Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Асхабов, Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 5, 643–654

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10489>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:49:00

Нелинейные уравнения типа свертки в пространствах Лебега

С. Н. Асхабов

Методами теории монотонных операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках нормы решения для различных классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки в вещественных пространствах Лебега $L_p(0, 1)$. Эти теоремы охватывают нелинейные уравнения с ядрами типа потенциала, в том числе и логарифмического потенциала, а также, в рамках пространства $L_2(0, 1)$, соответствующие линейные интегральные уравнения. Приведены следствия, иллюстрирующие полученные результаты.

Библиография: 11 названий.

DOI: 10.4213/mzm10489

1. Введение. В монографии [1] изучены различные классы нелинейных интегральных уравнений типа свертки как на конечном (в периодическом случае), так и на бесконечном промежутке интегрирования. Существенную роль при этом играет свойство положительности (по Бохнеру) оператора типа свертки, которое обеспечивается условием неотрицательности дискретного (в периодическом случае, когда промежутком интегрирования является отрезок $[-\pi, \pi]$) или интегрального (в случае, когда промежутком интегрирования является вся действительная ось или полуось) косинус-преобразования Фурье его ядра. В случае отрезка $[-\pi, \pi]$ примерами таких ядер могут служить некоторые выпуклые вниз функции. В рассматриваемом здесь случае отрезка $[0, 1]$ при исследовании нелинейных интегральных уравнений типа свертки возникают дополнительные трудности, связанные по сути дела с тем, что для положительности оператора типа свертки в пространстве $L_p(0, 1)$ выпуклости вниз его ядра уже не достаточно. При дополнительных ограничениях на ядра рассматриваемых уравнений в данной работе методом монотонных операторов доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений для различных классов нелинейных интегральных уравнений типа свертки в вещественных пространствах Лебега $L_p(0, 1)$ при любых $p \in (1, \infty)$ и приведены следствия, иллюстрирующие полученные результаты. Ранее подобные теоремы были доказаны, в зависимости от рассматриваемого класса нелинейных уравнений, либо только при $p \in (1, 2]$, либо только при $p \in [2, \infty)$ (см. [1; гл. III]). В отличие от [2], [3] и других работ, наше исследование нелинейных уравнений проводится без предположения о том, что линейный интегральный оператор (в данном случае оператор типа

свертки) заведомо является положительным и либо не использует коэрцитивность оператора Немыцкого F (теорема 2), либо основано на обращении этого оператора и установлении коэрцитивности обратного к нему оператора F^{-1} (теорема 3).

2. О положительности оператора свертки. Известно (см., например, [4]), что если вещественная функция $f(x)$ выпукла вниз в интервале $(0, 2\pi)$, то ее коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \geq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\mathbb{N}$ есть множество всех натуральных чисел. Если же рассматривать функцию $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ и продолжить ее четным образом на отрезок $[-1, 0]$, то для неотрицательности соответствующих коэффициентов Фурье

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(\pi nx) dx$$

выпуклости вниз этой функции уже не достаточно. Например, для $f(x) = x^2$ при нечетных n выполняется строгое неравенство $a_n < 0$. В этой связи представляет интерес следующая лемма, играющая ниже важную роль при доказательстве положительности оператора свертки.

ЛЕММА 1. Если $f(x) \in C[0, 1]$ невозрастающая выпуклая вниз функция, то для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(\pi nx) dx \geq 0, \quad (2.1)$$

причем $a_n > 0$, если $f(x)$ строго выпуклая вниз убывающая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай нечетных n . Воспользуемся следующей формулой, доказанной в монографии Нахушева [5]:

$$\begin{aligned} a_n = \frac{2}{\pi n} & \left\{ F\left(\frac{\pi}{2} x_1 + \pi(n-1)\right) - F\left(\frac{\pi}{2} (x_2 + 1) + \pi(n-1)\right) \right. \\ & + \sum_{k=0}^{(n-3)/2} \left[F\left(\frac{\pi}{2} x_2 + \frac{4k+3}{2} \pi\right) - F\left(\frac{\pi}{2} x_2 + \frac{4k+1}{2} \pi\right) \right. \\ & \left. \left. - F\left(\frac{\pi}{2} x_1 + (2k+1)\pi\right) + F\left(\frac{\pi}{2} x_1 + 2k\pi\right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $n \equiv 1 \pmod{2}$, $F(x) = f(x/(\pi n))$, $x \in [0, \pi n]$, а $x_1, x_2 \in (0, 1)$ – некоторые числа, существование которых вытекает из теоремы о среднем значении интеграла (подробнее см. [5; с. 40]). Так как функция $F(x)$ выпукла вниз, то (см., например, [4])

