lambda^i R^i(\mathbf{u}) \frac{1}{i!} + O((\lambda R(\mathbf{u}))^{2r+1})$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно по $\|\mathbf{u}\| \leq \log \lambda / \sqrt{\lambda}$. Следовательно, при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно по $\|\mathbf{u}\| \leq \log \lambda$,

$$e^{-\lambda R(\mathbf{u}/\sqrt{\lambda})} = 1 + \sum_{i=1}^{2r} Q_i(\mathbf{u}) \lambda^{-i/2} + o(\lambda^{-r}), \quad (2.7)$$

где $Q_{2i}(\mathbf{u})$ – полином с четными степенями и $Q_{2i+1}(\mathbf{u})$ – полином с нечетными степенями.

Комбинируя (2.6) с (2.7), заключаем, что

$$a\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{-\lambda f(\mathbf{u}/\sqrt{\lambda})} = e^{-(f''(\mathbf{0})\mathbf{u}, \mathbf{u})/2} \left[a(\mathbf{0}) + \sum_{i=1}^{2r} T_i(\mathbf{u}) \lambda^{-i/2} + o(\lambda^{-r}) \right], \quad (2.8)$$

где $T_{2i}(\mathbf{u})$ – полином по четным степеням, а $T_{2i+1}(\mathbf{u})$ – полином по нечетным степеням. Для нечетных i

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(f''(\mathbf{0})\mathbf{u}, \mathbf{u})/2} T_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 0.$$

Часть этого интеграла по области $\|\mathbf{u}\| \geq \log \lambda$ имеет порядок $o(\lambda^{-r})$, поэтому и

$$\int_{\|\mathbf{u}\| < \log \lambda} e^{-(f''(\mathbf{0})\mathbf{u}, \mathbf{u})/2} T_i(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = O(\lambda^{-r}) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Итак, интегрируя (2.8) по $\|\mathbf{u}\| < \log \lambda$, можно исключить полиномы T_i с нечетными степенями и получить при $\lambda \rightarrow \infty$, что

$$\begin{aligned} & \int_{\|\mathbf{u}\| < \log \lambda} a\left(\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{\lambda}}\right) e^{-\lambda f(\mathbf{u}/\sqrt{\lambda})} d\mathbf{u} \\ &= a(\mathbf{0}) \int_{\|\mathbf{u}\| < \log \lambda} e^{-(f''(\mathbf{0})\mathbf{u}, \mathbf{u})/2} d\mathbf{u} \\ &+ \sum_{i=1}^r \lambda^{-i} \int_{\|\mathbf{u}\| < \log \lambda} T_{2i}(\mathbf{u}) e^{-(f''(\mathbf{0})\mathbf{u}, \mathbf{u})/2} d\mathbf{u} + o(\lambda^{-r}), \end{aligned}$$

что вместе с (2.5) эквивалентно утверждению теоремы.

Нам понадобится обобщение этой теоремы на функции a и f , зависящие от параметра. В [11] имеется соответствующая теорема для случая $d = 1$. Сформулируем ее многомерный вариант. Рассмотрим интеграл

$$I_{\lambda, \theta} = \int_U a(\mathbf{u}, \theta) e^{\lambda f(\mathbf{u}, \theta)} d\mathbf{u}, \quad (2.9)$$

где $\theta \in \Theta$ – некоторый параметр. Предполагаем, что $f \in C^2(U)$ для каждого $\theta \in \Theta$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для каждого $\theta \in \Theta$ функция $f(\mathbf{u}, \theta) \geq 0$ имеет единственную внутреннюю точку минимума в U , обозначим ее через $\mathbf{u}_0(\theta)$, т.е.

$$f(\mathbf{u}_0(\theta), \theta) = 0, \quad \inf_{\theta \in \Theta, \mathbf{u} \in U: \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0(\theta)\| \geq \varepsilon} f(\mathbf{u}, \theta) > 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

Предположим, что минимум f для любого $\theta \in \Theta$ невырожден, т.е.

$$\det f''(\mathbf{u}_0(\theta), \theta) > 0.$$

Предположим далее, что для некоторого $r \in \mathbb{Z}^+$ имеем $a \in C^{2r}(U)$ и $f \in C^{2r+2}(U)$ для любого $\theta \in \Theta$. Если все частные производные $a(\mathbf{u}, \theta)$ порядка $2r$ и все частные производные $f(\mathbf{u}, \theta)$ порядка $2r + 2$ равномерно непрерывны равномерно по $\theta \in \Theta$, то имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\int_U a(\mathbf{u}, \theta) e^{-\lambda f(\mathbf{u}, \theta)} d\mathbf{u} = \lambda^{-d/2} \left[c_0(\theta) + \sum_{i=1}^r c_i(\theta) \lambda^{-i} + \psi(\lambda, \theta) \right], \quad (2.10)$$

где $\psi(\lambda, \theta) \lambda^r \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно по $\theta \in \Theta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку все частные производные функции $a(\mathbf{u}, \theta)$ порядка $2r$ и все частные производные функции $f(\mathbf{u}, \theta)$ порядка $2r + 2$ равномерно непрерывны равномерно по $\theta \in \Theta$, то можно просто применить разложения из доказательства предыдущей теоремы, остаточные члены при этом будут иметь тот же порядок малости равномерно по θ . Далее проводим те же вычисления.

Заметим, что для каждого i коэффициент разложения $c_i(\theta)$ – гладкая функция частных производных функции $a(\mathbf{u}, \theta)$ в точке $\mathbf{u}_0(\theta)$ порядка не выше $2i$ и частных производных функции $f(\mathbf{u}, \theta)$ в точке $\mathbf{u}_0(\theta)$ порядка не выше $2i + 2$.

Также заметим, что в силу равномерности асимптотического разложения его можно интегрировать по θ , если в Θ введен соответствующий интеграл.

3. Метод Лапласа для случая $1 \leq m \leq d - 1$. Теперь можно достаточно просто рассмотреть ситуацию, когда множество $\mathcal{M}$ нулей фазы $f(\mathbf{u})$ представляет собой m -мерное, $1 \leq m \leq d - 1$, многообразие без границы ненулевого m -объема.

