Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков, О построении биортогональных систем для подпространств, порожденных целочисленными сдвигами одной функции, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 470–472

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 14:15:01

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О построении биортогональных систем для подпространств, порожденных целочисленными сдвигами одной функции

Е. А. Киселев, Л. А. Минин, И. Я. Новиков

1. Введение. В различных областях математики и физики имеется широкий круг задач, приводящих к разложению по неортогональным наборам функций. При работе с ними часто применяют биортогональные системы, для которых также используются термины двойственные или дуальные системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([1; с. 7], [2; с. 19]). Функции $\varphi_k(t), \psi_m(t) \in L_2(\mathbb{R})$ образуют *биортогональную систему*, если для скалярных произведений этих функций выполнены соотношения

$$(\varphi_k, \psi_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(t) \cdot \overline{\psi_m(t)} dt = \delta_{km}, \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

В случае, когда $\varphi_k(t)$ представляют собой целочисленные сдвиги одной функции, достаточно найти функцию $\psi(t)$, удовлетворяющую соотношению

$$(\varphi_k, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t - k) \cdot \overline{\psi(t)} dt = \delta_{k0}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Тогда $\psi_m(t) = \psi(t - m)$ вместе с $\varphi_k(t) = \varphi(t - k)$ образуют искомую биортогональную систему. Назовем $\varphi(t)$ *базовой функцией*, а $\psi(t)$ – *базовой дуальной функцией*.

Предположим, что функции $\varphi(t - k)$, $k \in \mathbb{Z}$, образуют систему Рисса [1; с. 17], [2; с. 13]. Обозначим через H_φ подпространство $L_2(\mathbb{R})$, получающееся при замыкании линейной оболочки этих функций. Базовая дуальная функция определяется, вообще говоря, неоднозначно [1; с. 7]. Если $\psi(t) \in H_\varphi$, то обозначим ее как $\psi^{\text{in}}(t)$, если же $\psi(t) \notin H_\varphi$, то используем обозначение $\psi^{\text{out}}(t)$. Функция $\psi^{\text{in}}(t)$ определяется единственным образом и в образах Фурье для нее справедливо соотношение [3; с. 133]:

$$\hat{\psi}^{\text{in}}(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\omega + 2\pi k)|^2}. \quad (2)$$

Прямое и обратное преобразования Фурье, задаваемые формулами

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt, \quad \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

при такой нормировке являются унитарными операторами в $L_2(\mathbb{R})$.

Построение биортогональных систем в настоящей работе мы проводим для случая сдвигов функции Гаусса $\varphi(t) = \exp(-t^2/(2\sigma^2))$ и функции Лоренца $\varphi(t) = \sigma^2/(\sigma^2 + t^2)$. Эти системы сдвигов играют важную роль, например, при анализе атомных спектров [4; с. 23, с. 25]. Для всех величин, относящихся к функции Гаусса, в дальнейшем используется нижний индекс G , в случае функции Лоренца – индекс L .

2. Формулировка результатов. В случае функции Гаусса для базовой дуальной функции, принадлежащей H_φ , в монографии [5; с. 162] получено соотношение

$$\widehat{\psi}_G^{\text{in}}(\omega) = \frac{\exp(-\sigma^2 \omega^2 / 2)}{\sqrt{\pi} \theta_3(\omega/2, q)}, \quad q = \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\right), \quad (3)$$

где $\vartheta_3(t, q)$ – третья тета-функция Якоби [6; с. 389]:

$$\vartheta_3(t, q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{2ikt}, \quad |q| < 1.$$

В случае функции Лоренца нами получен следующий результат:

ТЕОРЕМА 1. *Справедливо равенство*

$$\widehat{\psi}_L^{\text{in}}(\omega) = \frac{2 \operatorname{sh}(2\sigma\pi) e^{-\sigma|\omega|}}{\sigma(2\pi)^{3/2} \operatorname{ch}(2\sigma(\omega \bmod 2\pi - \pi))}. \quad (4)$$

Обе формулы (3) и (4) получаются непосредственно из (2) после соответствующего преобразования ряда в знаменателе.

Для построения $\psi^{\text{out}}(t)$ предлагается следующий прием. Заменим в формуле (1) целое k действительной переменной x и рассмотрим функцию

$$\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-x) \cdot \overline{\psi(t)} dt. \quad (5)$$

При этом требуется, чтобы $\lambda(k) = \delta_{k0}$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\lambda(x)$ можно выбирать достаточно произвольно и получать при этом различные $\psi^{\text{out}}(t)$, решая уравнение типа свертки (5). Самым простым вариантом является $\lambda(x) = \operatorname{sinc}(\pi x)$, поскольку для функции отсчетов $\operatorname{sinc}(x)$ справедливо представление в виде бесконечного произведения [6; с. 41]

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

Обозначив через $\psi_{G,n}^{\text{out}}(t)$ и $\psi_{L,n}^{\text{out}}(t)$ базовые дуальные функции, получающиеся при выборе $\lambda(x) = \operatorname{sinc}^n(\pi x)$, приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы формулы*

$$\widehat{\psi}_{G,n}^{\text{out}}(\omega) = \frac{1}{2\sigma\pi} \exp\left(\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}\right) \cdot B_n\left(\frac{\omega}{2\pi} + \frac{n}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

$$\widehat{\psi}_{L,n}^{\text{out}}(\omega) = \frac{2}{\sigma(2\pi)^{3/2}} \cdot e^{\sigma|\omega|} \cdot B_n\left(\frac{\omega}{2\pi} + \frac{n}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где $B_n(x)$ – базисный сплайн порядка n [3; с. 44].