$$F(z_2 + h) - F(z_2) \geq F(z_1 + h) - F(z_1), \quad h > 0,$$

если $z_2 > z_1$. Выбрав $h = \pi$ и

$$z_2 = \frac{\pi}{2} x_2 + \frac{4k+1}{2} \pi > \frac{\pi}{2} + 2k\pi > \frac{\pi}{2} x_1 + 2k\pi = z_1,$$

имеем

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{2}x_2 + \frac{4k+3}{2}\pi\right) - F\left(\frac{\pi}{2}x_2 + \frac{4k+1}{2}\pi\right) \\ \geq F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + (2k+1)\pi\right) - F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + 2\pi k\right). \end{aligned}$$

Далее, так как $x_1 < x_2 + 1$, то

$$F\left(\frac{\pi}{2}x_1 + \pi(n-1)\right) \geq F\left(\frac{\pi}{2}(x_2 + 1) + \pi(n-1)\right),$$

поскольку функция $F(x)$ является невозрастающей. Учитывая последние два неравенства для функции $F(x)$, из приведенной выше формулы для a_n непосредственно получаем, что $a_n \geq 0$ для всех нечетных n . Кроме того, из этой формулы следует также, что $a_n > 0$, если $f(x)$ строго выпуклая вниз убывающая функция.

Рассмотрим теперь случай четных n . Покажем, что в этом случае для выполнения неравенства (2.1) достаточно выпуклости вниз функции $f(x)$, т.е. условие невозрастания функции $f(x)$ излишне. В самом деле, так как

$$a_{2m} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \cos(mt) dt,$$

где $h(x) = f(x/(2\pi))$ есть выпуклая вниз на отрезке $[0, 2\pi]$ функция, то в силу формулы

$$\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t) \cos(mt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^{\pi/2m} \left\{ h\left(\frac{2k\pi}{m} + t\right) - h\left(\frac{2k\pi}{m} + \frac{\pi}{m} + t\right) - h\left(\frac{2k\pi}{m} + \frac{\pi}{m} - t\right) \right. \\ &\quad \left. + h\left(\frac{2k\pi}{m} + \frac{2\pi}{m} - t\right) \right\} \cos(mt) dt \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

доказанной в [4], получаем, что $a_n \geq 0$ при любом четном n . Кроме того, из этой формулы непосредственно вытекает, что $a_n > 0$, если $f(x)$, а значит, и $h(x)$, строго выпуклая вниз функция, так как такая функция не может быть линейной ни в каком интервале.

Лемма 1 доказана.

В связи с леммой 1 заметим, что в случае, когда функция $f(x)$ является непрерывной, четной и неотрицательной в промежутке $(-\pi, \pi)$, убывающей и выпуклой вниз на отрезке $[0, \pi]$, дополнительная информация о ее коэффициентах Фурье содержится в [6; с. 34].

Следует также отметить, что при более жестких ограничениях (неотрицательность и непрерывная дифференцируемость функции $f(x)$) лемма 1, в связи с приложениями в дробном (интегральном и дифференциальном) исчислении, была доказана другим путем в [5], где также доказано, что оператор типа свертки

$$(P_{01}^\varphi u)(x) = \int_0^1 \varphi(|x-t|)u(t) dt, \quad x \in [0, 1],$$

с ядром $\varphi(x)$, удовлетворяющим условию *монотонности* **М**, т.е.

$$\begin{aligned} \varphi(x) \in C^1(0, 1], \quad \varphi(x) \geq 0, \quad \int_0^1 \varphi(x) dx < \infty, \\ \varphi(x_1) \geq \varphi(x_2), \quad \varphi'(x_1) < \varphi'(x_2), \quad x_1 < x_2, \end{aligned}$$

является строго положительным в пространстве $L_2(0, 1)$. Ниже доказывается положительность оператора P_{01}^φ с ядром $\varphi(x)$, удовлетворяющим менее жестким условиям леммы 1 (т.е. без предположения о неотрицательности и непрерывной дифференцируемости функции $\varphi(x)$) в более широких пространствах Лебега $L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$.