Предположим, что все точки многообразия $\mathcal{M}$ являются невырожденными точками минимума в том смысле, что для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{M}$ ранг матрицы $f''(\mathbf{v})$ в точности равен $d - m$. Обозначим через $\det f''_{d-m}(\mathbf{v})$ любой ненулевой $(d - m)$ -минор матрицы $f''(\mathbf{v})$. Применяя ортогональные преобразования, легко убедиться, что все $(d - m)$ -миноры равны друг другу.

Обозначим через $\rho(\mathbf{u}, \mathcal{M}) := \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{M}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$, $\mathbf{u} \in U$, расстояние от $\mathbf{u}$ до $\mathcal{M}$.

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$*

$$\inf_{\mathbf{u} \in U: \rho(\mathbf{u}, \mathcal{M}) \geq \varepsilon} f(\mathbf{u}) > 0. \quad (3.1)$$

Предположим, что

$$\inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{M}} \det f''_{d-m}(\mathbf{v}) > 0. \quad (3.2)$$

Предположим, что для некоторого $r \in \mathbb{Z}^+$ многообразие $\mathcal{M}$ является C^{2r+2} -гладким и что $a(\mathbf{u}) \in C^{2r}$, $f(\mathbf{u}) \in C^{2r+2}$. Тогда имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$I_\lambda = \lambda^{-(d-m)/2} \left(c_0 + \sum_{i=1}^r c_i \lambda^{-i} + o(\lambda^{-r}) \right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

где

$$c_0 := (2\pi)^{(d-m)/2} \int_{\mathcal{M}} \frac{a(\mathbf{v})}{\sqrt{\det f''_{d-m}(\mathbf{v})}} dV,$$

dV – элемент m -мерного объема $\mathcal{M}$ и $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{R}$.

Интегралы по многообразиям, на которых функция достигает своего минимума, встречаются и в других работах, например, в теореме об асимптотической эквивалентности Барба [12; теорема 7.1] для случая $\mathbf{0} \notin U$ и для строго выпуклой α -положительно однородной функции f , так что $\mathcal{M}$ содержится на границе U , см. также [13; теорема 50].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В силу условий компакт U можно разбить на конечное число непересекающихся множеств $U_1, \dots, U_n$ таким образом, чтобы для каждого $1 \leq j \leq n$ многообразие $\mathcal{M} \cap U_j$ было элементарным, т.е. чтобы существовало взаимнооднозначное отображение $h_j: [0, 2]^d \rightarrow \text{cl}(U_j)$ (замыкание U_j), которое $2r + 2$ раз дифференцируемо, невырождено и такое, что

$$h_j([0, 2]^m \times \{1\}^{d-m}) = \mathcal{M} \cap \text{cl}(U_j).$$

Невырожденность понимается в том смысле, что якобиан $J_j(\mathbf{z}) := \det h'_j(\mathbf{z})$ не обращается в нуль при всех $\mathbf{z} \in [0, 2]^d$.

В соответствии с этим разобьем исследуемый интеграл на n слагаемых:

$$I_\lambda = \sum_{j=1}^n \int_{U_j} a(\mathbf{u}) e^{-\lambda f(\mathbf{u})} d\mathbf{u} =: \sum_{j=1}^n I_{\lambda,j}$$

и исследуем асимптотическое поведение j -го интеграла в этой сумме.

Так как

$$h_j([0, 2]^m \times \{1\}^{d-m}) = \mathcal{M} \cap \text{cl}(U_j),$$

то для каждой точки $\mathbf{s} \in [0, 2]^m$ имеем $f(h_j(\mathbf{s}, \mathbf{1})) = 0$. Для любой точки $\mathbf{s}$ функция $f(h_j(\mathbf{s}, \cdot, \dots, \cdot))$ от $d - m$ переменных дифференцируема $2r + 2$ раз, а функция $a(h_j(\mathbf{s}, \cdot, \dots, \cdot))$ от $d - m$ переменных дифференцируема $2r$ раз. К функциям $a \circ h_j$ и $f \circ h_j$ с параметром $\theta = \mathbf{s} \in [0, 2]^m$ применим теорему 2. Получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{t} \in [0, 2]^{d-m}} a(h_j(\mathbf{s}, \mathbf{t})) e^{\lambda f(h_j(\mathbf{s}, \mathbf{t}))} |\det J_j(\mathbf{s}, \mathbf{t})| d\mathbf{t} \\ &= \lambda^{-(d-m)/2} \left(c_{0j}(\mathbf{s}) + \sum_{i=1}^r c_{ij}(\mathbf{s}) \lambda^{-i} + o(\lambda^{-r}) \right) \end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно по $\mathbf{s}$, где

$$c_{j0}(\mathbf{s}) = (2\pi)^{(d-m)/2} \frac{a(h_j(\mathbf{s}, \mathbf{1})) |\det J_j(\mathbf{s}, \mathbf{1})|}{\sqrt{|\det(f \circ h_j)''_{d-m}(\mathbf{s}, \mathbf{1})|}},$$

где гессиан функции $g \circ h_j$ берется, естественно, по последним $d - m$ переменным. Интегрируя по $\mathbf{s} \in [0, 2]^m$, получаем окончательно, что

$$\begin{aligned} I_{\lambda, j} &= \int_{(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \in [0, 2]^d} a(h_j(\mathbf{s}, \mathbf{t})) e^{\lambda f(h_j(\mathbf{s}, \mathbf{t}))} |\det J_j(\mathbf{s}, \mathbf{t})| d\mathbf{t} d\mathbf{s} \\ &= \lambda^{-(d-m)/2} \left(c_{0j} + \sum_{i=1}^r c_{ij} \lambda^{-i} + o(\lambda^{-r}) \right) \end{aligned}$$

при $\lambda \rightarrow \infty$, где

$$\begin{aligned} c_{0j} &= (2\pi)^{(d-m)/2} \int_{[0, 2]^m} \frac{a(h_j(\mathbf{s}, \mathbf{1})) |\det J_j(\mathbf{s}, \mathbf{1})|}{\sqrt{|\det(f \circ h_j)''_{d-m}(\mathbf{s}, \mathbf{1})|}} d\mathbf{s} \\ &= (2\pi)^{(d-m)/2} \int_{\mathcal{M} \cap U_j} \frac{a(\mathbf{v})}{\sqrt{|\det f''_{d-m}(\mathbf{v})|}} dV. \end{aligned}$$

Суммирование по всем $j \leq n$ завершает доказательство.