Применяя обратное преобразование Фурье, в некоторых случаях можно получить аналитические выражения и для самих $\psi^{\text{out}}(t)$. Например, для функции Лоренца при $n = 1$ имеет место равенство

$$\psi_{L,1}^{\text{out}}(t) = \frac{e^{\sigma\pi}}{\sigma\pi^2} \cdot \frac{\sigma \cos \pi t + t \sin \pi t - \sigma e^{-\sigma\pi}}{\sigma^2 + t^2}.$$

Выбирая

$$\lambda(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right) \cdot \operatorname{sinc}(\pi x)$$

в случае функции Гаусса и

$$\lambda(x) = \frac{s^2}{s^2 + x^2} \cdot \operatorname{sinc}(\pi x)$$

в случае функции Лоренца, получим другие семейства базовых дуальных функций, которые мы обозначим через $\psi_{G,s}^{\text{out}}(t)$ и $\psi_{L,s}^{\text{out}}(t)$ соответственно.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $s > \sigma$. Тогда справедливы формулы

$$\hat{\psi}_{G,s}^{\text{out}}(\omega) = \frac{\exp(\sigma^2 \omega^2 / 2)}{4\sigma\pi} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{s(\omega + \pi)}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{s(\omega - \pi)}{\sqrt{2}}\right) \right), \quad (8)$$

$$\hat{\psi}_{L,s}^{\text{out}}(\omega) = \begin{cases} \frac{2e^{\sigma|\omega|}}{\sigma(2\pi)^{3/2}} (1 - e^{-s\pi} \cdot \operatorname{ch}(s\omega)), & |\omega| \leq \pi; \\ \frac{2e^{\sigma|\omega|}}{\sigma(2\pi)^{3/2}} \operatorname{sh}(s\pi) \cdot e^{-s|\omega|}, & |\omega| > \pi, \end{cases} \quad (9)$$

где $\operatorname{erf}(x)$ – функция ошибок [6; с. 120].

3. Обсуждение результатов. Наличие явных формул для биортогональных систем позволяет получать более эффективные вычислительные алгоритмы. Неоднозначность выбора базовой дуальной функции является характерной чертой любого конечномерного приближения. Следует, на наш взгляд, использовать это обстоятельство, оптимизируя выбор параметров под конкретную задачу. Для двух рассматриваемых классов функций формулы (6)–(9) предоставляют широкий выбор.

Особую роль играет параметр σ . Резкий рост степени неустойчивости в задачах интерполяции с ростом σ описан в [7]. Аналогичный эффект наблюдается и в нашем случае. Продемонстрируем это на примере формулы (6) при $n = 1$:

$$\hat{\psi}_{G,1}^{\text{out}}(\omega) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}\right) \cdot \chi_{[-\pi, \pi]}(\omega). \quad (10)$$

Из-за наличия в правой части (10) характеристической функции отрезка $[-\pi, \pi]$ следует, что $\hat{\psi}_{G,1}^{\text{out}}(\omega)$ достигает максимума при $\omega = \pi$. Уже при $\sigma = 2$ значение $\exp(\sigma^2 \pi^2 / 2)$ составляет величину порядка 10^8 , а при $\sigma = 3$ – порядка 10^{19} . Следовательно, наблюдается усиление высокочастотных компонент, что и влечет за собой неустойчивость. А если вернуться в пространство исходных функций (выполнить обратное преобразование Фурье), то базовая дуальная функция будет сильно осциллирующей.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999. [2] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005. [3] Ч. Чуи, *Введение в вэйвлеты*, Мир, М., 2001. [4] А. И. Дробышев, *Основы атомного спектрального анализа*, Изд-во С.-Петербургск. ун-та, СПб., 1997. [5] V. Maz'ya, G. Schmidt, *Approximate Approximations*, Math. Surveys Monogr., 141, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007. [6] *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, ред. М. Абрамовиц, И. Стиган, Наука, М., 1979. [7] M. V. Zhuravlev, E. A. Kiselev, L. A. Minin, S. M. Sitnik, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 173:2 (2011), 231–241.

Е. А. Киселев

Воронежский государственный университет

E-mail: evg-kisel2006@yandex.ru

Поступило

17.04.2014

Л. А. Минин

Воронежский государственный университет

E-mail: mininla@mail.ru

И. Я. Новиков

Воронежский государственный университет

E-mail: igor.nvk@gmail.com