Для упрощения записей введем следующие обозначения:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad \langle u, v \rangle = \int_0^1 u(x)v(x) dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что $\varphi(x) \in \Omega(0, 1]$, если $\varphi(x)$ – непрерывная невозрастающая выпуклая вниз в промежутке $(0, 1]$ функция такая, что $\int_0^1 \varphi(x) dx \geq 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \varphi(x) \in L_{p'/2}(0, 1) \cap \Omega(0, 1], \quad \text{если } 1 < p \leq 2, \\ \varphi(x) \in L_1(0, 1) \cap \Omega(0, 1], \quad \text{если } 2 < p < \infty. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Тогда оператор типа свертки P_{01}^φ действует непрерывно из пространства $L_p(0, 1)$ в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(0, 1)$, $p' = p/(p-1)$, и положителен, причем для всех $u(x) \in L_p(0, 1)$ справедливы неравенства

$$\|P_{01}^\varphi u\|_{p'} \leq c(\varphi) \|u\|_p, \quad (2.3)$$

$$\langle P_{01}^\varphi u, u \rangle = \frac{a_0}{2} \left(\int_0^1 u(x) dx \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left| \int_0^1 u(x) e^{i\pi n x} dx \right|^2 \geq 0, \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos(\pi n x) dx \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ c(\varphi) = \begin{cases} 2^{2/p'} \|\varphi\|_{p'/2}, & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ 2 \|\varphi\|_1, & \text{если } 2 < p < \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим сначала случай $1 < p \leq 2$. В силу неравенства Гёльдера имеем

$$|(P_{01}^\varphi u)(x)| \leq \left(\int_0^1 |\varphi(|x-t|)|^{p'/2} dt \right)^{1/p'} \left(\int_0^1 |\varphi(|x-t|)|^{p/2} |u(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Так как

$$\int_0^1 |\varphi(|x-t|)|^{p'/2} dt = \int_0^x |\varphi(s)|^{p'/2} ds + \int_x^{1-x} |\varphi(s)|^{p'/2} ds \leq 2 \int_0^1 |\varphi(s)|^{p'/2} ds,$$

то

$$|(P_{01}^\varphi u)(x)| \leq 2^{1/p'} \|\varphi\|_{p'/2}^{1/2} \left(\int_0^1 |\varphi(|x-t|)|^{p/2} |u(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Поэтому, применяя обобщенное интегральное неравенство Минковского (см., например, [1]), получаем

$$\begin{aligned} \|P_{01}^\varphi u\|_{p'} &\leq 2^{1/p'} \|\varphi\|_{p'/2}^{1/2} \left[\left(\int_0^1 \left| \int_0^1 |\varphi(|x-t|)|^{p/2} |u(t)|^p dt \right|^{p'/p} dx \right)^{p/p'} \right]^{1/p} \\ &\leq 2^{1/p'} \|\varphi\|_{p'/2}^{1/2} \left[\int_0^1 \left(\int_0^1 |\varphi(|x-t|)|^{p/2} |u(t)|^{p'} dx \right)^{p/p'} dt \right]^{1/p} \\ &\leq 2^{2/p'} \|\varphi\|_{p'/2} \|u\|_p, \end{aligned}$$

поскольку

$$\int_0^1 \left| \varphi(|x-t|) \right|^{p'/2} dx \leq 2 \|\varphi\|_{p'/2}^{p'/2}.$$

Значит, оператор P_{01}^φ действует непрерывно из $L_p(0,1)$ в $L_{p'}(0,1)$, причем справедливо неравенство (2.3). Докажем его положительность (ср. [5]). Положим

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi(x+\varepsilon) & \text{при } 0 \leq x \leq 1-\varepsilon, \\ \varphi(1) & \text{при } 1-\varepsilon < x \leq 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ достаточно малое число. Очевидно, что функция $f_\varepsilon(x)$ удовлетворяет всем требованиям леммы 1 и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \varphi(x)$. Продолжим функцию $f_\varepsilon(x)$ на отрезок $[-1,0]$ четным образом. По теореме Дирихле имеем

$$f_\varepsilon(x) = \frac{a_0^\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\varepsilon \cos(\pi n x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.7)$$