4. Случайный хаос вейбулловского типа. В настоящем пункте мы рассматриваем семейства гауссовских и негауссовских случайных хаосов, для которых асимптотика хвоста может быть вычислена с помощью метода Лапласа.

Пусть $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_d)$ – случайный вектор в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, имеющий стандартное нормальное распределение. Пусть $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная однородная функция порядка $\alpha > 0$, т.е. $g(x\mathbf{t}) = x^\alpha g(\mathbf{t})$ для всех $x > 0$ и $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$. Будем говорить, что случайная величина $g(\boldsymbol{\eta})$ является *гауссовским хаосом порядка α* . Традиционно в литературе термин гауссовский хаос порядка $\alpha \in \mathbb{N}$ закреплен за случаем, когда g – однородный полином степени α ; это понятие восходит к Винеру [14], который впервые ввел в рассмотрение процессы полиномиального хаоса. В настоящей статье мы следуем расширенному толкованию понятия гауссовского хаоса. Примерами гауссовского хаоса служат квадратичные формы от компонент гауссовского вектора, другие однородные полиномы, в частности, симметричные статистики Хёффинга, случайные определители, произведения степеней гауссовских величин.

Гауссовский хаос можно рассматривать как частный случай более общего случайного хаоса вейбулловского типа. Будем говорить, что случайный вектор $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_d)$ в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, имеет *плотность вейбулловского типа*, если его плотность может быть представлена при некоторых $\beta_a > -d$ и $\beta > 0$ как

$$p_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{v}) = a\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{\beta}}\right) \|\mathbf{v}\|_{\beta}^{\beta_a} e^{-f(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_{\beta}) \|\mathbf{v}\|_{\beta}^{\beta}}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \quad (4.1)$$

где a и f – неотрицательные функции на единичной сфере $\mathbb{S}_{d-1, \beta}$ в L_{β} ; другими словами, множитель перед экспонентой – однородная функция порядка β_a , а показатель экспоненты – однородная функция порядка β . Здесь и далее $\|\mathbf{v}\|_{\beta} := (v_1^{\beta} + \dots + v_d^{\beta})^{1/\beta}$; в случае $\beta \geq 1$ – это L_{β} -норма в $\mathbb{R}^d$. Как и выше, $\|\mathbf{v}\| := \|\mathbf{v}\|_2$.

Плотность (4.1) может быть записана эквивалентным образом в терминах L_2 -нормы:

$$p_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{v}) = \tilde{a}\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) \|\mathbf{v}\|^{\beta_a} e^{-\tilde{f}(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|) \|\mathbf{v}\|^{\beta}},$$

где функции $\tilde{a}$ и $\tilde{f}$ определены на единичной сфере $\mathbb{S}_{d-1}$ в L_2 следующим образом: для $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_{d-1}$,

$$\tilde{a}(\mathbf{u}) = a\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_{\beta}}\right) \left\| \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_{\beta}} \right\|^{-\beta_a}, \quad \tilde{f}(\mathbf{u}) = f\left(\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_{\beta}}\right) \left\| \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_{\beta}} \right\|^{-\beta_a}, \quad \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|_{\beta}} \in \mathbb{S}_{d-1, \beta}.$$

Покажем теперь, как асимптотический метод Лапласа помогает в получении асимптотик хвоста распределения вейбулловского хаоса $g(\boldsymbol{\eta})$. Предполагаем, что g не является отрицательной, т.е. $g(x) > 0$ для некоторого x , иначе задача тривиальна.

Начнем с равенства

$$\mathbb{P}\{g(\boldsymbol{\eta}) > x\} = \int_{\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d: g(\mathbf{v}) > x\}} p_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{v}) d\mathbf{v}.$$

В силу однородности g область интегрирования может быть определена неравенством $\|\mathbf{v}\|_{\beta}^{\alpha} g(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_{\beta}) > x$, так что

$$\mathbb{P}\{g(\boldsymbol{\eta}) > x\} = \int_{\{\mathbf{v}: \|\mathbf{v}\|_{\beta} > x^{1/\alpha} / g^{1/\alpha}(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_{\beta}), g(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_{\beta}) > 0\}} a\left(\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_{\beta}}\right) \|\mathbf{v}\|_{\beta}^{\beta_a} e^{-f(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_{\beta}) \|\mathbf{v}\|_{\beta}^{\beta}} d\mathbf{v}.$$

Здесь естественно перейти к новым переменным интегрирования $\mathbf{v} = (r, \boldsymbol{\ell})$, где $r = \|\mathbf{v}\|_{\beta} \geq 0$ и $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_{\beta} \in \mathbb{S}_{d-1, \beta}$. Объем $d\mathbf{v}$ равен $r^{d-1} J(1, \boldsymbol{\ell}) d\boldsymbol{\ell} dr$. После этой замены переменных получаем (полагаем $g(\boldsymbol{\ell}) = g(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_{\beta})$, $a(\boldsymbol{\ell}) = a(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_{\beta})$ и $f(\boldsymbol{\ell}) = f(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_{\beta})$)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{g(\boldsymbol{\eta}) > x\} &= \int_{\{r > x^{1/\alpha} / g^{1/\alpha}(\boldsymbol{\ell}), g(\boldsymbol{\ell}) > 0\}} a(\boldsymbol{\ell}) r^{d-1+\beta_a} e^{-f(\boldsymbol{\ell}) r^{\beta}} dr d\boldsymbol{\ell} \\ &= \frac{1}{\beta} \int_{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{S}_{d-1, \beta}: g(\boldsymbol{\ell}) > 0} \frac{a(\boldsymbol{\ell})}{f^{(d+\beta_a)/\beta}(\boldsymbol{\ell})} \left[\int_{f(\boldsymbol{\ell}) x^{\beta/\alpha} / g^{\beta/\alpha}(\boldsymbol{\ell})}^{\infty} s^{(d+\beta_a)/\beta-1} e^{-s} ds \right] d\boldsymbol{\ell}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где применена теорема Фубини и положено $s = f(\boldsymbol{\ell}) r^{\beta}$.

Внутренний интеграл представляет собой неполную гамма-функцию, которая может быть разложена следующим образом (см., например, [15; 6.5.32]):

$$\int_y^\infty s^\beta e^{-s} ds = y^\beta e^{-y} \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \beta \cdots (\beta + 1 - k) y^{-k} + R_n(y) \right], \quad (4.3)$$

где $R_n(y) = O(y^{-n})$ при $y \rightarrow \infty$ для любого фиксированного n ; более того,

$$|R_n(y)| \leq |\beta \cdots (\beta + 1 - n)| y^{-n} \quad \text{при } n > \beta.$$

Заметим, что в случае $\beta \in \mathbb{N}$ сумма конечна с $\beta + 1$ членами. Следовательно, при $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_{f(\ell)x^{\beta/\alpha}/g^{\beta/\alpha}(\ell)}^\infty s^{(d+\beta_a)/\beta-1} e^{-s} ds \\ &= f^{(d+\beta_a)/\beta-1}(\ell) \frac{x^{(d+\beta_a-\beta)/\alpha}}{g^{(d+\beta_a-\beta)/\alpha}(\ell)} e^{-f(\ell)x^{\beta/\alpha}/g^{\beta/\alpha}(\ell)} \\ & \times \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{d+\beta_a}{\beta} - 1 \right) \cdots \left(\frac{d+\beta_a}{\beta} - k \right) \left(f(\ell) \frac{x^{\beta/\alpha}}{g^{\beta/\alpha}(\ell)} \right)^{-k} + O(x^{-n\beta/\alpha}) \right], \end{aligned}$$

и это асимптотическое разложение имеет место равномерно по $\ell \in \mathbb{S}_{d-1,\beta}$, потому что $f(\ell)$ и $g(\ell)$ непрерывны на $\mathbb{S}_{d-1,\beta}$, что влечет отделенность $f(\ell)$ от нуля и $g(\ell)$ от бесконечности.

Подставляя это разложение в (4.2), получаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{g(\eta) > x\} \\ &= \frac{x^{(d+\beta_a-\beta)/\alpha}}{\beta} \int_{\ell \in \mathbb{S}_{d-1,\beta}: g(\ell) > 0} a_0(\ell) e^{-f_0(\ell)x^{\beta/\alpha}} d\ell \\ & \times \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{d+\beta_a}{\beta} - 1 \right) \cdots \left(\frac{d+\beta_a}{\beta} - k \right) \left(f(\ell) \frac{x^{\beta/\alpha}}{g^{\beta/\alpha}(\ell)} \right)^{-k} + O(x^{-n\beta/\alpha}) \right], \end{aligned}$$

где

$$a_0(\ell) := \frac{a(\ell)}{f(\ell)g^{(d+\beta_a-\beta)/\alpha}(\ell)}, \quad f_0(\ell) := \frac{f(\ell)}{g^{\beta/\alpha}(\ell)}. \quad (4.4)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{g(\eta) > x\} &= \frac{x^{(d+\beta_a-\beta)/\alpha}}{\beta} \left[I_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{d+\beta_a}{\beta} - 1 \right) \cdots \left(\frac{d+\beta_a}{\beta} - k \right) x^{-k\beta/\alpha} I_k(x) \right. \\ & \left. + O(x^{-n\beta/\alpha}) I_n(x) \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$I_k(x) := \int_{\ell \in \mathbb{S}_{d-1,\beta}: g(\ell) > 0} a_k(\ell) e^{-f_0(\ell)x^{\beta/\alpha}} d\ell$$

и

$$a_k(\ell) := a_0(\ell) \left(\frac{g^{\beta/\alpha}(\ell)}{f(\ell)} \right)^k = \frac{a(\ell)}{f^{k+1}(\ell)g^{(d+\beta_a-(k+1)\beta)/\alpha}(\ell)}, \quad k \leq n-1, \quad a_n(\ell) = 1.$$

Таким образом, наша задача сведена к исследованию асимптотического поведения интеграла $I_k(x)$ для $k \geq 0$ при $x \rightarrow \infty$. Чтобы применить метод Лапласа, необходимо определить какую-нибудь параметризацию на единичной сфере $\mathbb{S}_{d-1,\beta}$ в L_β . Перейдем к гиперсферическим координатам $\ell(\phi)$, т.е. к $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{S}_{d-1,\beta}$,

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \|\ell\| \cos \varphi_1, \\ \ell_2 &= \|\ell\| \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\dots\dots\dots, \\ \ell_{d-1} &= \|\ell\| \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{d-2} \cos \varphi_{d-1}, \\ \ell_d &= \|\ell\| \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{d-2} \sin \varphi_{d-1}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}) \in \Pi_{d-1} := [0, \pi)^{d-2} \times [0, 2\pi)$ – угловые координаты $\ell \in \mathbb{S}_{d-1,\beta}$; ясно, что $\|\ell\|$ зависит от ϕ . (Можно также перейти к так называемым обобщенным сферическим координатам, которые более приспособлены к пространству L_β , см. [16].) Якобиан равен (здесь ∇ – градиент)

$$\det J(\phi) := \sin^{d-2} \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{d-2} \frac{\|\nabla(\ell_1^\beta + \dots + \ell_d^\beta)\| \|\ell\|}{(\nabla(\ell_1^\beta + \dots + \ell_d^\beta), \ell)} = \frac{\sin^{d-2} \varphi_1 \cdots \sin \varphi_{d-2}}{\sqrt{\ell_1^{2(\beta-1)} + \dots + \ell_d^{2(\beta-1)}} \|\ell\|}. \quad (4.7)$$