где

$$a_n^\varepsilon = 2 \int_0^1 f_\varepsilon(x) \cos(\pi n x) dx.$$

Так как $\varphi(x) \in \Omega(0,1]$, то

$$a_0^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_0^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_0^1 f_\varepsilon(x) dx = 2 \int_0^1 \varphi(x) dx \geq 0$$

и в силу неравенства (2.1) имеем $a_n^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_n^\varepsilon \geq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для любого $u(x) \in L_p(0,1)$, с учетом равенства (2.7), выполнено

$$\begin{aligned} \langle P_{01}^\varphi u, u \rangle &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \varphi(|x-t|) u(t) dt \right) u(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \left(\int_0^1 f_\varepsilon(|x-t|) u(t) dt \right) u(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \left(\frac{a_0^\varepsilon}{2} \int_0^1 u(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^\varepsilon \int_0^1 \cos(\pi n |x-t|) u(t) dt \right) u(x) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{a_0^0}{2} \left(\int_0^1 u(x) dx \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \left[\left(\int_0^1 u(x) \cos(\pi n x) dx \right)^2 + \left(\int_0^1 u(x) \sin(\pi n x) dx \right)^2 \right].$$

Следовательно,

$$\langle P_{01}^\varphi u, u \rangle = \frac{a_0^0}{2} \left(\int_0^1 u(x) dx \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^0 \left| \int_0^1 u(x) e^{i\pi n x} dx \right|^2 \geq 0,$$

т.е. оператор P_{01}^φ является положительным и выполнено неравенство (2.4).

2) Пусть теперь $2 < p < \infty$. Тогда справедливы непрерывные плотные вложения $L_p(0, 1) \subset L_2(0, 1) \subset L_{p'}(0, 1)$, причем

$$\|u\|_{p'} \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_p \quad \text{для всех } u(x) \in L_p(0, 1). \quad (2.8)$$

Из неравенства (2.3), доказанного выше для всех $p \in (1, 2]$, следует (при $p = 2$), что

$$\|P_{01}^\varphi u\|_2 \leq 2\|\varphi\|_1 \cdot \|u\|_2 \quad \text{для всех } u(x) \in L_2(0, 1). \quad (2.9)$$

Поэтому для любой функции $u(x) \in L_p(0, 1)$, $2 < p < \infty$, в силу неравенств (2.8) и (2.9) имеем

$$\|P_{01}^\varphi u\|_{p'} \leq \|P_{01}^\varphi u\|_2 \leq 2\|\varphi\|_1 \cdot \|u\|_2 \leq 2\|\varphi\|_1 \cdot \|u\|_p, \quad (2.10)$$

т.е. доказываемое неравенство (2.3) справедливо и для всех $p \in (2, \infty)$.

Далее, с учетом вложения $L_p(0, 1) \subset L_2(0, 1)$, неравенства (2.9) и доказанного в п. 1) свойства положительности оператора P_{01}^φ в $L_2(0, 1)$ получаем

$$\langle P_{01}^\varphi u, u \rangle = (P_{01}^\varphi u, u) \geq 0 \quad \text{для всех } u(x) \in L_p(0, 1),$$

где круглые скобки означают скалярное произведение в $L_2(0, 1)$.

Лемма 2 полностью доказана.

Заметим, что функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{при } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1/2 - x & \text{при } 1/2 < x \leq 1, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям лемм 1 и 2, но не удовлетворяет условию монотонности М (она меняет знак и не дифференцируема в точке $x = 1/2$).

Аналогично доказывается следующая лемма, двойственная лемме 2.

ЛЕММА 3. Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in L_1(0, 1) \cap \Omega(0, 1], & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ \varphi(x) &\in L_{p/2}(0, 1) \cap \Omega(0, 1], & \text{если } 2 < p < \infty. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Тогда оператор типа свертки P_{01}^φ действует непрерывно из $L_{p'}(0, 1)$ в $L_p(0, 1)$ и положителен, причем для всех $u(x) \in L_{p'}(0, 1)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|P_{01}^\varphi u\|_p &\leq c^*(\varphi) \|u\|_{p'}, \\ \langle P_{01}^\varphi u, u \rangle &= \frac{a_0}{2} \left(\int_0^1 u(x) dx \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left| \int_0^1 u(x) e^{i\pi n x} dx \right|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