После такой замены переменных получаем (полагаем $g(\phi) = g(\ell)$, $a_k(\phi) = a_k(\ell)$ и $f_0(\phi) = f_0(\ell)$)

$$I_k(x) = \int_{\phi \in \Pi_{d-1}: g(\phi) > 0} a_k(\phi) e^{-f_0(\phi)x^{\beta/\alpha}} |\det J(\phi)| d\phi. \quad (4.8)$$

В соответствии с идеологией асимптотического метода Лапласа нас интересуют точки достижения минимума функцией $f_0(\ell)$, $\ell \in \mathbb{S}_{d-1,\beta}$. Обозначим

$$\begin{aligned} \widehat{f}_0 &:= \min_{\ell \in \mathbb{S}_{d-1,\beta}} f_0(\ell) = \min_{\phi \in \Pi_{d-1}} f_0(\phi), \\ \mathcal{M} &:= \{\ell \in \mathbb{S}_{d-1,\beta} : f_0(\ell) = \widehat{f}_0\}, \quad \mathcal{M}_\varphi := \{\phi \in \Pi_{d-1} : f_0(\phi) = \widehat{f}_0\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим два типа структуры множества $\mathcal{M}$:

- (а) $\mathcal{M}$ состоит из конечного числа изолированных точек.
- (б) $\mathcal{M}$ представляет собой гладкое m -мерное многообразие без границы, $1 \leq m \leq d-2$, на единичной сфере $\mathbb{S}_{d-1,\beta}$ в L_β .

Хотя первый тип является по сути частным случаем второго, при этом размерность многообразия равна нулю, однако мы рассматриваем его отдельно, поскольку случай изолированных точек минимума фазы является классическим и по сути базовым, как показано в предыдущих пунктах.

4.1. Случай конечного $\mathcal{M}$. Рассмотрим однородную непрерывную функцию $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ порядка $\alpha > 0$ и функцию f такие, что множество $\mathcal{M}$ состоит из конечного числа точек, скажем, $\mathcal{M} = \{\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(k)}\}$; эквивалентно, $\mathcal{M}_\varphi = \{\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(k)}\}$.

Пусть $g(\phi)$, $f(\phi) \in C^2(\Pi_{d-1})$. Предположим, что $\det f_0''(\phi^{(j)}) > 0$ для всех $j = 1, \dots, k$, где

$$f_0''(\phi) := \left[\frac{\partial^2 f_0(\phi)}{\partial \varphi_i \partial \varphi_l} \right]_{i,l=1,\dots,d-1}$$

– гессиан $f_0(\phi)$. Применяя теорему 1 к интегралам $I_k(x)$ и подставляя соответствующие асимптотики в (4.5), выводим следующее асимптотическое разложение для вейбулловского хаоса.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $a(\phi) \in C^{2r}(\Pi_{d-1})$ и $g(\phi), f(\phi) \in C^{2r+2}(\Pi_{d-1})$ для некоторого $r \geq 0$. Тогда имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\mathbb{P}\{g(\eta) > x\} = x^{(2d+2\beta_a-(d+1)\beta)/2\alpha} e^{-\hat{f}_0 x^{\beta/\alpha}} \left(h_0 + \sum_{i=1}^r h_i x^{-i\beta/\alpha} + o(x^{-r\beta/\alpha}) \right)$$

при $x \rightarrow \infty$, где

$$h_0 := \frac{1}{\beta} (2\pi)^{(d-1)/2} \sum_{j=1}^k \frac{a_0(\phi^{(j)}) |\det J(\phi^{(j)})|}{\sqrt{\det f_0''(\phi^{(j)})}}$$

и $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{R}$.

Плотность случайного хаоса $g(\eta)$ может быть выведена из (4.2):

$$\begin{aligned} p_{g(\eta)}(x) &= -\frac{d}{dx} \mathbb{P}\{g(\eta) > x\} \\ &= -\frac{1}{\beta} \int_{\ell \in \mathbb{S}_{d-1, \beta}: g(\ell) > 0} \frac{a(\ell)}{f^{(d+\beta_a)/\beta}(\ell)} \frac{d}{dx} \left[\int_{f(\ell)x^{\beta/\alpha}/g^{\beta/\alpha}(\ell)}^{\infty} s^{(d+\beta_a)/\beta-1} e^{-s} ds \right] d\ell \\ &= \frac{x^{(d+\beta_a)/\alpha-1}}{\alpha} \int_{\ell \in \mathbb{S}_{d-1, \beta}: g(\ell) > 0} \frac{a(\ell)}{g^{(d+\beta_a)/\alpha}(\ell)} e^{-f(\ell)x^{\beta/\alpha}/g^{\beta/\alpha}(\ell)} d\ell. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Как и выше, можно вывести, что плотность удовлетворяет следующему асимптотическому разложению при $x \rightarrow \infty$:

$$p_{g(\eta)}(x) = x^{(2d+2\beta_a-(d-1)\beta)/2\alpha-1} e^{-\hat{f}_0 x^{\beta/\alpha}} \left(\tilde{h}_0 + \sum_{i=1}^r \tilde{h}_i x^{-i\beta/\alpha} + o(x^{-r\beta/\alpha}) \right), \quad (4.10)$$

где $\tilde{h}_0 := (\beta/\alpha) \hat{f}_0 h_0$.

4.2. Случай многообразия. Пусть теперь $\mathcal{M}_\varphi$ – m -мерное многообразие без границы конечного объема, $1 \leq m \leq d-2$.

Предполагаем, что ранг матрицы $f_0''(\phi)$ равен $d-1-m$ для всех $\phi \in \mathcal{M}_\varphi$. Обозначим через $\det f_{0,d-1-m}''(\phi)$ произвольный ненулевой $(d-1-m)$ -минор матрицы $f_0''(\phi)$; напомним, что все они равны. Положим

$$h_0 := \frac{1}{\beta} (2\pi)^{(d-1-m)/2} \int_{\mathcal{M}_\varphi} \frac{a_0(\phi) |\det J(\phi)|}{\sqrt{\det f_{0,d-1-m}''(\phi)}} dV_\varphi,$$

где dV_φ – элемент объема в $\mathcal{M}_\varphi \subset \Pi_{d-1}$. Применяя теперь теорему 3 к интегралам $I_k(x)$, приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\mathcal{M}_\varphi$ – C^{2r+2} -гладкое многообразие для некоторого $r \geq 0$. Предположим также, что $a(\phi) \in C^{2r}(\Pi_{d-1})$ и $f(\phi), g(\phi) \in C^{2r+2}(\Pi_{d-1})$. Тогда имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$\mathbb{P}\{g(\eta) > x\} = x^{(2d+2\beta_a-(d+1-m)\beta)/2\alpha} e^{-\hat{f}_0 x^{\beta/\alpha}} \left(h_0 + \sum_{i=1}^r h_i x^{-i\beta/\alpha} + o(x^{-r\beta/\alpha}) \right)$$

при $x \rightarrow \infty$, где $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{R}$.

Как и в случае $m = 0$, плотность допускает разложение при $x \rightarrow \infty$:

$$p_{g(\boldsymbol{\eta})}(x) = x^{(2d+2\beta_a-(d-1-m)\beta)/2\alpha-1} e^{-\hat{f}_0 x^{\beta/\alpha}} \left(\tilde{h}_0 + \sum_{i=1}^r \tilde{h}_i x^{-i\beta/\alpha} + o(x^{-r\beta/\alpha}) \right). \quad (4.11)$$

Этот результат обобщает асимптотики, полученные в [12; теорема 7.1], где дополнительно предполагалось, что

- (а) $a(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_\beta) \equiv \text{const}$,
- (б) $\beta_a = 0$,
- (в) функция $f(\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_\beta)\|\mathbf{v}\|_\beta^\beta$ строго выпукла (в частности, $\beta > 1$).

5. Случайный хаос с независимыми координатами. Рассмотрим специальный случай вейбулловского хаоса, когда координаты случайного вектора $\boldsymbol{\eta}$ в $\mathbb{R}^d$ независимы и имеют следующую одномерную плотность:

$$p_{\eta_k}(v) = c_1 e^{-c_2 |v|^\beta}, \quad k = 1, \dots, d, \quad (5.1)$$

где $c_2 > 0$, $\beta > 0$ и $c_1 = \beta c_2^{1/\beta} / (2\Gamma(1/\beta))$ – нормирующая константа, так что

$$p_{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{v}) = c_1^d e^{-c_2(|v_1|^\beta + \dots + |v_d|^\beta)} = c_2^d e^{-c_2 \|\mathbf{v}\|_\beta^\beta}. \quad (5.2)$$

Это представляет собой частный случай (4.1) при $a(\mathbf{v}) \equiv c_1^d$, $\beta_a = 0$ и $f(\mathbf{v}) \equiv c_2$.

Для понимания поведения хвоста $g(\boldsymbol{\eta})$ в этом случае применим теорему 5. Функции, определенные в (4.4), равны

$$a_0(\ell) = \frac{c_1^d}{c_2 g^{(d-\beta)/\alpha}(\ell)}, \quad f_0(\ell) = \frac{c_2}{g^{\beta/\alpha}(\ell)}.$$

Имеем

$$\hat{f}_0 = \min_{\phi \in \Pi_{d-1}} f_0(\phi) = \frac{c_2}{\hat{g}^{\beta/\alpha}},$$

где

$$\hat{g} := \max_{\phi \in \Pi_{d-1}} g(\phi) = \max_{\ell \in \mathbb{S}_{d-1, \beta}} g(\ell).$$

Тогда

$$\mathcal{M} := \{\ell \in \mathbb{S}_{d-1, \beta} : g(\ell) = \hat{g}\}, \quad \mathcal{M}_\varphi := \{\phi \in \Pi_{d-1} : g(\phi) = \hat{g}\}.$$

Гессиян f_0 в точке ее минимума равен

$$f_0''(\phi) = -\frac{c_2 \beta}{\alpha \hat{g}^{(\beta+\alpha)/\alpha}} g''(\phi),$$

так что для ненулевого $(d-1-m)$ -минора матрицы $f_0''(\phi)$ имеем

$$\det f_{0, d-1-m}''(\phi) = \left(\frac{c_2 \beta}{\alpha \hat{g}^{(\beta+\alpha)/\alpha}} \right)^{d-1-m} |\det g_{d-1-m}''(\phi)|.$$

Поэтому в случае вейбулловского радиуса (5.2) теорема 5 принимает следующий вид.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\mathcal{M}_\varphi$ — C^{2r+2} -гладкое многообразие для некоторого $r \geq 0$. Предположим также, что $g(\phi) \in C^{2r+2}(\Pi_{d-1})$. Тогда справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$P\{g(\boldsymbol{\eta}) > x\} = \left(\frac{x}{\widehat{g}}\right)^{(2d-(d+1-m)\beta)/2\alpha} e^{-c_2(x/\widehat{g})^{\beta/\alpha}} \left(h_0 + \sum_{i=1}^r h_i x^{-i\beta/\alpha} + o(x^{-r\beta/\alpha})\right)$$

при $x \rightarrow \infty$, где

$$h_0 := \left(\frac{2\pi}{c_2\beta}\right)^{(d-1-m)/2} \frac{c_1^d}{\beta c_2} (\alpha\widehat{g})^{(d-1-m)/2} \int_{\mathcal{M}_\varphi} \frac{|\det J(\phi)|}{\sqrt{|\det g''_{d-1-m}(\phi)|}} dV_\varphi,$$

и $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{R}$.