где

$$a_n = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos(\pi n x) dx \geq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$c^*(\varphi) = \begin{cases} 2\|\varphi\|_1, & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ 2^{2/p}\|\varphi\|_{p/2}, & \text{если } 2 < p < \infty. \end{cases}$$

3. Теоремы существования и единственности. Оценки решений. Основным объектом исследования в данной статье являются нелинейные интегральные уравнения типа свертки вида

$$\lambda \cdot F(x, u(x)) + \int_0^1 \varphi(|x-t|)u(t) dt = f(x), \quad (3.1)$$

$$u(x) + \lambda \cdot \int_0^1 \varphi(|x-t|)F(t, u(t)) dt = f(x), \quad (3.2)$$

$$u(x) + \lambda \cdot F\left(x, \int_0^1 \varphi(|x-t|)u(t) dt\right) = f(x), \quad (3.3)$$

где λ есть вещественный параметр, а нелинейность $F(x, u)$ определена при $x \in [0, 1]$, $u \in (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям Каратеодори [2]: она измерима по x при каждом фиксированном u и непрерывна по u почти для всех x . Обозначим через F порожденный функцией $F(x, u)$ оператор суперпозиции (оператор Немыцкого)

$$(Fu)(x) = F(x, u(x)),$$

а через $L_p^+(0, 1)$ – множество всех неотрицательных функций из $L_p(0, 1)$. В зависимости от рассматриваемого класса уравнений (3.1)–(3.3) будем предполагать, что нелинейность $F(x, u)$ для почти всех $x \in [0, 1]$ и всех $u \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет либо условиям

- 1) $|F(x, u)| \leq c(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, где $c(x) \in L_{p'}^+(0, 1)$, $d_1 > 0$;
- 2) $F(x, u)$ не убывает по u почти при каждом фиксированном $x \in [0, 1]$;
- 3) $F(x, u) \cdot u \geq d_2 \cdot |u|^p - D(x)$, где $D(x) \in L_1^+(0, 1)$, $d_2 > 0$;

либо условиям

- 4) $|F(x, u)| \leq g(x) + d_3 \cdot |u|^{1/(p-1)}$, где $g(x) \in L_p^+(0, 1)$, $d_3 > 0$;
- 5) $F(x, u)$ строго возрастает по u почти при каждом фиксированном $x \in [0, 1]$;
- 6) $F(x, u) \cdot u \geq d_4 \cdot |u|^{p/(p-1)} - D(x)$, где $D(x) \in L_1^+(0, 1)$, $d_4 > 0$.

Пусть X есть вещественное банахово пространство и X^* – сопряженное с ним пространство. Обозначим через $\langle y, x \rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$. В частности, если X есть гильбертово пространство H , то $\langle y, x \rangle$ совпадает со скалярным произведением (x, y) , где $x, y \in H$. Будем далее придерживаться терминологии и обозначений, принятых в монографии [3].

Рассмотрим сначала наиболее простое для исследования методом монотонных операторов нелинейное интегральное уравнение типа свертки (3.1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (2.2). Если нелинейность $F(x, u)$ удовлетворяет условиям 1)–3), то при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_{p'}(0, 1)$ уравнение (3.1) имеет решение $u^*(x) \in L_p(0, 1)$. Это решение единственно, если вместо условия 2) выполнено условие 5). Кроме того, если в условии 3)

$D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^*\|_p \leq (\lambda^{-1} d_2^{-1} \|f\|_{p'})^{1/(p-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем данное уравнение (3.1) в операторном виде:

$$Au = f, \quad \text{где} \quad Au = \lambda \cdot Fu + P_{01}^\varphi u.$$

В силу леммы 2 и условий 1)–3) получаем, что оператор A действует непрерывно из $L_p(0, 1)$ в $L_{p'}(0, 1)$ и является монотонным и коэрцитивным. При этом оператор A является строго монотонным, если функция $F(x, u)$ строго возрастает по u , т.е. если выполнено условие 5). Поэтому утверждения о существовании и единственности решения вытекают из теоремы Браудера–Минти (см., например, [3]). Наконец, используя условие 3) при $D(x) = 0$, положительность оператора P_{01}^φ и равенство $Au^* = f$, имеем