6. Гауссовский случайный хаос. Приведем следствие теоремы 6 для случая гауссовского хаоса, определенного в начале п. 4. Итак, пусть $\boldsymbol{\eta}$ — случайный вектор в $\mathbb{R}^d$ со стандартным нормальным распределением, т.е. в представлении (4.1) имеем $a(\mathbf{v}) \equiv c_1^d = (2\pi)^{-d/2}$, $\beta_a = 0$ и $f(\mathbf{v}) \equiv c_2 = 1/2$, $\beta = 2$. Тогда справедливо такое следствие теоремы 6 для случая гауссовского хаоса.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $\mathcal{M}_\varphi$ — C^{2r+2} -гладкое многообразие для некоторого $r \geq 0$. Предположим также, что $g(\phi) \in C^{2r+2}(\Pi_{d-1})$. Тогда имеет место следующее асимптотическое разложение:

$$P\{g(\boldsymbol{\eta}) > x\} = \left(\frac{x}{\widehat{g}}\right)^{(m-1)/\alpha} e^{-(x/\widehat{g})^{2/\alpha}/2} \left(h_0 + \sum_{i=1}^r h_i x^{-2i/\alpha} + o(x^{-2r/\alpha})\right) \quad (6.1)$$

при $x \rightarrow \infty$, где

$$h_0 := \frac{1}{(2\pi)^{(1+m)/2}} (\alpha\widehat{g})^{(d-1-m)/2} \int_{\mathcal{M}_\varphi} \frac{|\det J(\phi)|}{\sqrt{|\det g''_{d-1-m}(\phi)|}} dV_\varphi,$$

и $h_1, \dots, h_r \in \mathbb{R}$.

Следствие 7 было доказано в [17] (см. также [18]) прямым вероятностным методом. Ссылки на литературу по вопросам различных гауссовских моделей можно найти там же.

7. Примеры. Во всех примерах случайный вектор $\boldsymbol{\eta}$ в $\mathbb{R}^d$ имеет плотность (5.2); в частности, его координаты независимы.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим хаос

$$g(\boldsymbol{\eta}) = |\eta_1|^\alpha + \dots + |\eta_d|^\alpha$$

порядка $\alpha > 0$.

Если $\alpha < \beta$, то функция $y_1^{\alpha/\beta} + \dots + y_d^{\alpha/\beta}$ вогнута и, следовательно, ее максимум на множестве $y_1 + \dots + y_d = 1$, $y_i \geq 0$, достигается в точке $y_1 = \dots = y_d = 1/d$. Следовательно, $\widehat{g} = d^{1-\alpha/\beta}$ и $\mathcal{M}$ состоит из 2^d точек $(\pm d^{-1/\beta}, \dots, \pm d^{-1/\beta})$ (многообразие нулевой размерности). Тогда ввиду (4.10) плотность $g(\boldsymbol{\eta})$ равна

$$C_1 x^{(2d-(d-1)\beta)/2\alpha-1} e^{-c_2 d^{1-\beta/\alpha} x^{\beta/\alpha}} (1 + O(x^{-\beta/\alpha})) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Если $\alpha > \beta$, то $\widehat{g} = 1$ и $\mathcal{M}$ состоит из $2d$ точек $(0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$ (снова многообразие нулевой размерности), в которых $\det f_0'' = \infty$ при $\beta < 2$ и $\det f_0'' = 0$ при $\beta > 2$. Поэтому результат (4.10) не применим. Однако в этом случае $|\eta_i|^\alpha$ имеет субэкспоненциальную плотность

$$\frac{2c_1}{\alpha} x^{1/\alpha-1} e^{-c_2 x^{\beta/\alpha}}, \quad x > 0,$$

и поэтому плотность величины $g(\boldsymbol{\eta})$ асимптотически эквивалентно при $x \rightarrow \infty$ плотности величины $|\eta_i|^\alpha$ с коэффициентом d , см. [19; гл. 4]. Тот факт, что $\mathcal{M}$ состоит из d точек $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, отражает принцип одного большого скачка в теории субэкспоненциальных распределений, см. [19; § 3.1].

Если $\alpha = \beta$, то $\widehat{g} = 1$ и $\mathcal{M} = \mathbb{S}_{d-1,\beta}$ (многообразие размерности $m = d - 1$) и из (4.9) вытекает, что плотность величины $g(\boldsymbol{\eta})$ равна

$$\frac{c_1^d \text{Vol } \mathbb{S}_{d-1,\beta}}{\alpha} x^{d/\alpha-1} e^{-c_2 x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right) \right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим произведение независимых случайных величин, т.е.

$$g(\mathbf{u}) = u_1 \cdots u_d.$$

Здесь $\alpha = d$, множество

$$\mathcal{M} = \{(\pm d^{-1/\beta}, \dots, \pm d^{-1/\beta}) \text{ с четным числом отрицательных координат}\}$$

состоит из 2^{d-1} точек (произведение $u_1 \cdots u_d$ должно быть положительно) и $\widehat{g} = 1/d^{d/\beta}$. Поэтому

$$p_{\eta_1 \dots \eta_d}(x) = C_2 x^{((d-1)/2d)\beta} e^{-c_2 d x^{\beta/d}} (1 + O(x^{-\beta/d})) \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Таким образом, большое значение произведения получается наиболее вероятным образом, когда все множители почти равны между собой, т.е. плотность $p_{\eta_1 \dots \eta_d}(x)$ формируется в основном произведением плотностей в точках $x^{1/d}$.

ПРИМЕР 3. L_β -Формы, т.е.

$$g(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i=1}^d a_i |\eta_i|^\beta,$$

где константы $a_i \in \mathbb{R}$ таковы, что

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{d-m} < a_{d-m+1} = \dots = a_d = a, \quad a > 0.$$

Имеем $\alpha = \beta$. Поскольку

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{d-m} a_i |u_i|^\beta + a \sum_{i=d-m+1}^d |u_i|^\beta$$

и $a_i < a$ при $i \leq d - m$, то максимум функции $g(\mathbf{u})$ на множестве $\|\mathbf{u}\|_\beta = 1$ достигается в тех точках $\mathbf{u}$, где $|u_{d-m+1}|^\beta + \dots + |u_d|^\beta = 1$ и $u_1 = \dots = u_{d-m} = 0$, так что $\widehat{g} = a$.

Поэтому множество $\mathcal{M}$ размерности $m - 1$ представляет собой единичную сферу $\mathbb{S}_{m-1,\beta}$ в L_β . Следовательно, ввиду (4.11)

$$p_{\sum_{i=1}^d a_i |\eta_i|^\beta}(x) = C_3 x^{d/\beta - (d-m)/2 - 1} e^{-c_2 x/2a} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (7.1)$$

ПРИМЕР 4. Рассмотрим определитель случайной матрицы $A = [A_{ij}]_{i,j=1}^n$ порядка n , элементы A_{ij} которой независимы и имеют плотность (5.1). Определитель – это функция от A_{ij} :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n A_{i,\sigma_i},$$

где S_n – множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ и $\operatorname{sgn}(\sigma)$ обозначает знак $\sigma \in S_n$. Ясно, что определитель $g(A) := \det A$ является непрерывной однородной функцией порядка $\alpha = n$. В настоящем примере имеем $d = n^2$.

Определитель матрицы A равен (ориентированному) объему параллелепипеда, натянутого на векторы $\mathbf{A}_i := (A_{i1}, \dots, A_{in})$, $i = 1, \dots, n$. Если $\beta = 2$, то при ограничении

$$\sum_{i=1}^n \|\mathbf{A}_i\|^2 = 1,$$

максимальный объем параллелепипеда достигается на ортогональных векторах $\mathbf{A}_i$ одинаковой длины $\|\mathbf{A}_i\| = 1/\sqrt{n}$, т.е. для n -мерного куба со стороной длины $1/\sqrt{n}$. Следовательно,

$$\hat{g} := \max_{A: \sum_{i,j=1}^n A_{ij}^2 = 1} \det A = n^{-n/2}.$$

Многообразие, состоящее из всех точек достижения максимума $\hat{g}$ функции $g(A)$, $A \in \mathbb{S}_{n^2-1}$, можно описать как

$$\mathcal{M} := \left\{ A : \det A > 0, \|\mathbf{A}_1\| = \dots = \|\mathbf{A}_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ и } \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n \text{ ортогональны} \right\}$$

имеет размерность $m = (n^2 - n)/2$. Следовательно, (4.11) влечет, что

$$p_{\det A}(x) \sim C_4 x^{(n-1)/2 + 1/n - 1} e^{-c_2 n x^{2/n}} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (7.2)$$

Если $\beta \neq 2$, то при ограничении

$$\sum_{i=1}^n \|\mathbf{A}_i\|_\beta^\beta = 1$$

максимальный объем параллелепипеда достигается на ортогональных векторах $\mathbf{A}_i$ одинаковой L_β -длины $\|\mathbf{A}_i\|_\beta = 1/n^{1/\beta}$, координаты которых равны по модулю, т.е. для $|A_{ij}| = 1/n^{2/\beta}$. Следовательно,

$$\hat{g} := \max_{A: \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^\beta = 1} \det A = n^{n/2 - 2n/\beta}.$$

Многообразие, состоящее из всех точек достижения максимума $\hat{g}$ функции $g(A)$, $A \in \mathbb{S}_{n^2-1,\beta}$, имеет размерность $m = 0$. Поэтому ввиду (4.11)

$$p_{\det A}(x) \sim C_5 x^{n - ((n^2-1)/2n)\beta - 1} e^{-c_2 n^{2-\beta/2} x^{\beta/n}} \quad \text{при } x \rightarrow \infty. \quad (7.3)$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Том 2. Монодромия и асимптотики интегралов*, Наука, М., 1984.
- [2] E. Combet, *Intégrales Exponentielles. Développements Asymptotiques, Propriétés Lagrangiennes*, Lecture Notes in Math., **937**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [3] C. M. Bender, S. A. Orszag, *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. I. Asymptotic Methods and Perturbation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [4] М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1987.
- [5] О. Е. Трофимов, Д. Г. Фризен, “Коэффициенты асимптотического разложения интегралов по методу Лапласа”, *Автометрия*, **2** (1981), 94.
- [6] R. Wong, *Asymptotic Approximations of Integrals*, Computer Science and Scientific Computing, Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [7] N. Bleistein, R. A. Handelsman, *Asymptotic Expansions of Integrals*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1975.
- [8] W. Fulks, J. O. Sather, “Asymptotics. II. Laplace’s method for multiple integrals”, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 185–192.
- [9] J. Wojdylo, “Computing the coefficients in Laplace’s method”, *SIAM Rev.*, **48**:1 (2006), 76–96.
- [10] J. L. López, P. Pagola, E. Pérez Sinués, “A simplification of Laplace’s method: applications to the Gamma function and Gauss hypergeometric function”, *J. Approx. Theory*, **161** (2009), 280–291.
- [11] М. В. Федорюк, *Метод перевала*, Наука, М., 1977.
- [12] Ph. Barbe, *Approximation of Integrals over Asymptotic Sets with Applications to Probability and Statistics*, 2003, arXiv: math/0312132.
- [13] K. W. Breitung, *Asymptotic Approximations for Probability Integrals*, Lecture Notes in Math., **1592**, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [14] N. Wiener, “The homogeneous chaos”, *Amer. J. Math.*, **60**:4 (1938), 897–936.
- [15] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, М., 1979.
- [16] W.-D. Richter, “Generalized spherical and simplicial coordinates”, *J. Math. Anal. Appl.*, **336**:2 (2007), 1187–1202.
- [17] E. Hashorva, D. Korshunov, V. I. Piterbarg, “Asymptotic expansion of Gaussian chaos via probabilistic approach”, *Extremes*, 2015.
- [18] Д. А. Коршунов, В. И. Питербарг, Е. Хашорва, “Об экстремальных значениях гауссовского хаоса”, *Докл. РАН*, **452**:5 (2013), 483–485.
- [19] S. Foss, D. Korshunov, S. Zachary, *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*, Springer Ser. Oper. Res. Financ. Eng., Springer, New York, 2011.

Д. А. Коршунов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск;
Lancaster University, United Kingdom
E-mail: korshunov@math.nsc.ru

Поступило

10.04.2014

В. И. Питербарг

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: piter@mech.math.msu.su

Е. Хашорва

University of Lausanne, Switzerland
E-mail: enkelejd.hashorva@unil.ch