$$\lambda d_2 \|u^*\|_p^p \leq \lambda \langle Fu^*, u^* \rangle \leq \lambda \langle Fu^*, u^* \rangle + \langle P_{01}^\varphi u^*, u^* \rangle = \langle Au^*, u^* \rangle = \langle f, u^* \rangle \leq \|f\|_{p'} \|u^*\|_p,$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть ядро $\varphi(x) \in L_2(0, 1) \cap \Omega(0, 1]$. Тогда при любых $\lambda > 0$ и $f(x) \in L_4(0, 1)$ уравнение

$$\lambda \cdot u^{1/3}(x) + \int_0^1 \varphi(|x-t|)u(t) dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{4/3}(0, 1)$, причем

$$\|u^*\|_{4/3} \leq (\lambda^{-1} \|f\|_4)^3.$$

Рассмотрим теперь нелинейное интегральное уравнение типа свертки (3.2), являющееся частным случаем нелинейного уравнения типа Гаммерштейна. В отличие от теоремы 1, в следующей теореме существование и единственность решения доказывается без условия коэрцитивности 3) нелинейности $F(x, u)$ и на ядро $\varphi(x)$ вместо условия (2.2) накладывается условие (2.11).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (2.11). Если нелинейность $F(x, u)$ удовлетворяет условиям 1) и 2), то при любых $\lambda \geq 0$ и $f(x) \in L_p(0, 1)$ уравнение (3.2) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(0, 1)$. Кроме того, если выполнены условия 1) и 3) при $c(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^*\|_p \leq d_1 d_2^{-1} \|f\|_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda = 0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. Запишем уравнение (3.2) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot P_{01}^\varphi Fu = f.$$

Из условий 1) и 2) вытекает, что оператор F действует непрерывно из $L_p(0, 1)$ в $L_{p'}(0, 1)$ и является монотонным, а из условия (2.11) в силу леммы 3 вытекает,

что оператор P_{01}^φ действует непрерывно из $L_{p'}(0, 1)$ обратно в $L_p(0, 1)$ и положителен. Но тогда по теореме 3 из [7] данное уравнение имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(0, 1)$.

Осталось доказать оценку нормы решения $u^*(x)$. Используя условия 1) и 3) при $c(x) = D(x) = 0$, положительность оператора P_{01}^φ и равенство

$$u^* + \lambda \cdot P_{01}^\varphi F u^* = f,$$

имеем

$$d_2 \|u^*\|_p^p \leq \langle u^*, F u^* \rangle + \lambda \langle P_{01}^\varphi F u^*, F u^* \rangle = \langle f, F u^* \rangle \leq \|f\|_p \|F u^*\|_{p'} \leq d_1 \|f\|_p \|u^*\|_p^{p-1},$$

откуда непосредственно вытекает доказываемая оценка.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть ядро $\varphi(x) \in L_2(0, 1) \cap \Omega(0, 1]$. Тогда при любых $\lambda \geq 0$ и $f(x) \in L_4(0, 1)$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot \int_0^1 \varphi(|x - t|) u^3(t) dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_4(0, 1)$, причем

$$\|u^*\|_4 \leq \|f\|_4.$$

Более трудными для исследования методом монотонных операторов являются нелинейные интегральные уравнения типа свертки вида (3.3). В следующей теореме, в отличие от теорем 1 и 2, на нелинейность $F(x, u)$ накладываются условия 4)–6). Самостоятельный интерес представляет также приводимое ниже доказательство единственности решения уравнения (3.3), позволяющее не выяснять вопрос о том существуют ли нетривиальные решения у линейного однородного уравнения первого рода $P_{01}^\varphi u = 0$ в пространстве $L_p(0, 1)$ при $1 < p < \infty$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $1 < p < \infty$ и ядро $\varphi(x)$ удовлетворяет условию (2.2). Если нелинейность $F(x, u)$ удовлетворяет условиям 4)–6), то при любых $\lambda \geq 0$ и $f(x) \in L_p(0, 1)$ уравнение (3.3) имеет единственное решение $u^*(x) \in L_p(0, 1)$. Кроме того, если условия 4) и 6) выполнены при $g(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^* - f\|_p \leq \lambda (d_3^p d_4^{-1} c(\varphi) \|f\|_p)^{1/(p-1)},$$

где $c(\varphi)$ определено в (2.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\lambda = 0$ утверждения теоремы очевидны, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. В силу леммы 1 оператор P_{01}^φ действует из $L_p(0, 1)$ в $L_{p'}(0, 1)$, непрерывен и положителен. Из условий 4)–6) вытекает, что оператор F действует обратно из $L_{p'}(0, 1)$ в $L_p(0, 1)$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, по лемме 2.1 из [1] оператор F имеет обратный F^{-1} , который действует из $L_p(0, 1)$ в $L_{p'}(0, 1)$, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен, причем

$$\lim_{\|v\|_p \rightarrow \infty} \langle F^{-1}v, v \rangle \cdot \|v\|_p^{-1} = \infty.$$

Запишем уравнение (3.3) в операторном виде:

$$u + \lambda \cdot FP_{01}^\varphi u = f.$$

Полагая в нем $f - u = \lambda \cdot v$ и применяя затем к обеим частям получившегося уравнения обратный оператор F^{-1} , приходим к уравнению

$$\Phi v = P_{01}^\varphi f, \quad \text{где} \quad \Phi v = F^{-1}v + \lambda \cdot P_{01}^\varphi v. \quad (3.4)$$

В силу указанных свойств операторов F^{-1} и P_{01}^φ , оператор Φ действует из $L_p(0, 1)$ в $L_{p'}(0, 1)$, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен, причем

$$\frac{\langle \Phi v, v \rangle}{\|v\|_p} \geq \frac{\langle F^{-1}v, v \rangle}{\|v\|_p} \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \|v\|_p \rightarrow \infty.$$

Значит, по теореме Браудера–Минти уравнение (3.4) имеет единственное решение $v^*(x) \in L_p(0, 1)$. Но тогда уравнение (3.3) имеет решение

$$u^* = f - \lambda \cdot v^* \in L_p(0, 1).$$

Покажем, что это решение u^* единственно. Предположим противное, т.е. что уравнение (3.3) имеет два различных решения $u_1, u_2 \in L_p(0, 1)$. Тогда справедливы равенства

$$u_1 + \lambda \cdot FP_{01}^\varphi u_1 = f, \quad u_2 + \lambda \cdot FP_{01}^\varphi u_2 = f \quad (3.5)$$

Из (3.5) путем вычитания первого равенства из второго имеем

$$u_2 - u_1 + \lambda \cdot FP_{01}^\varphi u_2 - \lambda \cdot FP_{01}^\varphi u_1 = 0$$

и, значит,

$$\langle u_2 - u_1 + \lambda \cdot FP_{01}^\varphi u_2 - \lambda \cdot FP_{01}^\varphi u_1, P_{01}^\varphi u_2 - P_{01}^\varphi u_1 \rangle = 0$$

или

$$\langle u_2 - u_1, P_{01}^\varphi u_2 - P_{01}^\varphi u_1 \rangle + \lambda \cdot \langle FP_{01}^\varphi u_2 - FP_{01}^\varphi u_1, P_{01}^\varphi u_2 - P_{01}^\varphi u_1 \rangle = 0.$$

Но последнее равенство невозможно, так как первое слагаемое в левой части неотрицательно в силу положительности оператора P_{01}^φ , а второе слагаемое строго положительно в силу строгой монотонности оператора F и того, что $P_{01}^\varphi u_1 \neq P_{01}^\varphi u_2$. В самом деле, если $P_{01}^\varphi u_1 = P_{01}^\varphi u_2$, то из (3.5) следует, что

$$u_1 + \lambda \cdot FP_{01}^\varphi u_2 = f, \quad u_2 + \lambda \cdot FP_{01}^\varphi u_2 = f,$$

откуда, приравнявая левые части, получаем $u_1 = u_2$, что противоречит тому, что u_1 и u_2 различны.

Осталось доказать оценку нормы решения. Положим $\psi = F^{-1}v^*$. Тогда $F\psi = v^*$. Так как

$$F^{-1}v^* + \lambda \cdot P_{01}^\varphi v^* = P_{01}^\varphi f,$$

с учетом леммы 2 и равенств $g(x) = D(x) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} d_4 \|\psi\|_{p'}^{p'} &\leq \langle F\psi, \psi \rangle = \langle v^*, F^{-1}v^* \rangle \leq \langle v^*, F^{-1}v^* \rangle + \lambda \langle v^*, P_{01}^\varphi v^* \rangle = \langle F\psi, P_{01}^\varphi f \rangle \\ &\leq \|F\psi\|_p \|P_{01}^\varphi f\|_{p'} \leq c(\varphi) \|F\psi\|_p \|f\|_p \leq c(\varphi) d_3 \|\psi\|_{p'}^{p'-1} \|f\|_p. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\psi\|_{p'} \leq d_3 d_4^{-1} c(\varphi) \|f\|_p. \quad (3.6)$$

Так как $\|v^*\|_p = \|F\psi\|_p \leq d_3 \|\psi\|_{p'}^{p'-1}$ и $v^* = \lambda^{-1}(f - u^*)$, то

$$\|f - u^*\|_p \leq \lambda d_3 \|\psi\|_{p'}^{1/(p-1)},$$

откуда с учетом неравенства (3.6) получаем доказываемую оценку нормы решения.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть ядро $\varphi(x) \in L_2(0, 1) \cap \Omega(0, 1]$. Тогда при любых $\lambda \geq 0$ и $f(x) \in L_{4/3}(0, 1)$ уравнение

$$u(x) + \lambda \cdot \left(\int_0^1 \varphi(|x-t|) u(t) dt \right)^3 = f(x)$$

имеет единственное решение $u^*(x) \in L_{4/3}(0, 1)$ и

$$\|u^* - f\|_{4/3} \leq 2^{3/2} \lambda \cdot \|\varphi\|_2^3 \|f\|_{4/3}^3.$$

При $\varphi(x) = x^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$, оператор типа свертки P_{01}^φ совпадает с оператором типа потенциала (потенциалом Рисса) I_{01}^φ на отрезке $[0, 1]$, а при $\varphi(x) = -\ln x$ он совпадает с логарифмическим потенциалом (см., например, [5]). Следовательно, теоремы 1–3 охватывают, в частности, соответствующие нелинейные интегральные уравнения с ядрами типа потенциала и нелинейные уравнения с логарифмическими потенциалами.

Из оценок для норм решений, приведенных в теоремах 1–3, непосредственно вытекает, что при условиях этих теорем однородные уравнения ($f(x) = 0$), соответствующие неоднородным уравнениям (3.1)–(3.3), имеют лишь нулевое (тривиальное) решение $u^*(x) = 0$.

Заметим, что в случае нелинейных сингулярных интегральных уравнений, имеющих вид (3.1)–(3.3) (и нелинейных уравнений типа свертки на всей оси и полуоси [8], [9]), подобные результаты удастся получать [8], [10] либо только при $p \in (1, 2]$, либо только при $p \in [2, \infty)$, что связано по сути дела с тем, что сингулярный оператор (преобразование Гильберта) является кососимметрическим и для пространств $L_p(-\infty, \infty)$ не выполняются вложения в зависимости от показателя p .

В связи со следствиями 1–3 отметим, что решения интегральных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью можно разыскивать также методом весовых метрик (аналог метода Белецкого) в конусах пространства непрерывных функций (см., например, [11]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Асхабов, *Нелинейные уравнения типа свертки*, Физматлит, М., 2009.
- [2] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, М., 1972.
- [3] Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.
- [4] Г. Х. Харди, В. В. Рогозинский, *Ряды Фурье*, Физматгиз, М., 1959.
- [5] А. М. Нахушев, *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003.

- [6] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Cambridge Math. Lib., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [7] H. Brézis, F. E. Browder, “Some new results about Hammerstein equations”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80**:3 (1974), 567–572.
- [8] С. Н. Асхабов, “Применение метода монотонных операторов к некоторым нелинейным уравнениям типа свертки и сингулярным интегральным уравнениям”, *Изв. вузов. Матем.*, 1981, № 9, 64–66.
- [9] С. Н. Асхабов, Х. Ш. Мухтаров, “Об одном классе нелинейных интегральных уравнений типа свертки”, *Дифференц. уравнения*, **23**:3 (1987), 512–514.
- [10] S. N. Askhabov, “Nonlinear singular integral equations in Lebesgue spaces”, *J. Math. Sci.*, **173**:2 (2011), 155–171.
- [11] С. Н. Асхабов, М. А. Бетилгириев, “Априорные оценки решений одного нелинейного интегрального уравнения типа свертки и их приложения”, *Матем. заметки*, **54**:5 (1993), 3–12.

С. Н. Асхабов

Чеченский государственный университет, г. Грозный

E-mail: askhabov@yandex.ru

Поступило

05.05.2014

Исправленный вариант

21.09.2014